MATHÉMATIQUES I

Définitions

Si f est une fonction de classe C^∞ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on notera, pour $p \geq 1$, $f^p = f \circ f .. \circ f$ p fois, fonction définie sur le sous-domaine de Ω défini par $\{x \in \Omega |\ f(x) \in \Omega,\ f^2(x) \in \Omega, \ldots, f^{p-1}(x) \in \Omega\}$. On appelle p-cycle de f un ensemble de p éléments $\{x_0, \ldots x_{p-1}\} \subset \Omega$ tel que $f(x_0) = x_1, \ldots, f(x_{p-2}) = x_{p-1}, f(x_{p-1}) = x_0$. On appelle multiplicateur du cycle la quantité

$$(f^p)'(x_0) = f'(x_0) f'(x_1) \ldots f'(x_{p-1}) .$$

Un point $x \in \Omega$ est dit p-périodique s'il est élément d'un p-cycle ; un point 1-périodique est encore appelé point fixe. Le multiplicateur d'un point périodique x_0 est alors le multiplicateur du cycle le contenant, qui n'est autre que le multiplicateur de x_0 comme point fixe de f^p. Le cycle (ou le point p-périodique) sera dit attractif, super attractif, indifférent ou répulsif suivant que la valeur absolue de son multiplicateur est strictement inférieure à 1, égale à 0, égale à 1 ou strictement supérieure à 1.

On pourra être amené à utiliser un théorème de fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$.

On pourra alors admettre le résultat suivant :

Théorème : *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1, *et* (x_0, y_0) *un point de* Ω, *tels que*

$$F(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 .$$

Alors il existe ε, $\eta > 0$ tels que si on pose $I =]x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon[$, $J =]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$, l'ouvert $V = I \times J$ est inclus dans Ω et il existe une fonction $g :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\to]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ de classe C^1 telle que :

$$\forall (x,y) \in V,\ F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x) .$$

Le thème général du problème est l'étude globale de la méthode de Newton appliquée aux polynômes.

Filière MP

Partie I - La méthode de Newton pour les polynômes réels

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale non constante et $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid P'(x) \neq 0\}$. Si $x \in \Omega$, on définit $N_P(x)$ comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en $(x, P(x))$ au graphe de P avec l'axe des x.

I.A - Montrer que :

$$\forall x \in \Omega,\ N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}.$$

I.B -

I.B.1) Si $x \in \Omega$, calculer $N'_P(x)$.

I.B.2) Soit a un nombre réel.

Montrer que si $P(a) = 0$, $P'(a) \neq 0$ alors a est un point fixe super attractif de N_P. Si a est un zéro d'ordre $p \geq 2$ de P montrer que N_P peut se prolonger par continuité en a qui devient un point fixe attractif de N_P de multiplicateur $1 - 1/p$.

Si $x \in \Omega$, on dira que la suite de Newton de x par P est bien définie si l'on peut définir une suite (x_n) telle que $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \Omega \text{ et } x_{n+1} = N_P(x_n).$$

Dans ce cas, cette suite (x_n) sera la suite de Newton de x par P.

I.C - Montrer que si la suite de Newton de x par P est bien définie et converge vers $a \in \mathbb{R}$ alors $P(a) = 0$.

I.D - Soit réciproquement $a \in \mathbb{R}$ un zéro de P.

I.D.1) Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que si $|y - a| < \varepsilon$ alors la suite de Newton de y par P est bien définie et converge vers a.

On appelle $I(a)$ le plus grand intervalle contenant a et formé de points dont la suite de Newton par P converge vers a.

I.D.2) Montrer que c'est un intervalle ouvert ; on l'appelle le bassin immédiat de a.

I.E -

I.E.1) On suppose que P a au moins deux racines réelles. Soit a^- le plus petit zéro de P ; on suppose que ξ, le plus petit zéro de P' vérifie $\xi > a^-$ et que P'' ne s'annule pas sur $]-\infty, \xi[$. Montrer que le bassin immédiat de a^- est égal à $]-\infty, \xi[$.

I.E.2) On suppose que le bassin immédiat du zéro a de P est de la forme $]\alpha, \beta[$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Montrer successivement que $N_P(]\alpha, \beta[) \subset]\alpha, \beta[$, que $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$, et enfin que $N_P(\alpha) = \beta$, $N_P(\beta) = \alpha$. Ce 2 - cycle peut-il être attractif ?

I.F - Les hypothèses de la question I.E.2 étant toujours vérifiées, montrer que le bassin immédiat de a contient un zéro de P''.

I.G - On suppose P de degré $d \geq 2$ possédant d zéros distincts. Montrer que N_P attire tout zéro de P'' vers un zéro de P.

Partie II - Étude algébrique

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré d (on note $d^\circ(P) = d$). Dans cette partie la dérivation est à prendre au sens de la dérivation formelle des polynômes ou plus généralement des fractions rationnelles et N_P est la fraction rationnelle

$$N_P(X) = X - \frac{P(X)}{P'(X)}.$$

II.A - Montrer que si P a d zéros distincts alors $R = N_P$ vérifie

$$(*) \quad \begin{cases} R = \dfrac{Q}{S}, Q, S \in \mathbb{C}[X], PGCD(Q, S) = 1, d^\circ(Q) = d, d^\circ(S) = d-1 \\ \text{et } R \text{ possède } d \text{ points fixes super attractifs} \end{cases}$$

(Un point fixe super attractif de R est un point $z \in \mathbb{C}$ tel que $R(z) = z$, $R'(z) = 0$).

II.B - Soit réciproquement R une fraction rationnelle vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré d, possédant d zéros distincts, tel que $R = N_P$.

II.C - Deux fractions rationnelles f, g sont dites semblables s'il existe une similitude $T(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0)$ telle que si D, D' désignent les domaines de définition de f, g (c'est-à-dire le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des pôles) alors $T(D) = D'$ et

$$\forall z \in D', \ f(z) = T^{-1} \circ g \circ T(z).$$

Si $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ et si $T(z) = az + b$ montrer que $N_{P \circ T}$ est semblable à N_P.

II.D - Déterminer N_P pour $P(X) = X^2$, $P(X) = X^2 - 1$: montrer que si P est un polynôme de degré 2 alors N_P est semblable à $z \mapsto \frac{z}{2}$ ou bien à $z \mapsto \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$.

II.E - Pour $m \in \mathbb{C}$ on définit

$$P_m(z) = z^3 + (m-1)z - m = (z-1)(z^2 + z + m), N_m(z) = N_{P_m}(z)$$

Montrer que si P est un polynôme de degré 3 alors soit N_P est semblable à $z \mapsto \frac{2z}{3}$ soit il existe $m \in \mathbb{C}$ tel que N_P est semblable à N_m.

II.F - Quel est l'intérêt des résultats des deux questions précédentes pour l'étude des suites de Newton par les polynômes de degré ≤ 3 ?

Partie III - Étude analytique du cas cubique réel

Dans cette partie on suppose $m \in \mathbb{R}$, on garde les notations du II.E et on s'intéresse au comportement des suites de Newton des nombres réels par P_m.

III.A -

III.A.1) Montrer que P_m a trois zéros (complexes) distincts si et seulement si $m \neq -2$, $m \neq 1/4$.

III.A.2) On suppose $m > 1$: montrer que la suite de Newton de tout réel x par P_m est définie et converge vers un réel à préciser.

III.B -

III.B.1) Montrer que si $m' < 1/4$, $m' \neq -2$ alors $P_{m'}$ possède trois zéros réels distincts, soient :

$$1, a_{m'} = \frac{-1 + \sqrt{1-4m'}}{2}, b_{m'} = \frac{-1 - \sqrt{1-4m'}}{2}.$$

Si de plus $m' < 0$, montrer qu'il existe $m \in]0, 1/4[$ tel que $N_{m'}$ soit semblable à N_m.

III.B.2) On supposera désormais dans cette partie que $m \in [0, 1/4[$. P_m possède alors trois zéros réels distincts, soient :

$$1, a_m = \frac{-1 + \sqrt{1-4m}}{2}, b_m = \frac{-1 - \sqrt{1-4m}}{2}.$$

III.B.3) On pose $x_0^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{1-m}{3}}$ et on désigne par $]\alpha(m), \beta(m)[$ le bassin immédiat de a_m. Montrer que la fonction $x \mapsto |N'_m(x)|$ est strictement décroissante sur $]x_0^-, a_m[$ et strictement croissante sur $]0, x_0^+[$.

III.B.4) Montrer que la fonction $M_m = N_m \circ N_m$ est définie sur un intervalle $]x_1^-, x_1^+[\subset]x_0^-, x_0^+[$ où $N_m(x_1^-) = x_0^+$, $N_m(x_1^+) = x_0^-$.

On désigne par ξ^-, ξ^+ le plus petit et le plus grand zéro de M'_m. Montrer que la fonction M'_m est strictement décroissante sur $]x_1^-, \xi^-[$ et strictement croissante sur $]\xi^+, x_1^+[$.

III.B.5) Montrer que l'intervalle $[\xi^-, \xi^+]$ est inclus dans le bassin immédiat de a_m.

III.B.6) Déduire de III.B.4 et III.B.5 que $\{\alpha(m),\beta(m)\}$ est le seul 2 - cycle de N_m.

III.B.7) Montrer que $\alpha(0) = -\beta(0)$ et en déduire que $\alpha(0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

III.B.8) On pose $F(m, x) = M_m(x) - x$. Si u est un réel, un développement limité à l'ordre 1 de la fonction

$$m \mapsto F(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + um)$$

peut être obtenu grâce à un logiciel de calcul formel. On trouve :

$$\left(35u + \frac{25 - 7\sqrt{5}}{2}\right)m + o(m).$$

En déduire, avec toutes les justifications nécessaires, un développement limité à l'ordre 1 de α en 0.

III.C -

III.C.1) Montrer qu'il existe une et une seule valeur m_0 de $m \in \mathbb{R}$ telle que 0 soit 2-périodique pour N_m. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de m_0 en indiquant l'algorithme utilisé.

III.C.2) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|m - m_0| < \eta$ alors N_m admet un cycle attractif d'ordre 2 qui attire 0.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

On se propose dans ce problème d'étudier une méthode de calcul approché des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle.

Notations : On désigne par $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, par $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques, par $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre n et par $O_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales directes (i.e. dont le déterminant vaut 1).

On désigne par $diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ la matrice diagonale d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que la matrice A de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ a pour coefficient $a_{i,j}$ en i-ème ligne et j-ème colonne. Dans ce cas, la transposée de A sera notée ${}^tA$ et la trace de A définie par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Liens entre les parties du problème : La partie I sert dans tout le problème. La partie II traite d'un cas particulier que l'on aura intérêt à traiter soigneusement avant de poursuivre. La partie IV est indépendante de ce qui précède et sert dans V.D - .

Partie I - Une norme sur $Mat(n, \mathbb{R})$

I.A - Montrer que pour tout couple de matrices carrées (A, B), $(Tr(AB)) = Tr(BA)$.

I.B - Montrer que l'application

$\phi : Mat(n, \mathbb{R}) \times Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par : $\phi(A, B) = Tr(A\,{}^tB)$

Filière MP

est un produit scalaire ; calculer en particulier $\phi(A, A)$. On note $\| \ \|$ la norme associée à ϕ. Exprimer $\|A\|^2$ en fonction des $(a_{i,j})$.

I.C - Montrer que pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de $Mat(n, \mathbb{R})$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

En déduire la norme de l'application $Tr : Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (norme subordonnée à la norme $\| \ \|$).

I.D - Soit Ω un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice A, $\|\Omega A\| = \|A\|$. Prouver que si A est une matrice symétrique, la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ est elle-même symétrique et que l'on a, en notant $(b_{i,j})$ les coefficients de B :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 .$$

Partie II - Diagonalisation pour n = 2

Soient A une matrice de $S_2(\mathbb{R})$, et Ω une matrice de $O_2^+(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix}, \ \Omega = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} .$$

On pose $B = {}^t\Omega A \Omega = (b_{i,j})$.

II.A - Calculer les termes de la matrice B.

II.B - Montrer que

$$\sum_{i=1}^{2} b_{i,i}^2 + 2b_{2,1}^2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i,i}^2 + 2a_{2,1}^2 .$$

II.C - On suppose ici que $a_{1,2} \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $]-\frac{\pi}{4}, \ 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$, et un seul, tel que $b_{2,1} = 0$ (penser à distinguer deux cas).

Définir la fonction F qui, à une matrice symétrique non diagonale de $S_2(\mathbb{R})$, associe le réel θ ainsi défini.

II.D - Montrer que pour ce choix de θ, la matrice B est diagonale et que $b_{1,1}$ et $b_{2,2}$ sont les valeurs propres de A.

II.E - On donne

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calculer $\theta = F(A)$ puis la matrice B. En déduire les éléments propres de A.

Partie III - Quelques résultats généraux

On définit, pour θ réel, p et q entiers donnés (avec $p<q$), une matrice $\Omega = (\omega_{i,j})$ de $Mat(\mathbb{R},n)$ en posant :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\theta) & \dots & \sin(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\sin(\theta) & \dots & \cos(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

où $\omega_{p,p} = \omega_{q,q} = \cos(\theta)$, $\omega_{p,q} = \sin(\theta)$ et $\omega_{q,p} = -\sin(\theta)$.
On considère $A = (a_{i,j})$ une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^t\Omega A \Omega$.

III.A - Justifier que $B = (b_{i,j})$ est symétrique et que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

III.B - Calcul des coefficients de B

III.B.1) Soit $M = (m_{i,j}) = A\Omega$. Exprimer, en fonction de θ et des coefficients de A, les coefficients $m_{i,j}$, $m_{i,p}$ et $m_{i,q}$ lorsque j est un élément de $[1,n]$ distinct de p et de q, i est quelconque dans $[1,n]$.

III.B.2) Exprimer, en fonction des coefficients de A et de θ les coefficients $b_{i,j}$, puis $b_{i,p}$, $b_{i,q}$ pour i, j tous deux différents de p et de q, ainsi que $b_{p,q}$, $b_{p,p}$ et $b_{q,q}$.

III.B.3) Donner une relation simple entre les matrices.

$$\begin{bmatrix} b_{p,p} & b_{p,q} \\ b_{q,p} & b_{q,q} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} a_{p,p} & a_{p,q} \\ a_{q,p} & a_{q,q} \end{bmatrix}.$$

En déduire que

$$b_{p,p}^2 + b_{q,q}^2 + 2b_{p,q}^2 = a_{p,p}^2 + a_{q,q}^2 + 2a_{p,q}^2 .$$

III.B.4) On suppose que $a_{p,q}$ est non nul, montrer qu'il existe un réel $\theta_{p,q}$ appartenant à $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ et un seul, tel que $b_{p,q} = 0$.

Partie IV - Suites dans espace vectoriel normé de dimension finie

Soit E un espace vectoriel normé, de dimension finie, dont la norme est notée $\| \|$.

IV.A - On se propose de montrer le résultat suivant : une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace normé $(E, \| \|)$ telle que :

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, (1)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérences, (2)

$\lim_{n \to \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$, (3)

est convergente.

On considère donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés (1), (2) et (3) et M un entier strictement supérieur à 1 ; on note a_μ pour $1 \le \mu \le M$, les valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

IV.A.1) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \ge n_\varepsilon \Rightarrow x_k \in \bigcup_{\mu=1}^{M} B(a_\mu, \varepsilon),$$

où $B(a_\mu, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre a_μ et de rayon ε.

IV.A.2) En déduire, par un choix judicieux de ε, qu'il existe $\mu \in [1, M]$ et un entier n_0 tels que : $k \ge n_0 \Rightarrow x_k \in B(a_\mu, \varepsilon)$, et conclure.

Partie V - Méthode de Jacobi : une suite de matrices convergeant vers une diagonalisée de A

Soit A un élément de $S_n(\mathbb{R})$. On note $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ses valeurs propres, éventuellement répétées avec leur multiplicité.

On définit par récurrence une suite de matrices $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$ en posant $A_0 = A$, et $A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ où Ω_k est construite de la façon suivante :

si A_k est diagonale, Ω_k est la matrice unité,

sinon la matrice Ω_k est définie comme dans la partie III, en choisissant :

(1) deux entiers p et q tels que $p<q$ et $a_{p,q}^{(k)} = \sup_{i \neq j} \left|a_{i,j}^{(k)}\right|$

(2) $\theta = \theta_k$, dans $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\operatorname{cotan}(2\theta_k) = \dfrac{a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)}}{2a_{p,q}^{(k)}}$.

On observera que p et q dépendent de k et on pourra noter, si le besoin s'en fait sentir, $p = p_k$ et $q = q_k$.

V.A - Donner une conséquence du choix de θ_k pour la matrice A_{k+1}.

V.B - On pose $A_k = D_k + B_k$ avec $D_k = diag(a_{i,i}^k)$ et $\varepsilon_k = \|B_k\|^2$, la norme étant définie comme dans la partie I.

V.B.1) Montrer que $\varepsilon_k \leq n(n-1)\left|a_{p,q}^{(k)}\right|^2$.

V.B.2) Montrer, en utilisant la question III.B.3, que $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2\left|a_{p,q}^{(k)}\right|^2$.

V.B.3) En déduire que

$\varepsilon_{k+1} \leq \left(1 - \dfrac{2}{n(n-1)}\right)\varepsilon_k$, puis que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

Que peut-on dire de la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans l'espace normé $(Mat(\mathbb{R},n), \|\ \|)$?

V.C - On veut montrer que la suite des matrices diagonales $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérence dans $E = (Mat(\mathbb{R},n), \|\ \|)$, qui sont toutes des matrices de la forme $diag(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$ où la suite finie $(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$ est obtenue par permutation des valeurs propres de A. Pour cela considérons une suite extraite que nous noterons $(D_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ convergeant vers une matrice Δ dans l'espace E ($(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ désigne une suite d'entiers naturels strictement croissante).

V.C.1) Montrer que la limite Δ est une matrice diagonale.

V.C.2) Montrer que A et Δ ont le même polynôme caractéristique.

V.C.3) Conclure.

V.D - Convergence de la méthode

V.D.1) Montrer que la suite (D_k) est bornée et que $\lim_{k \to \infty} (D_{k+1} - D_k) = 0$.

V.D.2) Montrer que les suites (D_k) et (A_k) convergent dans $(Mat(\mathbb{R}, n), \| \|)$ et dire en quoi l'algorithme ainsi défini permet d'obtenir une valeur approchée des valeurs propres de A.

Partie VI - Étude d'un exemple pour $n = 3$

On donne ici

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 12 \\ 3 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$, et on définit la suite A_k comme dans V - .

VI.A - Déterminer θ_0 puis Ω_0. Donner les valeurs rationnelles des coefficients $(a_{i,j}^{(1)})$.

VI.B - Calculer de la même façon θ_1, Ω_1 et les coefficients $(a_{i,j}^{(2)})$ de A_2.

VI.C - Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. Observation ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Objet du problème :

Il s'agit de calculer par plusieurs méthodes les intégrales I_n définies dans la partie II.

Notations : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Partie I -

I.A - Soit f une application de classe C^1 sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin xt \, dt = 0$.

I.B - On note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nt}{\sin t} dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

I.B.1) Justifier l'existence de J_n.

I.B.2) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.

I.B.3) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n et en déduire une expression de J_n en fonction de n.

I.B.4) Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$, et en déduire : $\lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

I.B.5) Déduire des résultats précédents l'égalité : $\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

I.C -

I.C.1) Soit a un réel strictement positif. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^a \frac{\sin nt}{\sin t} \, dt$.

Filière PSI

I.C.2) Soit $a \in]0, \pi[$. Prouver que l'application f telle que

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe C^∞ sur $[0, a]$.

On pourra écrire : $f(x) = \dfrac{\dfrac{\sin x - x}{x^2}}{\dfrac{\sin x}{x}}$, pour $x \in]0, a[$.

I.C.3) Déterminer

$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^a \frac{\sin nt}{t} dt - \int_0^a \frac{\sin nt}{\sin t} dt \right)$ lorsque $a \in]0, \pi[$.

I.C.4) En déduire la valeur de

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a \frac{\sin nt}{t} dt$ lorsque $a = \frac{\pi}{2}$, puis $a < \frac{\pi}{2}$, puis $a > \frac{\pi}{2}$.

I.D - En utilisant les résultats précédents et l'intégrale $\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt$, montrer que la fonction $F : X \mapsto \int_0^X \frac{\sin t}{t} dt$ admet $\frac{\pi}{2}$ pour limite lorsque x tend vers en $+\infty$.

On posera $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

I.E - En utilisant $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$, montrer que l'application

$\left[t \mapsto \frac{\sin t}{t} \right]$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Partie II -

II.A - Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'application

$\left[t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n \right]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose :

$I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt$.

II.B - Montrer que : $I_1 = I_2$ (I_1 a été définie en I.D).

II.C - Montrer : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

II.D - Montrer que : $I_n > 0$ pour $n \geq 1$. (On pourra utiliser une partition judicieuse de l'intervalle d'intégration).

Partie III -

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on considère les applications

$g_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (\sin t)^n$

et $h_{n,k} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h_{n,k} = \frac{1}{t^{n-k}} g_n^{(k)}(t)$,

où $g_n^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de g_n.

III.A - Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, $h_{n,k}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.B - Montrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, la valeur de l'expression

$(n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)dt$ ne dépend pas de k.

III.C - Pour $n \geq 2$, prouver que la fonction $G : X \mapsto \int_0^X h_{n,k}(t)\, dt$ admet en $+\infty$ une limite finie, notée $\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)dt$, et que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t)dt = (n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t)dt .$$

III.D - En déduire, pour $n \geq 2$: $I_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} g_n^{(n-1)}(t)dt$.

III.E -

III.E.1) Établir pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$ les résultats suivants :

$$4^p (\sin t)^{2p} = C_{2p}^p + 2 \sum_{k=1}^{p} (-1)^k C_{2p}^{p-k} \cos(2kt) \qquad (1)$$

$$4^p (\sin t)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2p+1}^{p-k} \sin(2k+1)t \qquad (2)$$

III.E.2) En déduire, en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$, une expression de I_n du type $q_n \pi$ où q_n est une somme de nombres rationnels (on pourra faire intervenir I_1 dans les calculs).

Retrouver la valeur de I_2, puis calculer I_3 et I_4.

Partie IV -

IV.A - Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel positif l'existence de l'intégrale :

$$A_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}\, dt .$$

IV.B - Montrer que l'application $[x \mapsto A_n(x)]$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle vérifie, pour tout $n \geq 2$, l'équation différentielle :

$$(E_n) : y'' - n^2 y = n(n-1)A_{n-2}(x) - n^2 x^{n-1} I_n .$$

IV.C -

IV.C.1) Résoudre l'équation (E_2).

IV.C.2) En déduire une expression de A_2 à l'aide de I_2 (on considérera les valeurs de $A_2(0)$ et $A'_2(0)$).

IV.C.3) Montrer que $A_2(x) = O(x^2)$ quand x tend vers $+\infty$ et retrouver ainsi la valeur de I_2.

IV.D - Exprimer A'_1 à l'aide de A''_2 et en déduire une expression de A_1.

IV.E - En procédant de manière analogue à IV.C, obtenir A_3 et I_3.

IV.F - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n peut se mettre sous la forme :

$$A_n(x) = e^{-x} Q_n(e^{-x}) + R_n(x) ,$$

où Q_n et R_n sont des fonctions polynômes vérifiant :

le degré de R_n est égal à $n-1$;

le degré de Q_n est égal à n ;

R_n a même parité que $n-1$;

Q_n a même parité que n.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Le but du problème est d'établir certains résultats sur les polytopes de $\mathbb{R}^n$ (voir définition plus loin) notamment lorsque $n = 2$.

- Dans le problème on considère à la fois la structure vectorielle et la structure affine de $\mathbb{R}^n$; ainsi les éléments de $\mathbb{R}^n$ pourront être considérés soit comme des vecteurs, soit comme des points, ce qui permettra d'utiliser les notations classiques résultant de ce double point de vue :

$$\overrightarrow{AB} = B - A \ ; \ O = \vec{0} \text{ (origine)} \ ; \ \overrightarrow{OM} = M - O = M \text{, etc...}$$

- L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Il est orienté (si nécessaire) par la base canonique, considérée comme base orthonormale directe. Ainsi, le produit scalaire s'écrit :

$$(U|V) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \text{, si } U = (u_1, \ldots, u_n) \text{ et } V = (v_1, \ldots, v_n).$$

La norme de U est notée

$$\|U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \ ;$$

la longueur du segment $[A, B]$ est, par définition, la distance euclidienne entre A et B, c'est-à-dire $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

- On rappelle qu'une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est une application f, telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ pour lesquels,

$$\forall M \in \mathbb{R}^n, \ f(M) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}).$$

Dans ce cas, φ est appelée la partie linéaire de f.

Définitions

- **Combinaison affine, combinaison convexe** : soient $M_1, \ldots, M_p$ p points de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p réels **de somme égale** à **1**, on appelle combinaison affine

Filière PSI

des points $M_i(\lambda_i)$ le point $M = \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_p M_p$ barycentre des points M_i affectés des coefficients λ_i, ce qui se traduit vectoriellement par la relation

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OM_i}.$$

Lorsque les λ_i sont tous positifs $(\forall i, \lambda_i \geq 0)$, on parle de combinaison convexe.

- **Ensemble convexe** : soit C un sous-ensemble non vide de points de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est convexe s'il est stable par combinaison convexe. Cela signifie que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, pour tout $p-$uplet $(M_1, \ldots, M_p)$ de points de C et pour tout $p-$uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de réels positifs, de somme égale à 1 on a

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \in C.$$

- **Polytope** : on appelle polytope l'ensemble des combinaisons convexes d'une partie finie $\{M_1, \ldots, M_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ (p entier $p \geq 1$). Cet ensemble, noté $conv(M_1, \ldots, M_p)$, est défini par

$$conv(M_1, \ldots, M_p) = \left\{ M \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ et } M = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \right\}$$

Par exemple $conv(M_1, M_2)$ est le segment $[M_1, M_2]$.

  - en dimension 2, on parle de polygone convexe,
  - en dimension 3, on parle de polyèdre convexe.

- **Point extrémal** : soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'un point $A \in C$ est extrémal si $C \backslash \{A\}$ est encore convexe.

Partie I - Quelques propriétés des polytopes

I.A -

I.A.1) Montrer que tout segment de $\mathbb{R}$ est convexe.

I.A.2) Montrer que tout demi-plan fermé ou ouvert F de $\mathbb{R}^2$ est convexe. On rappelle qu'un demi-plan fermé, respectivement ouvert, de $\mathbb{R}^2$ peut être défini de la façon suivante :

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}\ ,\ \exists a \in \mathbb{R}\ ,\ \left(M \in F \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} \mid U) < a \right).$$

respectivement

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ , \ \exists a \in \mathbb{R} \ , \left(M \in F \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} \mid U) < a \ \right).$$

I.A.3) Montrer que, si A est un ensemble non vide d'indices et $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de convexes de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide, alors

$$C = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \text{ est convexe.}$$

I.B - Soit C un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, on suppose que

$$\forall (M,N) \in C^2 \ , \ [M,N] \subset C \ .$$

Montrer par récurrence sur p que toute combinaison convexe de p éléments de C appartient à C c'est-à-dire que

$$\forall (M_1,\ldots,M_p) \in C^p, \left(\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p \Big| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right), \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \in C \ .$$

En déduire une caractérisation d'un ensemble convexe.

I.C - Dans $\mathbb{R}^2$, on appelle triangle tout polygone convexe $conv(M_1,M_2,M_3)$ où M_1,M_2,M_3 sont trois points non alignés. On note F_1 le demi-plan fermé contenant le point M_1 et de frontière la droite M_2M_3. On définit de même, par permutation circulaire, les demi-plans F_2 et F_3.

I.C.1) Montrer que $conv(M_1,M_2,M_3) = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ (on pourra commencer par prouver que, si $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$, avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, alors $(M \in F_1 \Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0)$).

I.C.2) Montrer que M_1 est un point extrémal de $conv(M_1,M_2,M_3)$.

I.D - Montrer que l'image d'un polytope par une bijection affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est un polytope.

I.E - Soit $T = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in [0,1]^p \mid \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1\}$.

I.E.1) Montrer que T est un compact de $\mathbb{R}^p$.

I.E.2) Soit $M_1,\ldots,M_p$ p points de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application

$$f : (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_p M_p \in \mathbb{R}^n \ .$$

Dire rapidement pourquoi f est continue.

I.E.3) Montrer que tout polytope est compact.

I.E.4) En déduire que, dans $\mathbb{R}^2$, si une droite Δ coupe un polygone convexe P alors l'intersection est un segment, éventuellement réduit à un point.

I.F -

I.F.1) Soient P un polytope de $\mathbb{R}^n$ et F un demi-espace fermé contenant P défini par $F = \{M \in \mathbb{R}^n \,|\, (\overrightarrow{OM} \,|\, U) \leq \alpha\}$

où U est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et α un réel. On suppose que M_1 est le seul point de P réalisant l'égalité $(\overrightarrow{OM_1} \,|\, U) = \alpha$. Montrer que, si P n'est pas réduit à $\{M_1\}$, alors M_1 est un point extrémal de P.

On admet que la réciproque est vraie, autrement dit que cette propriété est caractéristique des points extrémaux des polytopes.

I.F.2) Montrer que l'ensemble des points extrémaux du polytope, ensemble des combinaisons convexes des points $M_1,\ldots, M_p$, est un sous-ensemble de l'ensemble $\{M_1,\ldots, M_p\}$.

I.F.3) On appelle courbe des moments dans $\mathbb{R}^n$ la courbe définie par

$$t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (t,\ t^2,\ldots,t^n).$$

- Préciser la courbe obtenue lorsque $n = 2$.
- Soit P le polytope, ensemble des combinaisons convexes des points $M(t_1),\ldots, M(t_p)$, où $t_1,\ldots, t_p$ sont p réels distincts. Montrer que les points extrémaux de P sont les points $M(t_1),\ldots, M(t_p)$.

Indication : on pourra prendre pour chaque point $M(t_i)$ le vecteur

$U_i = (2t_i, -1, 0, \ldots, 0)$, et pour demi-espace fermé $F_i = \left\{ M \in \mathbb{R}^n \,|\, (\overrightarrow{OM} \,|\, U_i) \leq t_i^2 \right\}$.

Partie II - Représentation complexe des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$

On assimile le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes en identifiant tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ au nombre complexe $z = x + iy$.

II.A -

II.A.1) Soit $f : z \mapsto f(z)$ une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est $\mathbb{R}$– linéaire,
- il existe des complexes α et β tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$.

II.A.2) On considère une application $\mathbb{R}$– linéaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$. Montrer que $det\, f = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme.

II.A.3) Exemple : donner l'écriture complexe de la réflexion vectorielle (i.e. la symétrie vectorielle orthogonale) f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, d'axe la droite

vectorielle $\delta(\theta)$ d'angle polaire $\theta \in [\,0,\pi[$, c'est-à-dire de vecteur directeur $\vec{U}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

II.B -

II.B.1) Soit p un entier $p \geq 3$. Montrer que le sous-ensemble

$$H = \left\{ (z_1,\ldots,z_p) \in \mathbb{C}^p \,\middle|\, z_1 + \ldots + z_p = 0 \right\}$$

de $\mathbb{C}^p$ est un hyperplan vectoriel.

II.B.2) Soit ψ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ défini par

$$\psi : (z_1,z_2,\ldots,z_p) \mapsto (z_2,\ldots,z_p,z_1).$$

On pose, pour tout k entier de $[0, p-1]$, $\Omega_k = (1, \omega^k, \omega^{2k},\ldots, \omega^{(p-1)k})$, avec

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}.$$

- Calculer ψ^p. En déduire que ψ est un automorphisme diagonalisable.
- Calculer $\psi(\Omega_k)$. Que dire du résultat obtenu ?

II.B.3) En déduire une base de l'hyperplan H.

II.C - On suppose, au cours de cette question, que le vecteur

$$V = (a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{C}^p$$

appartient à l'hyperplan H, autrement dit que $a_1 + \ldots + a_p = 0$.

II.C.1) Justifier l'existence et l'unicité de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ tel que $V = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \Omega_k$.

II.C.2) Montrer que $\lambda_1 = \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p} \omega^{1-r} a_r$ et que $\lambda_{p-1} = \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p} \omega^{r-1} a_r$.

II.C.3) On suppose que, $|\lambda_1| = |\lambda_{p-1}|$ ce qui signifie que

$$(\exists \theta \in [\,0, 2\pi[), \lambda_{p-1} = e^{i\theta}\lambda_1.$$

On pose :

$$\forall r \in [1, p] \cap \mathbb{N}, \alpha_r = \sin\left[(r-1)\frac{2\pi}{p} - \frac{\theta}{2}\right].$$

Montrer que :

$$\sum_{r=1}^{p} \alpha_r = 0 \text{ et que } \sum_{r=1}^{p} \alpha_r a_r = 0.$$

Partie III - Étude des familles $\pi-$rationnelles de droites vectorielles

Toutes les droites considérées dans cette partie sont des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$

On rappelle que, pour tout élément θ de $\mathbb{R}$, on note $\delta(\theta)$ la droite vectorielle d'angle polaire $\theta \in [\,0, \pi[$ du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit p un entier $p \geq 1$. Une famille $F = (d_1, \ldots, d_p)$ de droites, est dite $\pi-$rationnelle s'il existe un automorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\{d_1, \ldots, d_p\} = \left\{ f\left(\delta\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right) \,\middle|\, k \in [0, p-1] \right\}.$$

III.A - Exemples de familles de droites $\pi-$rationnelles.

III.A.1) Montrer qu'une famille (d_1) réduite à une droite ainsi qu'une famille (d_1, d_2) constituée de deux droites distinctes sont $\pi-$rationnelles.

III.A.2) Montrer qu'une famille (d_1, d_2, d_3) constituée de trois droites deux à deux distinctes est elle aussi $\pi-$rationnelle.

III.B - Existence de familles de droites non $\pi-$rationnelles.

Soit $F = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ une famille constituée de quatre droites deux à deux distinctes.

III.B.1) Pour tout $j \in [1, 4]$ on note U_j un vecteur directeur de la droite d_j. Montrer que le rapport

$$R = \frac{\det(U_1, U_3) \cdot \det(U_2, U_4)}{\det(U_1, U_4) \cdot \det(U_2, U_3)}$$

ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs U_j. Il est recommandé, pour la suite du problème, de les choisir unitaires en les écrivant $U_j = (\cos\theta_j, \sin\theta_j)$. Ce rapport sera noté $R(F)$.

III.B.2) Soit f un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$f(F) = (f(d_1), f(d_2), f(d_3), f(d_4)).$$

Montrer que $R(f(F)) = R(F)$.

III.C -

III.C.1) Justifier l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'un polynôme T_k à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$.

III.C.2) Soit p un entier, $p \geq 4$. On considère une famille $D = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ de quatre droites deux à deux distinctes extraites d'une famille $\pi-$rationnelle F de p droites. Montrer l'existence d'une fraction rationnelle G à coefficients dans

le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{Q}(X)$, telle que l'on ait

$$R(D) = G\left(\cos\frac{\pi}{p}\right).$$

III.C.3) On admet l'existence de nombres réels n'appartenant pas à l'ensemble

$$\mathfrak{E} = \bigcup_{q\geq 4}\left\{G\left(\cos\frac{\pi}{q}\right)\middle| G\in\mathbb{Q}(X)\right\}.$$

Montrer que, pour tout entier $p\geq 4$, il existe des familles non $\pi-$rationnelles de p droites.

Partie IV - Identification par des rayons d'un polygone convexe.

Dans toute cette partie on se place dans $\mathbb{R}^2$.

Soient P un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$ et θ un réel de $[0,\pi[$. Pour tout réel x, on note $\Delta_{\theta,x}$ la droite affine de vecteur directeur d'affixe $e^{i\theta}$ passant par le point d'affixe $xie^{i\theta}$. On rappelle (cf. I.E.4. que l'intersection $\Delta_{\theta,x}\cap P$, lorsqu'elle est non vide, est un segment. On note $l(\Delta_{\theta,x}\cap P)$ sa longueur, que l'on prend nulle lorsque cette intersection est vide. On définit ensuite l'application

$$L_{\theta,\ P} : x\in\mathbb{R}\mapsto l(\Delta_{\theta,x}\cap P)\in\mathbb{R}.$$

On considère deux polygones convexes P et P' de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $\delta(\theta)$ une droite vectorielle fixée, où $\theta\in[0,\pi[$. P et P' sont dits $\delta(\theta)-$identifiables si les applications $L_{\theta,\ P}$ et $L_{\theta,\ P'}$ sont égales.
- Soit $F = (\delta(\theta_1),\ldots,\delta(\theta_p))$ une famille de p droites vectorielles, avec $p\geq 1$. P et P' sont dits $F-$identifiables si pour tout $i\in[1,p]$ les polygones P et P' sont $\delta(\theta_i)-$identifiables, c'est-à-dire si

$$(\forall i\in[1,p]),\ L_{\theta_i,\ P} = L_{\theta_i,\ P'}.$$

L'objectif de la partie IV - est de montrer qu'une famille convenablement choisie de quatre droites vectorielles suffit pour savoir si deux polygones convexes sont distincts.

IV.A -

IV.A.1) Trouver l'équation polaire de la droite $\Delta_{\theta,x}$.

IV.A.2) Illustrer par un dessin la définition de la fonction $L_{\theta,\ P}$.

IV.B - Le but de cette question est de montrer que si F est une famille de droites vectorielles permettant de savoir si deux polygones convexes P et P' sont distincts alors F n'est pas $\pi-$rationnelle.

IV.B.1) Montrer que si f est une bijection affine de $\mathbb{R}^2$ de partie linéaire φ, et si P et P' sont des polygones convexes $\delta(\theta)-$identifiables, alors les polygones convexes $f(P)$ et $f(P')$ sont $\varphi(\delta(\theta))-$identifiables.

Dans toute la suite de cette question, soit p un entier, $p \geq 3$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}$.

Le symbole $[A]$ désignant l'affixe complexe du point A de $\mathbb{R}^2$, on note $A_1,\ldots,A_p$ et $B_1,\ldots,B_p$ les points de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$(\forall k \in [1, p])\ [A_k] = \omega^k,\ [B_k] = e^{i\pi/p}\omega^k,$$

et on considère les deux polygones convexes distincts $P = conv(A_1,\ldots,A_p)$ et $P' = conv(B_1,\ldots,B_p)$.

IV.B.2) Prouver que pour tout $q \in [1, p]$ la réflexion affine σ_q d'axe la droite Δ_q passant par O et de direction $\delta_q = \delta\left((2q-1)\frac{\pi}{2p}\right)$ vérifie $\sigma_q(P') = P$.

IV.B.3) Exhiber une famille F de p droites vectorielles telle que les polygones convexes P et P' soient $F-$identifiables.

IV.B.4) En déduire que, pour toute famille $\pi-$rationnelle $G = (d_1,\ldots,d_m)$ de m droites vectorielles, il existe au moins deux polygones convexes distincts Q et Q' qui soient $G-$identifiables.

IV.C - Réponse au problème de la reconnaissance de deux polygones convexes distincts P et P'.

Soit F une famille de p droites vectorielles distinctes avec $p \geq 4$. On admet que s'il existe deux polygones convexes distincts $F-$identifiables, alors F est nécessairement extraite d'une famille $\pi-$rationnelle.

Soit $D = (d_1,d_2,d_3,d_4)$ une famille de quatre droites vectorielles distinctes telle que $R(D) \in \mathbb{R}\setminus\mathfrak{E}$ avec

$$\mathfrak{E} = \bigcup_{q \geq 4} \left\{ G\left(\cos\frac{\pi}{q}\right) \,\middle|\, G \in \mathbb{Q}(X) \right\}$$

ce qui est possible d'après la question III.C.3.

Montrer que si P et P' sont des polygones convexes $D-$identifiables alors on a $P = P'$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Partie I -

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0, \pi]$, que l'on munit du produit scalaire

$$(f,g) \to (f|g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$$

et des normes

$$f \to \|f\|_1 = \int_0^{\pi} |f(t)|dt\,,$$

$$f \to \|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}\,,$$

$$f \to \|f\|_\infty = \sup_{0 \le t \le \pi} |f(t)|\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n (respectivement s_n) la fonction définie sur $[0, \pi]$ par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ (respectivement $s_n(t) = \sin(nt)$).

Pour tout $f \in E$, on note $\hat{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire, coïncidant avec f sur l'intervalle $[0, \pi]$ et $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, coïncidant avec f sur l'intervalle $]0, \pi[$ et vérifiant la condition suivante : en tout point x de $\mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{h \to 0, h > 0} (\tilde{f}(x+h) + \tilde{f}(x-h))\right).$$

I.A -

I.A.1) On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par la formule

$f(t) = -2t + \pi$.

Représenter graphiquement les fonctions $\hat{f}$ et $\tilde{f}$.

I.A.2) Soit f un élément de E. Montrer (soigneusement) que la fonction $\hat{f}$ est définie et continue, et que la fonction $\tilde{f}$ est définie et continue par morceaux. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\tilde{f}$ soit continue.

Filière PC

I.B -

I.B.1) Soit f un élément de E.

Montrer que sur l'intervalle $[0, \pi]$, le problème aux limites

$$\begin{cases} y'' = -f \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule notée Tf.

Indication : si on désigne par

$$F_0 : t \mapsto \int_0^t f(u)du$$

la primitive de f sur $[0, \pi]$ s'annulant en 0, on pourra exprimer Tf à l'aide d'intégrales comportant F_0.

L'objet du problème est d'étudier l'application T.

I.B.2) Déterminer précisément Tf lorsque f est la fonction définie au I.A.1) et en donner une représentation graphique.

Partie II - Valeurs propres et vecteurs propres de T

II.A - Montrer que l'application $T : f \to Tf$ est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.

II.B - Pour tout entier naturel n, calculer Tc_n.

II.C - Vérifier que, pour tout couple (f_1, f_2) d'éléments de E,

$$(Tf_1 | f_2) = (f_1 | Tf_2)$$

Que peut-on dire de $(f_1 | f_2)$ lorsque f_1 et f_2 sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?

II.D - Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

II.E - On note $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

II.E.1) Montrer que S est une famille orthonormale.

II.E.2) Soit f un élément de E. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} (f|s_n)s_n .$$

Que représente f_N pour la fonction 2π-périodique $\tilde{f}$?

En conclure que : $\lim_{N \to +\infty} \|f - f_N\|_2 = 0$.

Déduire de là que, si f est orthogonal à S, la fonction f est nulle.

II.F - On note C l'ensemble des c_n lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

II.F.1) La famille C est-elle orthonormale ?

II.F.2) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$h_N = \frac{1}{2}(f|c_0) + \sum_{n=1}^{N} (f|c_n)c_n$, où f est un élément de E. Montrer que

$\lim_{N \to +\infty} \|f - h_N\|_2 = 0$.

Que peut-on dire si f est orthogonal à C ?

Partie III - Représentation intégrale de T

III.A - Soit f un élément de E. En écrivant la formule de TAYLOR avec reste intégrale à l'ordre 1 entre 0 et x puis entre 0 et π, montrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$Tf(x) = \int_0^{\pi} k(x,t)f(t)dt \text{ , où}$$

$$k(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t(\pi - x)}{\pi} & \text{si} \quad 0 \le t \le x \\ \dfrac{x(\pi - t)}{\pi} & \text{si} \quad 0 \le x < t \le \pi \end{cases}$$

III.B - Montrer que k est l'unique fonction définie sur le carré $[0, \pi] \times [0, \pi]$ séparément continue en x et en t satisfaisant à la condition

$$Tf(x) = \int_0^{\pi} k(x,t)f(t)dt \text{ pour tout } f \in E \text{ et pour tout } x \in [0, \pi].$$

III.C -

III.C.1) Démontrer que la fonction k admet un maximum M atteint en un point unique A de $[0, \pi] \times [0, \pi]$ et déterminer M et A (pour x fixé dans $[0, \pi]$, on pourra commencer par étudier la fonction $t \to k(x,t)$ sur $[0, \pi]$).

III.C.2) En déduire que, pour tout $f \in E$,

$$\|Tf\|_\infty \leq \frac{\pi}{4}\|f\|_1 . \qquad (1)$$

III.C.3) En considérant la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ où

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}t\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{2}{\pi}(\pi - t)\right)^n & \text{si } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$$

et en calculant $Tf_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\|f_n\|_1$ montrer que l'inégalité (1) ne peut être améliorée.

III.D -

III.D.1) Prouver que, pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0, \pi]$,

$$|Tf(x)| \leq \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}}\|f\|_2 .$$

Conclure que

$$\|Tf\|_\infty \leq \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}}\|f\|_2 .$$

III.D.2) Soient f un élément de E et $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0 .$$

Prouver que la suite $(T\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers la fonction Tf.

III.D.3) Application : prouver que, pour tout $f \in E$,

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(f|s_n)s_n$$

et que la série du second membre converge normalement sur $[0,\pi]$.

En déduire que pour tout couple (x,t) de points de $[0,\pi]$,

$$k(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)\sin(nt)}{n^2} .$$

III.D.4) Déduire de la question précédente que pour tout $f \in E$, $\|Tf\|_2 \leq \|f\|_2$ et préciser les fonctions pour lesquelles il y a égalité.

III.E -

III.E.1) A l'aide du II.F donner une nouvelle expression de Tf comme somme d'une série de fonctions.

III.E.2) En déduire une nouvelle écriture de k comme somme d'une série de fonctions, en utilisant la famille (c_n).

Partie IV - La suite des itérés de l'endomorphisme T

On définit la suite $(T^n)_{n\geq 1}$ par la condition initiale $T^1 = T$ et la relation de récurrence

$$T^{n+1} = T^n \circ T .$$

IV.A - On pose, pour tout $f \in E$ et tout $n \geq 1$,

$$T_n f = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} (f|s_p) s_p .$$

IV.A.1) Démontrer que la série du second membre converge normalement sur l'intervalle $[0,\pi]$.

IV.A.2) Prouver que $T^n f = T_n f$, pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.B - Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de T^n.

IV.C -

IV.C.1) Soit f un élément de E. Montrer que la suite de fonctions $(T^n f)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction que l'on déterminera ;

(il pourra être utile d'étudier le comportement de la suite

$$\left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} \right)_{n\geq 1}$$ lorsque n augmente indéfiniment).

IV.C.2) Donner l'expression explicite de la limite de $(T^n f)$ lorsque f est la fonction définie au I.A.1).

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Nota : les trois parties du problème peuvent être abordées indépendamment.

Partie I - Propriétés de la transformée de Legendre

Dans toute la partie I - , I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, définie sur I. On note $J(f)$ l'ensemble des réels p tels que la fonction définie sur I par $x \mapsto (px - f(x))$ soit majorée ; si $J(f) \neq \varnothing$, on définit la fonction g sur $J(f)$ par :

$$\forall p \in J(f),\ g(p) = \sup_{x \in I} (px - f(x)) \quad .$$

La fonction g est appelée la transformée de Legendre de f ; on note $g = L(f)$.

I.A - Exemples

Calculer la transformée de Legendre $g = L(f)$ (en précisant l'ensemble $J(f)$) et tracer le graphe de g, dans les cas suivants :

I.A.1) $f(x) = kx^2$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$; $I = \mathbb{R}$.

I.A.2) $f(x) = e^x$; $I = \mathbb{R}$.

I.A.3) $f(x) = \arctan(x)$; $I = \mathbb{R}$.

I.B - Etude générale

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On suppose que $J(f)$ est non vide.

I.B.1) Montrer que $J(f)$ est un intervalle : on montrera que, si a et b sont dans $J(f)$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $ta + (1-t)b$ appartient à $J(f)$.

I.B.2) Montrer que $g = L(f)$ est convexe sur $J(f)$, c'est-à-dire :
$\forall (a, b) \in J(f) \times J(f)$, $\forall t \in [0, 1]$, $g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + (1-t)g(b)$.

I.B.3) Que peut-on dire de la monotonie de $g = L(f)$ dans les cas suivants :

a) $I \subset \mathbb{R}^+$

b) $I \subset \mathbb{R}^-$.

I.C - Étude d'un cas particulier

Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle I, telle que : $\forall x \in I, f''(x) > 0$.

Filière PC

On sait que $f'(I)$ est un intervalle ; on note α et β ses extrémités et l'on suppose $\alpha < \beta$ (on peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$).

I.C.1) Montrer que $J(f)$ contient l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ et donner l'expression de g sur $]\alpha, \beta[$ en fonction de f et $f'^{[-1]}$ (fonction réciproque de la fonction f'). Pour $p \in]\alpha, \beta[$, on note $x(p)$ l'unique point de I tel que : $g(p) = px(p) - f(x(p))$.

I.C.2) Pour $p \in]\alpha, \beta[$, calculer $g'(p)$ au moyen de $x(p)$.

I.C.3) Montrer que, $\forall p \in]\alpha, \beta[$, la droite D_p d'équation $y = px - g(p)$ est tangente au graphe de la fonction f.

I.C.4) Soit $H = \{h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / (\forall x \in \mathbb{R}\ h''(x) > 0) \text{ et } h'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\}$. Montrer que:

a) $L(H) \subset H$.

b) $\forall h \in H$, $L(L(h)) = h$.

c) L est une bijection de H sur H.

Partie II - Généralisation aux fonctions de plusieurs variables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. E désigne l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \ ;$$

si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, on note X le vecteur colonne associé $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ainsi, si Y est le vecteur colonne associé à $y \in E$, $\langle x, y \rangle = {}^tXY$.

Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $p \in E$, l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \langle p, x \rangle - f(x)$, soit majorée ; on définit alors la transformée de Legendre de f, notée $L(f)$, comme étant l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $L(f) : p \mapsto \sup_{x \in E} (\langle p, x \rangle - f(x))$.

Dans la suite de cette partie II, f est définie par $f(x) = {}^tXAX$, où A est une matrice carrée réelle d'ordre n, symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

II.1) Soit $p \in E$ fixé. On pose $F(x) = \langle p, x\rangle - f(x)$.

Démontrer qu'il existe une base $B = (e_i)_{1 \le i \le n}$ de E telle que :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \text{, on a } F(x) = F_1(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (q_i y_i - \lambda_i y_i^2)$$

où les q_i et les λ_i sont des réels à déterminer.

Montrer que la fonction F est majorée sur E et atteint sa borne supérieure.

On en déduit en particulier que la transformée de Legendre de f est bien définie.

II.2) Calculer $g = L(f)$, la transformée de Legendre de f et montrer qu'il existe une matrice carrée réelle symétrique B, d'ordre n, qu'on exprimera en fonction de A telle que

$$\forall p \in E,\ g(p) = {}^tPBP,$$

où P est le vecteur colonne associé à p.

Calculer la fonction $h = L(L(f))$.

II.3)

a) Montrer que $\forall p \in E, \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(tp) = t^2 f(p)$,

b) Montrer que :

$$\forall p \in E,\ \sum_{1=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(p) = 2f(p).$$

Indication : on pourra calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto f(tp)$.

II.4) En utilisant la question II.3-b), déterminer pour tout $p \in E$, un vecteur $x(p) \in E$ tel que $g(p) = f(x(p))$.

Indication : on pourra utiliser $\xi \in E$ tel que $(grad\ F)(\xi) = 0$.

Partie III - Problème d'optimisation

E désigne l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni du produit scalaire canonique, noté $\langle , \rangle$ et de la norme associée, notée $\| \ \|$. Si $x \in E$, on note X le vecteur colonne associé et par extension $\|X\| = \|x\| = \sqrt{{}^tXX}$.

Soit p un vecteur donné de E, A une matrice carrée réelle d'ordre n, symétrique et ayant toutes ses valeurs propres positives ou nulles.

On note F l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \langle p, x\rangle - {}^tXAX = {}^tPX - {}^tXAX .$$

Une partie C de E est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in C^2 , \ \forall t \in [0, 1] , \ tx + (1-t)y \in C .$$

Soit C une partie fermée, non vide, convexe, de E.

Lorsque F est majorée sur C, on s'intéresse à M, ensemble — éventuellement vide — des points de C où l'application F restreinte à C atteint sa borne supérieure :

$$M = \{x \in C \mid F(x) = \sup_{y \in C} F(y)\}.$$

III.A - Convexité de M

III.A.1) Soit x_1 et x_2 deux points de C et pour $t \in [0, 1]$, $x = tx_1 + (1-t)x_2$.

Montrer que : $F(x) = (1-t)F(x_2) + tF(x_1) + t(1-t)\ {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)$.

III.A.2) On suppose M non vide. Montrer que M est convexe.

III.B - Cas particulier.

Dans cette seule question III.B, on suppose de plus que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

III.B.1) Démontrer qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in E \ {}^tXAX \geq k\,{}^tXX .$$

III.B.2) Montrer que M est non vide.

III.B.3) Montrer que M ne contient qu'un élément.

III.C - Une caractérisation des points de M

III.C.1) Avec les mêmes notations qu'au III.A.1, montrer que :

$$F(x) - F(x_2) = -t^2 .\ {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) + t .\ {}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2) .$$

III.C.2) Montrer l'équivalence :

$$x \in M \Leftrightarrow \left(x \in C \ \text{ et } \forall y \in C, {}^t(P - 2AX)(Y - X) \leq 0 \right).$$

Donner l'interprétation de la caractérisation trouvée au moyen du gradient de F au point x.

III.D - Cas où C est borné

Dans cette question III.D, on suppose de plus que l'ensemble C est borné, contenu dans la boule fermée de centre O et rayon R.

III.D.1) Démontrer que M est non vide.

Trouver un exemple avec F non identiquement nulle où M a une infinité d'éléments.

III.D.2) Démontrer qu'il existe un réel α tel que : $\forall x \in E, \quad \|AX\| \leq \alpha \|X\|$.

III.D.3) Soit r un nombre réel strictement positif tel que :

$$r > \sup\{6\alpha R^2, 2R(\|p\| + 2\alpha R)\}$$

(où α est défini au III.D.2).

On se propose de construire par récurrence des suites (u_m), (v_m) de points de C et une suite réelle (t_m) telles que si U_m (resp. V_m) est le vecteur colonne associé à u_m (resp. v_m), on a pour tout $m \in \mathbb{N}$:

i) $\forall x \in C, \ {}^t(2AU_m - P)V_m \leq {}^t(2AU_m - P)X$;

ii) $t_m = \frac{1}{r} \ {}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m)$;

iii) $u_{m+1} = u_m + t_m(v_m - u_m)$.

On suppose donné $m \in \mathbb{N}$ et $u_m \in C$.

a) Montrer l'existence de $v_m \in C$ vérifiant la relation i).

b) Montrer que t_m défini par la relation ii) est dans l'intervalle $[0, 1]$.

c) Montrer que u_{m+1} défini par la relation iii) est dans C.

Déduire des questions a), b) et c) que pour tout $u_0 \in C$, les relations i), ii) et iii) permettent de définir les suites (u_m), (v_m) et (t_m).

III.D.4) Montrer que, si (u_m) est la suite définie à la question III.D.3), la suite $(F(u_m))$ est croissante et convergente.

Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite (u_m) qui converge vers un élément de M.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Le but de ce problème est de définir et d'étudier, de différentes manières, la constante d'Euler. Les quatre parties proposées sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres.

Partie I -

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i},\ u_n = S_n - \ln n,\ v_n = S_{n-1} - \ln n .$$

I.A - Montrer que : $\forall x \in [0, 1[,\ x + \ln(1-x) \leq 0,\ x - \ln(1+x) \geq 0$.

I.B - Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera γ leur limite commune.

Montrer, de plus, que : $\forall n \geq 2, v_n \leq \gamma \leq u_n$.

I.C - En déduire une valeur approchée de γ à 10^{-1} près.

I.D - Posons : $\forall n \geq 2$,

$$w_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n} .$$

Montrer que la série de terme général w_n est convergente et que l'on a :

$$u_p - \gamma = \sum_{n=p+1}^{n=+\infty} w_n .$$

I.E - Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout réel non nul t, on pose :

$$f(t) = \frac{1}{t} .$$

I.E.1) Soit g la fonction affine définie sur l'intervalle $[k-1, k]$ par :

$g(k-1) = f(k-1)$, $g(k) = f(k)$.

Calculer :

$$\int_{k-1}^{k} g(t)dt .$$

Filière TSI

I.E.2) Montrer qu'il existe une et une seule fonction h, affine sur chaque intervalle $]-\infty, k-\frac{1}{2}[$, $[k-\frac{1}{2}, +\infty[$, telle que :

$$h(k-1) = f(k-1),\ h(k) = f(k),\ h'(k-1) = f'(k-1),\ h'(k) = f'(k).$$

I.E.3) Que peut-on dire de la continuité de h ?

I.E.4) Calculer :

$$\int_{k-1}^{k} h(t)dt .$$

I.F - Montrer que :

$$\forall t \in [k-1, k],\ h(t) \le f(t) \le g(t) .$$

I.G - Etablir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \le \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \le \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} .$$

I.H - En déduire un encadrement de $u_n - \gamma$, pour $n \ge 2$.

I.I - Donner une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Partie II -

II.A - Montrer l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt .$$

II.B - En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x} dx$$

$$u_n = \int_0^1 \left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\frac{dx}{x} - \int_1^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{dx}{x} .$$

II.C - Démontrer les inégalités suivantes :

II.C.1) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$1 + x \leq e^x$.

II.C.2) $\forall x \in [0, n]$,

$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

II.C.3) $\forall x \in [0, n]$,

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

II.C.4) $\forall x \in [0, n]$,

$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$.

N.B. : on pourra commencer par démontrer que :

$\forall u \in [0, 1], (1-u)^n - 1 + nu \geq 0$.

II.C.5) $\forall x \in [0, n]$,

$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x}$.

II.D - Montrer que l'intégrale

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

converge et que l'on a :

$\gamma = \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

Partie III -

On pose : $\forall x > 0$,

$\varphi(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}$.

III.A - Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.B - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi(x) dx$ est convergente.

III.C - On pose, pour $n \geq 2$:

$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$.

Montrer que $I_n(a)$ existe, pour tout $a > 0$, et que l'on a :

$$\forall a > 0,\ I_n(a) = \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x} dx = \ln n - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx .$$

III.D - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ est convergente et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln n .$$

III.E - Montrer que :

$$v_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \varphi(x) dx .$$

III.F - En déduire que :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi(x) dx .$$

Partie IV -

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \phi(P)(X) = P(X+1) - P(X) .$$

Soit ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$, considérée comme endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV.A - Déterminer $\mathrm{Ker}\,\phi$, $\mathrm{Ker}\,\phi_n$, $\mathrm{Im}\,\phi_n$, $\mathrm{Im}\,\phi$.

IV.B - Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P_p de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\phi(P_p)(X) = X^p,\ P_p(0) = 0 .$$

IV.C - Soit, pour $p \geq 1$, $Q_p(X) = P'_p(X) - P'_p(0)$.

IV.C.1) Calculer $\phi(Q_p)$.

IV.C.2) En déduire l'égalité :

$$Q_p(X) = p \cdot P_{p-1}(X),\ \forall p \geq 1 .$$

IV.D - Déterminer les polynômes P_p, pour $0 \leq p \leq 5$.

IV.E - Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1],\ -\frac{1}{128} \leq P_5(x) \leq 0 .$$

IV.F - Pour k , $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_p(k) = \int_0^1 \frac{pP_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}} dt .$$

IV.F.1) Déterminer une relation de récurrence entre $I_p(k)$ et $I_{p+1}(k)$.

IV.F.2) Calculer $I_1(k)$.

IV.F.3) Donner une expression de $I_6(k)$ en fonction de $I_1(k)$.

IV.F.4) Etablir les inégalités suivantes :

$$-\frac{1}{128}\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(1+k)^6}\right) \leq I_6(k) \leq 0 .$$

IV.F.5) A l'aide de la question I.D, en déduire un encadrement de $u_n - \gamma$.

IV.F.6) Donner les dix premières décimales de γ .

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ désigne le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté à son repère orthonormé canonique $(O;\vec{I},\vec{J})$. On note i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Si $z \in \mathbb{C}$, on note $M(z)$ l'image de z dans $\mathcal{E}$. Si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on note $M_n(K)$ l'espace vectoriel sur K des matrices de taille (n,n) à coefficients dans K et $S_n(K)$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques. On note $\mathbb{C}^2$ le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel des vecteurs colonnes complexes de taille $(2,1)$.

Enfin, si $M = \langle m_{i,j} \rangle_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est une matrice carrée à coefficients complexes de taille (n,n), on note $\mathrm{tr}(M)$ la trace, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

Le plus souvent, il sera possible, si nécessaire, d'admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

Partie I - Triplets harmoniques.

I.A -

I.A.1) Déterminer la dimension de $S_2(\mathbb{C})$; on prouvera soigneusement le résultat annoncé.

Soit M et N inversibles et dans $S_2(\mathbb{C})$, on dit que M est **harmonique** relativement à N s'il existe une base (X,X') de $\mathbb{C}^2$ telle que ${}^tXMX = {}^tX'MX' = 0$ et ${}^tXNX' = 0$.

I.A.2) Soit M et N deux matrices inversibles de $S_2(\mathbb{C})$ et P une matrice inversible de $M_2(\mathbb{C})$. Montrer que ${}^tPMP$ et ${}^tPNP$ sont deux matrices inversibles de $S_2(\mathbb{C})$.

Si, de plus, M est harmonique relativement à N, montrer que ${}^tPMP$ est harmonique relativement à ${}^tPNP$.

On suppose dans les deux questions qui suivent que M et N sont inversibles et dans $S_2(\mathbb{C})$, avec

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Filière TSI

I.B -

I.B.1) On suppose que M est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Montrer que $b \neq 0$; on pose $I = \{X \in \mathbb{C}^2 \mid {}^tXMX = 0\}$.

Montrer que I est la réunion de deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, puis décrire les bases (X,X') de $\mathbb{C}^2$ telles que X et X' soient dans I. En déduire que M est harmonique relativement à N si et seulement si $\alpha c = 2b\beta$.

I.B.2) On suppose que M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \text{ avec } a \neq 0.$$

On note d une racine carrée de $b^2 - ac$. En utilisant les scalaires a, b, c, d déterminer $\{X \in \mathbb{C}^2 \mid {}^tXMX = 0\}$. En s'inspirant du I.B.1, montrer que M est harmonique relativement à N si et seulement si $\alpha c + \gamma a = 2\beta b$.

I.B.3) En conclure que M est harmonique relativement à N si et seulement si N est harmonique relativement à M.

I.C - Montrer que M est harmonique relativement à N si et seulement si $\mathrm{tr}(N^{-1}M) = 0$.

Vu la symétrie de la propriété, si M est harmonique relativement à N, nous dirons jusqu'à la fin de cette partie que M et N sont **conjuguées harmoniques**.

I.D - Pour $N \in S_2(\mathbb{C})$ donnée, avec N inversible, on pose

$$H = \left\{ M \in S_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(N^{-1}M) = 0 \right\}.$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $S_2(\mathbb{C})$; en déterminer la dimension ; déterminer $H \cap \mathrm{Vect}(N)$; donner un supplémentaire de H dans $S_2(\mathbb{C})$.

I.E - Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, M_2, \ldots, M_k$ dans $S_2(\mathbb{C})$, inversibles, telles que M_i et M_j soient conjuguées harmoniques chaque fois que $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$, $i \neq j$. Une telle famille sera dite **harmonique**.

I.E.1) Dans une famille harmonique, montrer qu'aucune matrice n'est combinaison linéaire des autres.

I.E.2) En conclure que k est inférieur ou égal à 3 et que tout triplet harmonique, c'est-à-dire toute famille harmonique à trois éléments, est une base de $S_2(\mathbb{C})$.

La fin de cette partie consiste en la détermination de l'ensemble des triplets (A, B, C) harmoniques.

I.F - On suppose dans cette question que A est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda \neq 0 \text{ et } \mu \neq 0.$$

Montrer que, pour que (A, B, C) soit harmonique, il est nécessaire que B et C soient respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta \\ \beta & -\alpha\mu \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha'\lambda & \beta' \\ \beta' & -\alpha'\mu \end{pmatrix}.$$

Inversement, A, B, C étant de cette forme, déterminer une CNS sur α, α', β, β' pour que le triplet (A, B, C) soit harmonique. Si A est de la forme ci-dessus, en déduire tous les couples (B,C) tels que (A, B, C) soit harmonique. Dans le cas particulier où les matrices A, B, C sont à coefficients réels, déterminer le signe de $\det B \times \det C$ (on distinguera les cas $\det A > 0$ et $\det A < 0$).

I.G - Soit (A_0, B_0, C_0) un triplet harmonique et $P \in M_2(\mathbb{C})$, avec P inversible. Montrer que le triplet $({}^tPA_0P, {}^tPB_0P, {}^tPC_0P)$ est harmonique. En déduire une description de l'ensemble de tous les triplets harmoniques (on utilisera sans démonstration le résultat suivant : si $A \in S_2(\mathbb{C})$, il existe P inversible de $M_2(\mathbb{C})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale). Dans le cas où $A \in S_2(\mathbb{R})$, dire pourquoi on peut prendre $P \in M_2(\mathbb{R})$ et ${}^tPAP = D$ diagonale réelle.

Dans le cas particulier où les matrices A, B, C sont à coefficients réels, montrer que A, B, C ne peuvent avoir toutes trois un déterminant < 0.

I.H - Déterminer $\{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \forall S \in S_2(\mathbb{C}), \operatorname{tr}(SM) = 0\}$.

Soit alors (A, B, C) un triplet harmonique quelconque ; montrer qu'on peut le compléter en une base (A, B, C, D) de $M_2(\mathbb{C})$, où D est inversible et vérifie

$$\operatorname{tr}(A^{-1}D) = \operatorname{tr}(B^{-1}D) = \operatorname{tr}(C^{-1}D) = 0.$$

Partie II - Propriétés géométriques

II.A - On se limite dans les questions qui suivent au cas particulier du triplet harmonique (A, B, C) suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},\ \text{où } b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

On considère les deux équations suivantes :

$$z^2 + 2bz + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$bz^2 + 2z + b = 0 \qquad (2)$$

II.A.1) Montrer que ni (1) ni (2) n'ont 1 ou -1 comme solution ; montrer que (1) et (2) n'ont pas de solution commune.

On note d une racine carrée de $b^2 - 1$, et on pose

$$z_1 = -b + d,\ z'_1 = -b - d,\ z_2 = \frac{-1 + id}{b},\ z'_2 = \frac{-1 - id}{b}$$

(ce sont les solutions respectives de (1) et (2)).

II.A.2) Montrer que :

$$\forall i \in \{1,2\},\ \frac{z_i - 1}{z_i + 1} = -\frac{z'_i - 1}{z'_i + 1}.$$

Exprimer $(z_2 - z_1)(z'_2 - z'_1) + (z_2 - z'_1)(z'_2 - z_1)$ à l'aide de

$p_1 = z_1 z'_1$, $p_2 = z_2 z'_2$, $s_1 = z_1 + z'_1$, et $s_2 = z_2 + z'_2$.

En conclure que : $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - z'_1} = -\dfrac{z'_2 - z_1}{z'_2 - z'_1}$.

II.A.3) On définit $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ par $\varphi(z) = \dfrac{z - i}{1 - zi}$.

Déterminer $\varphi(\varphi(z))$ quand cette expression a un sens.

II.A.4) Simplifier l'expression $b(\varphi(z))^2 + 2\varphi(z) + b$ pour $z \neq -i$.

En conclure que $z \neq -i$ est solution de (1) si et seulement si $\varphi(z)$ est solution de (2).

II.B - On note respectivement P, P', Q, Q', R, R' les images des complexes 1, -1, z_1, z'_1, z_2, z'_2 dans $\mathfrak{E}$.

II.B.1) Montrer qu'un cercle (C) de $\mathfrak{E}$ passe par P et P' si et seulement s'il a une équation de la forme

$$F(x, y) = z\bar{z} - t\frac{z - \bar{z}}{2i} - 1 = x^2 + y^2 - ty - 1 = 0 \text{ où } t \in \mathbb{R} \text{ et où on a posé}$$

$z = x + iy$.

Si $x+iy \in \mathbb{C}^*$, on pose $X+iY = \dfrac{1}{x+iy}$. Donner une relation simple entre $F(x,y)$ et $F(X,Y)$.

En conclure que pour $z \neq 0$ $M(z) \in C$ si et seulement si $M(\frac{1}{z}) \in C$.

II.B.2) Montrer que P, P' et Q ne sont pas alignés. En choisissant pour C le cercle circonscrit au triangle $PP'Q$ montrer que P, P', Q, Q' sont sur un même cercle C_1, et de même montrer que P, P', R, R' sont sur un même cercle C_2.

II.B.3) On définit $\psi : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ par $\psi(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

Déterminer le polynôme unitaire de degré 2, noté q_1, dont les zéros sont $\psi(z_1)$ et $\psi(z'_1)$ et celui, noté q_2, dont les zéros sont $\psi(z_2)$ et $\psi(z'_2)$ (chacun de ces polynômes est de la forme $z^2 + w_i = 0$, où le coefficient w_i est fonction de b seul).

En déduire que les images de ces quatre complexes sont les sommets d'un carré Γ de centre O.

Montrer que, les quatre points $M(\psi(z_i))$ et $M(\psi(z'_i))$, $i \in \{1,2\}$ sont situés sur un même cercle dont une équation est $z\bar{z} - e^2 = 0$ pour un certain réel e. En déduire que, sauf dans un cas particulier que l'on mettra en évidence, les quatre points Q, Q', R, R' sont situés sur un même cercle.

II.B.4) On pose $\omega = \dfrac{z_1 + \bar{z}_1}{1 + z_1\bar{z}_1}$ et $T = M(\omega)$.

Déterminer un réel λ tel que $\overrightarrow{TQ'} = \lambda \overrightarrow{TQ}$. En déduire le point d'intersection des droites (PP') et (QQ'). Montrer que les droites (PP'), (QQ') et (RR') sont concourantes (on pourra regarder ce que devient ω lorsque l'on remplace z_1 par $\varphi(z_1)$, et remarquer que $\varphi(z_1) \in \{z_2, z'_2\}$).

Partie III - Cas des matrices (3,3)

On note $S'_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $S_3(\mathbb{R})$. Désormais, on ne considérera plus que des éléments de $S'_3(\mathbb{R})$. On dira que A et B sont conjuguées harmoniques si $\mathrm{tr}\,(A^{-1}B) = \mathrm{tr}\,(B^{-1}A) = 0$.

On cherche à discuter l'existence, pour $A \in S'_3(\mathbb{R})$ donnée, d'une matrice $B \in S'_3(\mathbb{R})$ telle que A et B soient conjuguées harmoniques.

III.A - On donne pour les questions III.A.1, III.A.2, III.A.3, seulement,

$$A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}, \text{ avec } u, v, w \text{ réels non nuls, et on cherche } B, \text{ telle que } A$$

et B soient conjuguées harmoniques,sous la forme $\begin{pmatrix} au & b & c \\ b & dv & e \\ c & e & fw \end{pmatrix}$.

III.A.1) Écrire $\mathrm{tr}\,(A^{-1}B)$ à l'aide des coefficients de A et B.

Écrire, de même, $\mathrm{tr}\,(B^{-1}A)$ à l'aide des coefficients de A et B.

Montrer alors que $\mathrm{tr}\,(A^{-1}B) = \mathrm{tr}\,(B^{-1}A) = 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a + d = -f \\ ad = \dfrac{b^2}{uv} + \dfrac{c^2}{uw} + \dfrac{e^2}{vw} + f^2 \end{cases} \tag{3}$$

Les coefficients réels u, v, w, b, c, e, f étant donnés, montrer que l'existence d'une solution de (3) équivaut à

$$\frac{b^2}{uv} + \frac{c^2}{uw} + \frac{e^2}{vw} + \frac{3}{4}f^2 \leq 0\,.$$

III.A.2) Conclure quant à l'existence de B lorsque les valeurs propres de A sont de même signe.

III.A.3) Lorsque $uv < 0$, montrer qu'on peut choisir B vérifiant les propriétés imposées, avec de plus $c = e = 0$.

On n'oubliera pas de vérifier l'inversibilité de B.

III.A.4) A étant un élément donné de $S'_3(\mathbb{R})$, conclure quant à l'existence de $B \in S'_3(\mathbb{R})$ telle que A et B soient conjuguées harmoniques.

III.B - Exemple : on choisit les matrices A et B sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

où $\alpha > 0$ est un réel donné, les réels β et $\gamma > 0$ étant à déterminer.

III.B.1) Déterminer tous les couples (β,γ) tels que $\mathrm{tr}\,(A^{-1}B) = \mathrm{tr}\,(B^{-1}A) = 0$.

III.B.2) On choisit $(\beta,\gamma) = (\alpha\sqrt{3},\alpha\sqrt{2})$ et on pose $C = A^{-1}B$.

Montrer qu'il existe U inversible et D diagonale dans $M_3(\mathbb{C})$ telles que $C = UDU^{-1}$.

Peut-on choisir U et D réelles ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Pour tout entier naturel non nul n, on notera P_n le polynôme de Taylor d'ordre n de l'exponentielle au point 0 :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

On notera : $[\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \ldots, \lambda_{n,n}]$ un système de racines complexes de P_n. On remarquera qu'en posant

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n,k} = \dfrac{\lambda_{n,k}}{n}$,

le système $[z_{n,k}]_{1 \leq k \leq n}$ est un système de racines du polynôme

$$\Pi_n = P_n(nX). \qquad (1)$$

Le but de ce problème est d'établir les deux résultats suivants, auxquels on donnera un sens précis et dont la preuve fera l'objet des parties II et III du problème, qu'on peut conjecturer à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

Lorsque $n \to \infty$, les nombres complexes $\xi_{n,k} = z_{n,k} e^{-z_{n,k}}$ tendent à "s'accumuler" sur le cercle de centre 0 et de rayon $1/e$.

Les nombres complexes $\xi_{n,k}$ tendent à se répartir "régulièrement" sur le cercle précédent. Dans la dernière partie on applique ce résultat à l'obtention d'un équivalent du nombre de racines de P_n dont la partie réelle est positive.

Enfin quelques rappels dont la preuve n'est pas demandée.

1- Une suite extraite (ou sous suite) d'une suite (z_n) de nombres complexes est une suite de la forme (z_{p_n}) où (p_n) est une suite strictement croissante d'entiers [*on pourra noter* p_n, $p(n)$ *si l'on préfère*].

2- De toute suite bornée de nombres réels ou complexes on peut extraire une suite convergente.

3- (Convergence dominée pour les séries) Soit $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, une suite double de nombres complexes. On suppose qu'existe une suite (v_k) de réels positifs telle que :

Pour tout couple (n, k), $|u_{n,k}| \leq v_k$.

Pour tout entier k, la suite n a $u_{n,k}$ admet une limite l_k.

La série de terme général v_k converge.

Filière MP

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{k \geq 0}^{\cdot} u_{n,k}$ converge et la série $\sum_{k \geq 0}^{\cdot} l_k$ converge

et l'on a : $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} l_k$

Les trois premières parties sont indépendantes entre elles sauf les questions II.E.3 et III.C.1.

Partie I - Étude d'une courbe plane

I.A - Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$). Déterminer, en fonction de ρ et de θ une forme trigonométrique du nombre complexe $\xi = ze^{-z}$.

I.B - Démontrer que la fonction u, définie sur $]0, 1]$ par :

$$u(t) = \frac{1 + \ln t}{t}$$

est un homéomorphisme croissant de $]0, 1]$ sur $]-\infty, 1]$ dont la fonction réciproque est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

I.C - En déduire l'existence d'une fonction θ a $r(\theta)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel θ, $r(\theta) \in]0, 1]$ et :

$$r(\theta) e^{-r(\theta)\cos\theta} = \frac{1}{e}$$

I.D - Exprimer de manière simple $r(0)$, $r(\pi/2)$. Donner une valeur approchée à 10^{-6} près, en justifiant l'algorithme utilisé, de la constante $r(\pi)$.

I.E - Montrer que r est une fonction continue, 2π-périodique et paire ; démontrer qu'elle est de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$ et que, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 \sin\theta}{r\cos\theta - 1}$$

I.F - Donner un équivalent simple en h de la fonction v définie par h a $v(h) = 1 - u(1-h)$ lorsque $h \to 0$ par valeurs supérieures (u est défini au I.B). Grâce à une expression de $1 - \cos\theta$ à l'aide de $u(r(\theta))$, en déduire que, lorsque $\theta \to 0$ par valeurs supérieures :

$$r(\theta) = 1 - \theta + o(\theta)$$

Prouver que θ a $r(\theta)$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

I.G - Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct ; dessiner sommairement la courbe Γ dont une équation polaire est $\rho = r(\theta)$. Quelle est l'image de Γ par la transformation complexe z a ze^{-z} ?

Partie II - Étude des modules des racines

n désigne toujours un entier naturel non nul.

II.A - Prouver que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, les $\lambda_{n,k}$ sont deux à deux distincts. Il en est donc de même des $z_{n,k}$.

II.B - Pour p entier naturel, on pose :

$$q_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \dfrac{n!}{n^p (n-p)!} = \displaystyle\prod_{j=0}^{p-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) & \text{si } 1 \le p \le n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

On considère le polynôme Q_n défini par :

$$Q_n(X) = \frac{n!}{n^n} X^n \Pi_n\left(\frac{1}{X}\right)$$

où Π_n a été défini par la formule (1). Montrer que

$$Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n} q_{n,p} X^p = \sum_{p=0}^{\infty} q_{n,p} X^p$$

Exprimer les racines de Q_n à l'aide des $z_{n,k}$.

II.C -

II.C.1) Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| \le r$:

$$\left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right| \le \sum_{p=0}^{\infty} (1 - q_{n,p}) r^p$$

Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|z|\le r} \left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right|$$

II.C.2) En déduire que, pour n assez grand, toute racine z de Q_n satisfait $|z| > r$ puis que pour tout $R > 1$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n > N$, on ait :

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\},\ |z_{n,k}| < R$$

II.D - On considère une suite (z_p) de nombres complexes qui converge vers un complexe z tel que $|z| \le 1$.

II.D.1) Déterminer la limite de la suite $(z_p e^{-z_p})$ si $Re(z) = 1$.

II.D.2) On suppose $Re(z) \neq 1$, déterminer la limite des suites de terme général :

$$\alpha_p = \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t}\, dt \text{ et } \beta_p = \left(\frac{p^p}{p!}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

puis la limite de la suite de terme général :

$$\left| \frac{p^p}{p!} \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t}\, dt \right|^{\frac{1}{p+1}}$$

II.E - Comportement asymptotique des $|\xi_{n,k}|$

II.E.1) Soit z une racine complexe du polynôme Π_p. Prouver la relation :

$$e^{-z} = (ze^{-z})^{p+1} \frac{p^p}{p!} \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{zt}\, dt \qquad (2)$$

(on pourra utiliser une formule de Taylor)

II.E.2) Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels et (z_{p_n}) une suite de complexes telle que, pour chaque entier n, z_{p_n} soit une racine de Π_{p_n}. On suppose de plus que cette suite converge vers un nombre complexe z. Montrer que $|z| \le 1$ et en déduire, à l'aide de la formule (2), que $\left|ze^{-z}\right| = \frac{1}{e}$.

II.E.3) Démontrer qu'en posant $\xi_{n,k} = z_{n,k} e^{-z_{n,k}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \left| |\xi_{n,k}| - \frac{1}{e} \right| = 0$$

(*on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente*).

Partie III - Répartition des arguments

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, non nul :

$$s_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} z_{n,k}^{p}$$

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}^{p} \text{ (toujours avec } \xi_{n,k} = z_{n,k} e^{-z_{n,k}})$$

On note $\rho_{n,k}$ le module de $\xi_{n,k}$ et $\phi_{n,k} \in \mathbb{R}$ l'un quelconque de ses arguments, de sorte que :

$$\xi_{n,k} = \rho_{n,k} e^{i\phi_{n,k}}$$

Enfin on rappelle que le polynôme Q_n et les $q_{n,p}$ ont été définis à la question II.B.

III.A - Démontrer, que la fonction f_n de la variable réelle x :

$$x \mapsto -\frac{Q'_n(x)}{Q_n(x)}$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et que :

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} s_{n,p+1} x^p$$

III.B - Majoration des $S_{n,p}$

III.B.1) Établir, pour $n \geq 1$, et $p \geq 0$, la relation :

$$-(p+1) q_{n,p+1} = \sum_{i=0}^{p} q_{n,i}\, s_{n,p+1-i}$$

III.B.2) Calculer $s_{n,1}$. Prouver, par récurrence sur l'entier p, que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$:

$$|s_{n,p}| \leq 3^p$$

en déduire :

$$|S_{n,p}| \leq 3^p e^{3p}$$

III.C - Équirépartition des $\phi_{n,k}$

III.C.1) Soit $p \in \mathbb{Z}$ non nul. Prouver que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ip\phi_{n,k}} = 0$$

III.C.2) En déduire que, si f est une fonction 2π-périodique, continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, d\phi$$

Partie IV - Étude des racines de partie réelle positive

IV.A - Notons $r_{n,k}$ le module de $z_{n,k}$ et $\theta_{n,k}$ son argument tel que $-\pi \le \theta_{n,k} < \pi$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{1\le k\le n} \left| r_{n,k} - r(\theta_{n,k}) \right| \right)$$

(on pourra raisonner comme à la question II.E.3).

Comment interpréter ce résultat qualitativement ?

IV.B - Déduire de la question III.C.2 et de la précédente que, si f est une fonction 2π-périodique, continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f[\theta_{n,k} - r(\theta_{n,k}) \sin\theta_{n,k}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, d\phi$$

IV.C - On note N_n le nombres de racines de P_n dont la partie réelle est positive. Démontrer que lorsque $n \to \infty$:

$$N_n \sim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e\pi} \right) n$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Le but du problème est d'établir quelques propriétés des cônes et coniques dans le cadre de la théorie des formes quadratiques.

Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$. Si E est un espace vectoriel réel, on désigne par $Q(E)$ l'espace vectoriel réel des formes quadratiques définies sur E. Si $q \in Q(E)$, on désigne par C_q *le cône isotrope de* q, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $q(x) = 0$.

Les parties sont largement indépendantes et de difficulté croissante. La résolution des questions préliminaires **A** et **B** n'est pas indispensable pour la suite du problème.

Question préliminaire A.

Soit E_2 un plan vectoriel réel et $q \in Q(E_2) - \{0\}$; en vue de décrire C_q on introduit une base $B = (i, j)$ de E_2 et on désigne par

$$M = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

la matrice de q relativement à B.

Quelle est la signature de q ? Montrer que C_q est réduit à $\{0\}$ ou est la réunion d'un ensemble fini de droites, dont on précisera le cardinal. On utilisera pour toute cette question une décomposition de Gauss et la discussion portera entre autres sur le signe de $rt - s^2$.

Partie I - Cônes contenant cinq vecteurs donnés

On rapporte l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$ à sa base orthonormale canonique $B_c = (i, j, k)$ et on considère deux vecteurs e et e' de composantes respectives (a, b, c) et (a', b', c'), avec $abca'b'c' \neq 0$. On note $Q_{e,e'}$ l'ensemble des formes quadratiques $q \in Q(\mathbb{R}^3)$ telles que C_q contienne i, j, k, e et e' ; $Q_{e,e'}$ est un sous-espace vectoriel de $Q(\mathbb{R}^3)$ (on ne demande pas de le vérifier).

I.A - Soit $q \in Q(\mathbb{R}^3)$; donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la matrice de q relativement à B_c pour que C_q contienne i ; en déduire que C_q contient i, j et k si, et seulement si, il existe α, β, γ réels tels que :

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad q(X) = \alpha yz + \beta zx + \gamma xy. \qquad (1)$$

Filière MP

I.B - On désigne par l et l' les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ qui à un triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$ associent respectivement : $l(\tau) = \alpha bc + \beta ca + \gamma ab$

et $l'(\tau) = \alpha b'c' + \beta c'a' + \gamma a'b'$.

I.B.1) Donner une relation entre le rang de la famille (l,l') et la dimension de $Q_{e,e'}$.

I.B.2) Lorsque cette dimension vaut 1, montrer que tous les éléments non nuls de $Q_{e,e'}$ ont le même cône isotrope.

I.B.3) À l'aide de Vect(e,e'), interpréter la condition (2) suivante :

$$(bc' - b'c)(ca' - c'a)(ab' - a'b) \neq 0 \qquad (2)$$

On suppose (2) vérifiée. Déterminer une base de $Q_{e,e'}$. Déterminer le rang des formes quadratiques non nulles de $Q_{e,e'}$. Montrer que les éléments de $Q_{e,e'}$ ont une signature différente de $(3,0)$. Quelles sont les valeurs possibles de cette signature ?

Dans la suite on sera amené à envisager des propriétés affines de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments seront alors considérés comme des points. En particulier le point O sera le vecteur $(0, 0, 0)$.

Dans toute la suite du problème, on désigne par P_0 et P_1 les plans d'équations respectives $x + y + z = 0$ et $x + y + z = 1$ et,
pour tout triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on désigne par q_τ la forme quadratique qui à $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy$.

Partie II - Nature d'une section conique

Question préliminaire B

Déterminer les éléments communs aux cônes isotropes de toutes les formes quadratiques du type q_τ.

On fixe maintenant, pour toute la partie II, le triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$ non nul et on désigne pour simplifier par C_τ le cône isotrope de q_τ.

II.A - Étude de $C_\tau \cap P_0$

Justifier l'existence d'une base $B_0 = (I, J)$ de P_0 qui soit une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et telle que la restriction $q_\tau|_{P_0}$ ait dans B_0 une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{bmatrix}$$

Discuter selon α' et β' la nature de $C_\tau \cap P_0$.

II.B - Étude de $C_\tau \cap P_1$

II.B.1) Soit B_0 comme en II.A, et $B = (I, J, K)$ qui la complète en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, les coordonnées du point courant M de $\mathbb{R}^3$ seront désignées par X, Y et Z.

a) Montrer que, relativement au repère $(O\,;\,B)$, P_1 a une équation de la forme $Z = z_0$ où z_0 prend l'une ou l'autre de deux valeurs que l'on précisera.

b) De quelle forme est la matrice de q_τ relativement à B ? En conclure que si $(\alpha', \beta') = (0, 0)$, alors $\mathrm{rg}(q_\tau) \leq 2$. En déduire que $(\alpha', \beta') = (0, 0) \Rightarrow \alpha\beta\gamma = 0$.

On supposera désormais que $\alpha\beta\gamma \neq 0$, de sorte que $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$.

c) Montrer que, relativement au repère $(O\,;\,B)$, $C_\tau \cap P_1$ est définie par un système du type :

$$\begin{cases} \alpha' X^2 + \beta' Y^2 + \gamma' X + \delta' Y + \varepsilon' = 0 \\ Z = z_0 \end{cases}$$

En déduire que $C_\tau \cap P_1$ est une conique dont on précisera le genre en fonction de α' et β'.

II.B.2) Mettre en relation le genre de $C_\tau \cap P_1$ et la nature de $C_\tau \cap P_0$.

Partie III - Sections circulaires d'un cône

Soient a, b, c des scalaires non nuls, Π_0 et Π_1 les plans d'équations respectives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \text{ et } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Soit τ un triplet non nul et q_τ la forme quadratique qui lui est associée ; C_τ en désigne le cône isotrope ; q_0 désigne enfin l'application carré scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$.

III.A - Montrer que si $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ vérifient

$$\frac{\alpha bc}{b^2 + c^2} = \frac{\beta ac}{a^2 + c^2} = \frac{\gamma ab}{a^2 + b^2} \qquad (3)$$

il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $l \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ q_\tau(M) - \lambda q_0(M) = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \cdot l(M)$$

Dans ce cas, montrer que $C_\tau \cap \Pi_1$ est inclus dans une sphère. En conclure que $C_\tau \cap \Pi_1$ est un cercle. Que représente-t-il pour les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$?

On admettra que les relations (3) constituent une condition nécessaire et suffisante pour que $C_\tau \cap \Pi_1$ soit un cercle.

III.B - Montrer que pour tout point $M(x, y, z) \in \Pi_1$, il existe $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que $x' + y' + z' = 1$ et que M soit le barycentre de A, B et C affectés des masses respectives x', y' et z'. Si τ est tel que $C_\tau \cap \Pi_1$ soit un cercle, donner une expression simple de $q_\tau(x, y, z)$ à l'aide de λ, x', y', z' et des carrés des distances $\|BC\|^2$, $\|CA\|^2$, $\|AB\|^2$.

Partie IV - Couple foyer — directrice d'une conique

Dans cette partie, on note pour simplifier C_0 le cône d'équation $yz + zx + xy = 0$. Pour la suite, a désigne un réel donné.

IV.A - Soit Ω_a le point de coordonnées (a, a, a). Montrer qu'il existe un réel $d_a \geq 0$ tel que, pour tout $M \in C_0 \backslash \{O\}$, la distance de Ω_a à la droite (OM) soit égale à d_a. En déduire la nature de C_0.

IV.B - On suppose désormais $a \neq 0$. Soit P_a le plan d'équation $x + y + z = a$; comment se déduit-il de P_1 ? Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on désigne par Φ_λ l'application qui à M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ associe $(x + y + z - a)^2 + \lambda(yz + zx + xy)$.

Montrer que pour un unique $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\Phi_{\lambda_0}(M) = 0$ est l'équation d'une sphère Σ_a. En donner le centre et le rayon et la situer par rapport à C_0.

IV.C -

IV.C.1) Soit Π un plan non parallèle à P_a ; montrer qu'il existe une droite D incluse dans Π et un scalaire μ tels que :

$$\forall M(x, y, z) \in \Pi,\ (x + y + z - a)^2 = \mu(d(M, D))^2$$

où $d(M, D)$ désigne la distance de M à D.

Indication : on pourra s'intéresser à la relation $x + y + z - a = 0$; un croquis pourra être utile.

IV.C.2) On suppose, de plus, que Π est tangent à Σ_a en un point F. Pour tout $M \in \Pi$, exprimer $\Phi_{\lambda_0}(M)$ à l'aide de $\|FM\|$.

IV.D - Conclure de ce qui précède que $C_0 \cap \Pi$ est une conique de foyer F et de directrice D. Faire un croquis d'ensemble sans nécessairement chercher à représenter le repère canonique.

Partie V - Centre d'une conique

Dans cette partie, on considère $q \in Q(\mathbb{R}^3)$, dont on désigne par f la forme polaire.

V.A - Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et soit $s \in L(\mathbb{R}^3)$ la symétrie qui à $X = X' + X''$, où $(X', X'') \in E' \times E''$, associe $s(X) = X' - X''$. Pour $(X', X'') \in E' \times E''$, exprimer $q(X' + X'') - q(X' - X'')$ à l'aide de f. En déduire que :

$$\left[\forall X \in \mathbb{R}^3,\ q(s(X)) = q(X)\right] \Leftrightarrow \forall (X', X'') \in E' \times E'',\ f(X', X'') = 0 \qquad (4)$$

On suppose q non dégénérée ; on ne demande pas de prouver l'existence et l'unicité de u automorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ f(X, Y) = < u(X), Y > .$$

V.B - Si V est un élément non nul de $\mathbb{R}^3$, on pose $H = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, < V, X > = 0 \right\}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$; montrer que :

$$\left[\forall (X,Y) \in F \times H,\ f(X, Y) = 0\right] \Leftrightarrow u(F) \subset \mathrm{Vect}(V)$$

V.C - En déduire que l'hyperplan H possède un supplémentaire F vérifiant :

$$\forall (X,Y) \in F \times H,\ f(X, Y) = 0 ,$$

si et seulement si $< u^{-1}(V), V > \neq 0$. Montrer que F est alors unique et en donner une description.

On choisit maintenant $V = (1, 1, 1)$, de sorte que $H = P_0$. Soit $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$, avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$; on choisit $q = q_\tau$, on lui associe u comme ci-dessus et on appelle M la matrice de q relativement à la base canonique.

V.D - Déterminer la comatrice de M. Montrer que :

$$< u^{-1}(V), V > \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \qquad (5)$$

V.E - Si $< u^{-1}(V), V > \neq 0$, on définit F comme ci-dessus, puis s à partir de la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus P_0$. Décomposer alors un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ ainsi que son image $s(X)$ sur la somme directe $F \oplus P_0$. En déduire que

s laisse stable P_1. En déduire que $C_q \cap P_1$ possède un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.

V.F - On suppose au contraire que $< u^{-1}(V), V > = 0$.

V.F.1) Quelle est la nature de $C_q \cap P_1$? On pourra utiliser II.B.2.

V.F.2) On définit une base orthonormale $B = (I, J, K)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que J soit colinéaire à $u^{-1}(V)$ et K directement colinéaire à V. Étudier soigneusement la forme de la matrice de q relativement à B et retrouver la nature de $C_q \cap P_1$. Que représente la direction de J pour cette conique ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Définitions et notations

On note $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et continues dans l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles.

Pour f et g éléments de E, on pose $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, ce qui définit sur E un produit scalaire dont la norme associée est notée $\|\ \|$ (on rappelle que $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$) et munit E d'une structure d'espace préhilbertien réel.

On dit qu'une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie la condition

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ (\Phi_m|\Phi_n) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Soit Φ une suite orthonormale de E.

1) Si $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_Φ^n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{\Phi_j | 0 \leq j \leq n\}$, par $\prod_\Phi^n$ l'opérateur de projection orthogonale de E sur V_Φ^n et enfin par $d_\Phi^n(f)$ la distance de $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ à V_Φ^n.

2) On désigne par V_Φ le sous-espace vectoriel de E réunion des V_Φ^n

$$V_\Phi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_\Phi^n\ ;$$

par définition V_Φ est égal à l'ensemble des éléments de E qui sont combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \Phi_{j_i}$, où $j_1, j_2, \ldots, j_p$ sont des entiers distincts et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des coefficients réels.

3) On dit que la suite orthonormale Φ est totale dans E si pour tout élément f de E il existe une suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de V_Φ convergeant vers f.

Filière PSI

Enfin pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2}\cos(n\pi x) & \text{si } n > 0 \end{cases} ; \qquad S_n(x) = \sqrt{2}\sin((n+1)\pi x)$$

et on note $C = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La partie IV est largement indépendante des trois parties précédentes.

Partie I - Généralités sur les suites orthonormales

I.A - Montrer que C et S sont des suites orthonormales de E.

I.B - Soit Φ une suite orthonormale de E, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$.

I.B.1) Établir la formule $\|f\|^2 = \left\|\prod_\Phi^n(f)\right\|^2 + [d_\Phi^n(f)]^2$.

I.B.2) Calculer

$$\sup_{\|f\|=1} \left\|\prod_\Phi^n(f)\right\|$$

I.B.3) Expliciter $\prod_\Phi^n(f)$ dans la base $\{\Phi_j | 0 \le j \le n\}$.

En déduire que la série de terme général $(f|\Phi_k)^2$ est convergente et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (f|\Phi_k)^2 \le \|f\|^2$$

I.C - On suppose toujours que Φ est une suite orthonormale de E.

I.C.1) Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V_Φ, convergeant dans E et soit $f = \lim_{k \to \infty} (f_k)$.

a) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ donné, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ n \ge N \Rightarrow \left\{ f - \prod_\Phi^n(f) = f - f_k + \prod_\Phi^n(f_k - f) \right\}$$

b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^{n}(f) - f \right\| = 0$.

I.C.2) Démontrer alors l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) Φ est totale dans E.

ii) $\forall f \in E$, $\lim_{n \to +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^{n}(f) - f \right\| = 0$.

I.C.3) **On suppose de plus dans cette question seulement** que Φ est totale dans E.

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ expliciter $\|f\|^2$ et $[d_{\Phi}^{n}(f)]^2$ à l'aide des $(f|\Phi_k)$.

I.D - Étude de la suite C.

I.D.1) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue paire périodique et de période 2 notée $\tilde{f}$ telle que sa restriction à $[0,1]$ soit égale à f.

I.D.2) Montrer alors que la suite C définie dans le préambule est totale dans E. On pourra introduire les coefficient de Fourier de la fonction 2π-périodique h définie par $h(x) = \tilde{f}\left(\frac{x}{\pi}\right)$, la fonction $\tilde{f}$ étant celle de la question précédente.

I.D.3) Exhiber une suite orthonormale de E non totale dans E.

Partie II - Fonctions lipschitziennes

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Une fonction f définie dans I et à valeurs réelles est dite lipschitzienne dans I si elle vérifie la condition :

$$\exists C \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ (\forall (x,y) \in I^2),\ |f(x) - f(y) \leq C|x - y|$$

On notera $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies et lipschitziennes dans I.

II.A - Propriétés élémentaires.

II.A.1) Vérifier que $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I,\mathbb{R})$.

Le produit de deux éléments de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est-il encore un élément de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$?

si $f \in \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ justifier l'existence du réel $k(f)$ défini par

$$k(f) = \sup \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \ \middle|\ (x,y) \in I^2,\ x \neq y \right\}$$

Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de f.

II.A.2) Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, vérifier que $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $C^0(I,\mathbb{R})$. Exhiber une fonction définie et continue sur $[0,1]$ mais non lipschitzienne sur ce même intervalle.

II.B - Soit f une fonction de classe C^1 sur I.

Montrer que f' est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I.

Exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz à l'aide de f'.

II.C - Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ qui converge simplement sur I vers une fonction f. On suppose de plus que l'ensemble des $\{k(f_n)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ est borné.

Montrer que $f\in\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$.

II.D - Soit $g\in\mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $k(g)\leq 1$.

II.D.1) Montrer qu'il existe $\widehat{g}\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$k(\widehat{g})\leq 1 \text{ et } \forall x\in[0,1] \qquad \widehat{g}(x) = g(x)$$

II.D.2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$ on pose $g_n(x) = n\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}}\widehat{g}(t)\,dt$.

Montrer que g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à dérivée bornée par 1.

Montrer que la suite g_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{g}$.

II.E - Dans les deux dernières questions de cette partie les suites *S* et *C* sont celles définies dans le préambule.

Soit $f\in C^1([0,1],\mathbb{R})$.

II.E.1) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $(f|C_n)$ en fonction de $(f'|S_{n-1})$.

II.E.2) Montrer que la série de terme général $n^2(f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}\|f'\|^2$$

II.F - Soit $f\in\mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$.

II.F.1) Montrer que la série de terme général $n^2(f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}k(f)^2$$

II.F.2) En déduire alors que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $d_c^{n-1}(f)\leq\dfrac{1}{n\pi}k(f)$.

Partie III - Constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale

L'objectif est de montrer que la suite des constantes de Lipschitz des éléments d'une suite orthonormale de E est toujours minorée par une suite de la forme $(\Gamma n)_{n \in \mathbb{N}}$ où Γ est une constante positive indépendante de la suite choisie dans E.

III.A - Soient $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites orthonormales de E. Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \; n + \sum_{j=0}^{m} d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq m + 1$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{2n-1} d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq n$$

III.B - On donne maintenant une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormale de E.

On suppose de plus que toutes les fonctions Φ_n sont lipschitziennes dans $[0,1]$.

III.B.1) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \geq \pi^2 n^3$$

III.B.2) Montrer que la suite $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ est non bornée.

III.B.3) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} k(\Psi_n) = +\infty$.

III.B.4) Trouver la valeur de $k(C_n)$.

III.B.5) Montrer qu'il existe un réel $\Gamma > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute suite orthonormale $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ telle que la suite $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ soit une suite croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; k(\Psi_n) \geq \Gamma n$$

Ce résultat est dû à W. Rudin (1952).

Partie IV - Constantes de Lipschitz des polynômes de Legendre

Le but de cette dernière partie est le calcul des constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale d'éléments de E constituée de polynômes.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$U_n(x) = (x^2-1)^n \quad , \quad P_n = U_n^{(n)} \quad , \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n$$

La notation $f^{(n)}$ représente la dérivée n-ième de la fonction f.

On démontre, et on admettra, que l'on a :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

IV.A - Montrer qu'il existe une unique suite de réels tous strictement positifs notée $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $Q = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{R}, Q_n(x) = \alpha_n L_n(2x-1)$$

est une suite orthonormale de E.

Donner la valeur de α_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, la notation Q_n désigne l'élément ainsi calculé.

IV.B -

IV.B.1) Soit $f \in E$ donné. Montrer que la suite $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

IV.B.2) Montrer que la suite Q définie ci-dessus est totale dans E.

Pour cela on pourra montrer que la suite $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ en appliquant le théorème de Weierstrass à la fonction $f \in E$ donnée.

IV.B.3) Déterminer toutes les suites orthonormales $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E possédant la propriété suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}$, Φ_n est une fonction polynomiale de degré n

IV.C - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R},\ P_n(x) = n! \sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}$$

IV.D - Soient $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

La lettre θ désigne une variable réelle.

IV.D.1) Démontrer que si $|x| \leq 1$ alors $L_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta$.

On pourra remarquer que

$$x + i\sqrt{1-x^2}\ \cos\theta = \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\ \ e^{i\theta}\right)\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\ \ e^{-i\theta}\right)$$

IV.D.2) Établir que

$$\max_{x \in [-1,+1]} |L_n(x)| = 1$$

Quelles sont les valeurs de $x \in [-1,+1]$ telles que $|L_n(x)| = 1$?

IV.E -

IV.E.1) En remarquant que $(x^2-1)U'_n(x) = 2nxU_n(x)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

IV.E.2) Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ L'_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1)L_n(x)$$

IV.F - Calculer enfin la valeur $k(Q_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Rappels, notations et objectifs du problème.

Dans tout ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Toutes les matrices considérées ici sont à coefficients réels. On note :

- $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- $\mathscr{S}_n$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. symétriques définies positives c'est-à-dire dont les valeurs propres sont strictement positives).
- $\mathscr{U}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (termes sous-diagonaux nuls) et $\mathscr{U}_n^+$ l'ensemble des matrices appartenant à $\mathscr{U}_n$ dont tous les termes diagonaux sont positifs ou nuls.
- $\mathscr{L}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures dont les termes diagonaux valent 1. Le symbole I_n désigne la matrice unité diag$(1, \ldots, 1)$ élément de $\mathscr{M}_n$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n$, le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j est noté $A_{i,j}$.

Dans les parties I et II seulement, si $1 \leq i \leq n$, A_i désigne la matrice d'ordre i

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,i} \end{bmatrix}$$ extraite de A.

On confond respectivement :

- matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.
- vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne de ses coordonnées.
- une matrice d'ordre 1 et le réel la constituant.

Si nécessaire, $\mathbb{R}^n$ sera muni de sa structure euclidienne rendant la base canonique orthonormale. Ainsi, si $v \in \mathbb{R}^n$, $v\,{}^t v$ est une matrice de $\mathscr{M}_n$ tandis que ${}^t v v$ représente $\|v\|^2$ (norme euclidienne).

Le but de ce problème est d'étudier trois types de décompositions matricielles : décomposition LU (partie I), décomposition de Cholesky (partie II), décomposition QR (partie III).

Filière PSI

La partie IV utilise des décompositions des parties I à III, pour déterminer des approximations des valeurs propres d'une matrice.

Partie I -

I.A -

I.A.1) Montrer que si A appartient à $\mathscr{M}_n$ est triangulaire inversible, son inverse A^{-1} est aussi triangulaire.

I.A.2) Montrer que $(\mathscr{L}_n, \times)$ est un groupe.

I.B - Soit $A \in \mathscr{M}_n$:

I.B.1) Montrer que si A est inversible, il existe au plus un couple $(L,U) \in \mathscr{L}_n \times \mathscr{U}_n$ tel que $A = LU$.

Si c'est le cas, on dira que A possède une décomposition LU (L comme Lower et U comme Upper).

I.B.2) Montrer que si A est inversible et possède une décomposition LU, alors pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, $\det(A_k) \neq 0$

(on pourra utiliser une décomposition par blocs de A).

I.B.3) On suppose que $\det(A_{n-1}) \neq 0$ et on écrit A par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe H dans $\mathscr{L}_n$ telle que :

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\},)\ (HA)_{n,i} = 0 \quad .$$

En posant *a priori* $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix}$ expliciter une telle matrice H ainsi que son inverse, c'est-à-dire expliciter les blocs H_{n-1} et H', ainsi que les blocs correspondants de H^{-1} en fonction des blocs de la matrice A.

I.B.4) Montrer que si pour tout k dans $\{1, \ldots, n\}$, $\det(A_k) \neq 0$ alors A a une décomposition LU

(on pourra opérer par récurrence en utilisant une décomposition par blocs de A).

I.C -

I.C.1) Soit deux entiers p et q tel que $1 \leq p < q \leq n$. Montrer que l'opération élémentaire consistant à échanger les lignes p et q d'une matrice de $\mathcal{M}_n$ correspond à la multiplication à gauche par une matrice de $\mathcal{M}_n$ à déterminer.

I.C.2) Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$, le symbole

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix}_A$$ désigne le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{i_1, j_1} & A_{i_1, j_2} & \ldots & A_{i_1, j_k} \\ A_{i_2, j_1} & A_{i_2, j_2} & \ldots & A_{i_2, j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_k, j_1} & A_{i_k, j_2} & \ldots & A_{i_k, j_k} \end{pmatrix}$$

extraite de A. Ainsi par exemple, $\det(A_i) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & i \\ 1 & 2 & \ldots & i \end{bmatrix}_A$.

Sous les hypothèses de la question I.B.4, et notant $A = LU$ la décomposition LU de A, trouver dans l'ordre :

a) la première ligne de U,

b) la première colonne de L,

c) les éléments diagonaux de U,

d) les éléments de L des colonnes 2,3, …,n
(on utilisera I.C.1) sous forme $PA = PLU$ où P est une matrice telle que la multiplication de M par P à gauche permute deux lignes de M),

e) les éléments de U des lignes 2,3, …,n.

On montrera que pour $2 \leq j \leq i \leq n$, $L_{i,j} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & j \\ 1 & 2 & \ldots & j \end{bmatrix}_A}$ et on donnera pour $U_{i,j}$ $(2 \leq i \leq j \leq n)$ une formule analogue.

I.D - Écriture de l'algorithme

En utilisant :

- un algorithme induit par la question I.C.2),
- un langage de programmation (qu'on précisera) comprenant la fonction déterminant (notée det),

écrire une procédure donnant, pour une matrice A satisfaisant aux conditions du I.B.4), les matrices L et U telles que $A = LU$.

I.E - Exemples :

I.E.1)

a) À l'aide de l'algorithme mis en place au I.D - , effectuer la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

en indiquant les différentes étapes et les calculs intermédiaires.

b) En déduire la résolution du système matriciel $AX = Y$ d'inconnue

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et de paramètre } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ t \end{pmatrix}.$$

I.E.2) Donner deux exemples de matrices de $\mathcal{M}_2$, l'une ne possédant pas de décomposition LU, l'autre en possédant plusieurs.

I.E.3) Dans cette question C_p^q désigne le coefficient du binôme de Newton avec la convention $C_p^q = 0$ si $p < q$, si $p < 0$ ou si $q < 0$.

a) Soient p, q et r entiers naturels. Montrer la formule de Vandermonde :

$$C_{p+q}^r = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_p^k C_q^{r-k}$$

(on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

b) Soit $p \in \mathbb{N}$; déterminer la décomposition LU de la matrice A de $\mathcal{M}_n$ telle que $A_{i,j} = C_{p+j-1}^{i-1}$. En déduire $\det A$.

Écrire A, L, U lorsque $p = 1$ et $n = 4$.

Partie II -

II.A - Soit $A \in \mathcal{S}_n$. Montrer que A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si pour tout v appartenant à $\mathbb{R}^n$ non nul, ${}^t vAv > 0$.

On suppose dans le reste de cette partie II - , que $A \in \mathcal{S}_n^{++}$.

II.A.1) Montrer que A possède une décomposition LU unique notée :

$A = LU$ où $L \in \mathcal{L}_n$ et $U \in \mathcal{U}_n$. (on pourra utiliser I.B).

II.A.2) Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_{i,i} > 0$.

II.B -

II.B.1) Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{U}_n$ telle que $A = {}^t BB$ (on pourra modifier L et U et se ramener au cas de matrices triangulaires inférieure et supérieure à diagonales identiques).

II.B.2) Montrer que la décomposition obtenue à la question précédente est unique si on impose $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_{i,i} > 0$.

II.C - Si $M \in \mathcal{M}_n$, montrer que les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

i) $M \in \mathcal{S}_n^{++}$,

ii) $\exists B \in \mathcal{U}_n$ inversible telle que $M = {}^t BB$,

iii) $M \in \mathcal{S}_n$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(M_k) > 0$.

Partie III -

III.A - Soit $v \in \mathbb{R}^n$ unitaire ($\|v\| = 1$). On pose $H^{(v)} = I_n - 2v{}^t v$ (matrice de Householder) et par convention $H^{(0)} = I_n$.

III.A.1) Montrer que $H^{(v)}$ est une symétrie orthogonale que l'on caractérisera.

III.A.2) Montrer que pour tout a dans $\mathbb{R}^n$, il existe v dans $\mathbb{R}^n$ tel que $H^{(v)}a$ soit de la forme $(*, 0, 0, \ldots, 0)$.

III.B - Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

III.B.1) Montrer qu'il existe $H_1, \ldots, H_{n-1}$ matrices de Householder telles que :

$H_{n-1}H_{n-2}\ldots H_1 A \in \mathcal{U}_n$.

III.B.2) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n$ s'écrit sous la forme $A = QR$ où $Q \in \mathcal{M}_n$ est orthogonale et $R \in \mathcal{U}_n^+$ (on parle de décomposition QR).

III.B.3) Montrer que si A est inversible, il y a unicité de la décomposition.

III.C - Quel résultat de cours permet d'obtenir directement une décomposition du type QR lorsque A est supposée inversible ?

Partie IV -

Dans cette partie A est une matrice de $\mathcal{M}_n$ inversible et possédant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$.

IV.A - Dans cette section, on montre des résultats préliminaires.

IV.A.1) On rappelle qu'une suite de matrice $(M_k)_{k \in \mathrm{IN}}$ converge vers une matrice M si et seulement si chaque coefficient de M_k converge vers le coefficient de M correspondant.

Montrer que si $(M_k)_{k \in \mathrm{IN}}$ et $(N_k)_{k \in \mathrm{IN}}$ sont deux suites de $\mathcal{M}_n$ convergentes de limites respectives M et N alors la suite $(M_k N_k)_{k \in \mathrm{IN}}$ converge vers MN.

IV.A.2) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n$, on définit

$$|||M||| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|MX\|,$$

et on admet que $M \mapsto |||M|||$ définit une norme dans $\mathcal{M}_n$.

a) Montrer que si M et N sont dans $\mathcal{M}_n$, on a
$|||MN||| \leq |||M||| \cdot |||N|||$.

b) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n$ vérifie $|||M||| < 1$ alors $M + I_n$ est inversible.

IV.A.3) Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On suppose dans la suite de cette partie que P^{-1} possède une décomposition LU sous la forme $P^{-1} = LU$ et on pose $P = QR$ la décomposition QR de P.

IV.B - Soit $(A_k)_{k \geq 1}$ la suite d'éléments de $\mathcal{M}_n$ définie par récurrence de la façon suivante :

- $A_1 = A$;
- si A_k a été construite, on pose $A_k = Q_k R_k$ la décomposition QR de A_k ;
- on définit $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Montrer que les matrices A_k $(k \geq 1)$ sont semblables à A.

IV.C - Déterminer explicitement la matrice $D^k L D^{-k}$ et $\lim_{k \to +\infty} D^k L D^{-k}$ (la matrice D est celle définie au IV.A.3)).

On posera dans la suite $E_k = D^k L D^{-k} - I_n$.

IV.D - Montrer qu'à partir d'un certain rang $I_n + R E_k R^{-1}$ admet une décomposition QR unique de la forme :

$$I_n + R E_k R^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$$

où $\tilde{R}_k$ est à termes diagonaux strictement positifs.

On admet dans toute la suite que la suite $(\tilde{Q}_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathscr{M}_n$.

IV.E - .

IV.E.1) Montrer que la limite $\tilde{Q}$ de la suite $(\tilde{Q}_k)_{k \geq 1}$ est orthogonale.

IV.E.2) Montrer que la suite $(\tilde{R}_k)_{k \geq 1}$ converge et que sa limite $\tilde{R}$ est dans $\mathscr{U}_n^+$.

IV.E.3) Déterminer $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$.

IV.F - En utilisant deux compositions QR de A^k, montrer que la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ est telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i (1 \leq i \leq n) \qquad \lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,j} = 0 (1 \leq j < i \leq n)$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Préliminaire

On rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée par un réel $K>0$ si la fonction $|\varphi|$ est majorée par K :

$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq K$.

1) Soit m un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction $(e^x-1)^m$ montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est un entier entre 1 et } m-1, \\ m! & \text{si } j = m. \end{cases}$$

2) Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$(u_1 u_2 \ldots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \ldots u_n)^k .$$

Partie I -

I.A - Soit f une fonction de classe C^1 et de classe C^2 par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_2.

I.A.1) En écrivant, pour $h>0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2} .$$

I.A.2) En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

I.B -

I.B.1) Montrer de même que, si f est de classe C^2 et de classe C^3 par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}(9M_0^2M_3)^{1/3} .$$

I.B.2) f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

Filière PC

Dans toute la suite du problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie II -

Soit f une fonction, non constante, de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n.

II.A - En utilisant la question 1) du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à la fonction f entre les valeurs x et $x+h$ pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est, elle aussi, bornée sur $\mathbb{R}$.

II.B - En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$.

II.C -

II.C.1) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $M_k > 0$.

II.C.2) En utilisant la suite finie $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ avec $u_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier k entre 0 et n, on a :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?

Partie III -

E (respectivement F) désigne l'espace des fonctions continues par morceaux (respectivement continues) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+1) + f(x) = 0$ pour tout réel x. On admettra —c'est évident— que ce sont des sous-espaces vectoriels réels de l'espace de toutes les fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme, notée ici N et définie par

$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

III.A - Démontrer que pour toute fonction f dans E, il existe g unique dans F telle que, en tout point x où f est continue, on a $g'(x) = f(x)$. On note alors $g = T(f)$ ou $g = Tf$ et l'on définit ainsi une application T de E dans E.

III.B - On considère la fonction φ_0 de E telle que :

$$\varphi_0(0) = 0, \qquad \varphi_0(x) = 1 \text{ si } x \in]0;1[.$$

On pose $T^1 = T$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k = T \circ T^{k-1}$, puis pour $k \geq 1$, $\varphi_k = T^k(\varphi_0)$.

III.B.1) Déterminer et représenter graphiquement sur le segement $[0;2]$ les fonctions φ_k pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Dans toute la suite, on notera $\lambda_k = N(\varphi_k)$.

III.B.2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_k(-x) = (-1)^{k+1}\varphi_k(x) \text{ et } \varphi_k(1-x) = (-1)^k\varphi_k(x).$$

III.B.3) Montrer que, pour $k \geq 1$,

$$\lambda_{2k} = (-1)^k\varphi_{2k}(1/2) \text{ et } \lambda_{2k-1} = (-1)^k\varphi_{2k-1}(0).$$

III.C -

III.C.1) Soit $f \in E$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt .$$

III.C.2) En déduire que, pour tout $f \in E$, on a $2N(Tf) \leq N(f)$.

III.D - Déterminer les fonctions f de norme 1 de E telles que :

$$N(Tf) = \frac{1}{2}.$$

III.E - Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de norme 1 dans F telle que :

$$N(Tf) = \frac{1}{2}.$$

III.F - Soit maintenant p un entier naturel non nul et f une fonction de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+2p) = f(x)$ pour tout réel x.

III.F.1)

a) Montrer que si f a q zéros distincts sur $[0;2p[$, alors f' a au moins q zéros distincts sur $[0;2p[$.

b) Montrer que si f et f' ont exactement q zéros distincts sur $[0;2p[$, alors elles n'ont aucun zéro commun.

III.F.2) Pour tout réel ν tel que $0 < \nu < 1$ et tout réel ρ, on définit la fonction $l : x \text{ a } \varphi_n(x) - \nu f(x+\rho)$.

a) On suppose que $N(f^{(n)}) \leq 1$. Montrer que $l^{(n-1)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur $[0;2p[$.

b) On suppose que $N(f) \leq \lambda_n$. Montrer que l s'annule au moins $2p$ fois sur $[0;2p[$.

c) En déduire que, si $N(f) \leq \lambda_n$ et $N(f^{(n)}) \leq 1$, les $l^{(k)}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ont exactement $2p$ zéros sur l'intervalle $[0;2p[$.

III.F.3) On suppose f non constante.

a) Montrer que l'on peut trouver α et β dans $[0;2p[$ tels que :

$$|f'(\alpha)| = N(f'), \qquad \varphi'_n(\beta) = \frac{\lambda_{n-1}}{N(f')} f'(\alpha).$$

On pose alors $h(x) = \varphi_n(x) - \lambda_{n-1} f(x + \alpha - \beta) / N(f')$.

b) Ici on suppose $n \geq 3$. Vérifier que $h'(\beta) = h''(\beta) = 0$.

c) En déduire que :

$$\left(N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N(f^{(n)}) \leq 1\right) \Rightarrow \left(N(f') \leq \lambda_{n-1}\right).$$

d) Montrer que cette dernière implication est encore vraie pour $n = 2$.

III.G - Montrer qu'il existe une fonction ω de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ valant 1 sur le segment $[-1/2;1/2]$ et 0 en dehors du segment $[-1;1]$ (on pourra utiliser la fonction x a $\int_0^x \sin^n(t)\,dt$ sur le segment $[0;\pi]$).

III.H - Soit maintenant f une fonction de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ et pour laquelle :

$$N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N(f^{(n)}) \leq 1.$$

Soit α un réel de l'intervalle $[0;1[$. Pour tout entier naturel p non nul, on note f_p la fonction de période $2p$ telle que :

$$f_p(x) = \alpha f(x)\omega(x/p) \text{ pour } |x| \leq p.$$

III.H.1) Montrer que $f_p^{(n)}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que l'on a, pour p assez grand,

$$N(f_p) \leq \lambda_n \text{ et } N(f_p^{(n)}) \leq 1.$$

III.H.2) En déduire que l'on a encore $N(f') \leq \lambda_{n-1}$.

III.I - Soit f une fonction de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et n, $f^{(k)}$ est bornée et que l'on a :

$$N(f^{(k)}) \leq N(f)^{1-k/n} N(f^{(n)})^{k/n} \lambda_{n-k} / \lambda_n^{1-k/n}.$$

(On pourra utiliser une fonction du type x a $af(bx)$).

Partie IV -

IV.A - On définit, pour p entier supérieur ou égal à 2, la fonction ψ_p de F, affine sur $\left[0;\frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{1}{p};1-\frac{1}{p}\right]$ et $\left[1-\frac{1}{p};1\right]$ et vérifiant :

$$\psi_p(0) = \psi_p(1) = 0, \qquad \psi_p(\frac{1}{p}) = \psi_p(1-\frac{1}{p}) = 1.$$

En utilisant le III.C, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} N(T^n(\psi_p)) = \lambda_n .$$

IV.B - En déduire que l'inégalité du III.I ne peut être améliorée.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Notations

On désigne par $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice A et $rg(A)$ le rang de A.

On fixe un entier $n \geq 2$ et on considère $V = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $E = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement 0_V et 0_E.

L'espace vectoriel V admet pour base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $(k, m) \in [\![1, n]\!]^2$ on pose $E_{k,m} = e_k \, {}^te_m$, ce qui donne une matrice à n lignes et n colonnes dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $(i,j) = (k,m)$ et 0 sinon. La base canonique de E est constituée des n^2 matrices $E_{k,m}$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq m \leq n$. On note I la matrice identité, $I = \sum_{1 \leq k \leq n} E_{k,k}$.

Si A est une matrice élément de E et W un sous-espace vectoriel de V, $A(W)$ désigne l'ensemble $\{Aw \mid w \in W\}$.

Si F est un sous-ensemble de E, on dit que W est stable par F si

$\forall A \in F,\ A(W) \subset W$.

Pour tout sous-ensemble $\mathscr{L}$ de E on s'intéresse aux propriétés suivantes :

P_1 : $\mathscr{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1,

P_2 : $\mathscr{L}$ contient (au moins) une matrice de rang n,

P_3 : $\mathscr{L}$ contient I,

P_4 : $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel de E,

P_5 : $\mathscr{L}$ est stable par produit de matrices : $A, B \in \mathscr{L} \Rightarrow AB \in \mathscr{L}$,

P_6 : si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$, alors soit $W = \{0_V\}$ soit $W = V$.

Filière PC

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A - Dans cette section I.A - , $\mathscr{L}$ est l'ensemble des $A \in E$ qui sont inversibles :

$$\mathscr{L} = GL_n(\mathbb{C}).$$

I.A.1) Soit x un vecteur non nul de V. Montrer que pour tout vecteur y non nul de V il existe une matrice inversible A telle que $Ax = y$.

Indication : on peut considérer deux cas,

a) la famille (x, y) est liée,

b) la famille (x, y) est libre.

En déduire que la propriété P_6 est vérifiée par $\mathscr{L}$.

I.A.2) Indiquer celles des propriétés P_1,..., P_5 qui sont vérifiées par $\mathscr{L}$; justifier les réponses.

I.B - Dans cette section I.B - , $\mathscr{L}$ est l'ensemble des matrices $T = (t_{k,m}) \in E$ qui sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que

$$m > k \Rightarrow t_{k,m} = 0$$

I.B.1) Montrer que e_n est vecteur propre de tout $T \in \mathscr{L}$. Que peut-on dire de la propriété P_6 pour $\mathscr{L}$?

I.B.2) Indiquer celles des propriétés P_1,..., P_5 qui sont vérifiées par $\mathscr{L}$; justifier les réponses.

I.C - Dans cette section I.C - , $n = 2$ et $\mathscr{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel P_3 et P_4 sont vérifiées.

I.C.1) On suppose que P_1 n'est pas vérifiée par $\mathscr{L}$ (les matrices 2×2 de rang 1 appartiennent donc toutes à $E \setminus \mathscr{L}$ le complémentaire de $\mathscr{L}$ dans E). Soit $A \in \mathscr{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$? Montrer que $\mathscr{L}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles.

I.C.2) On suppose que P_6 est vérifiée par $\mathscr{L}$. Montrer qu'alors la propriété P_1 est vérifiée par $\mathscr{L}$.

Dans toute la suite du problème, P_4 et P_5 sont supposées vérifiées : $\mathscr{L}$ est donc un sous-espace vectoriel de E stable par produit matriciel.

Partie II -

Dans cette partie, les propriétés P_3 et P_6 sont supposées vérifiées par $\mathscr{L}$ (en plus de P_4 et P_5). On veut montrer qu'alors P_1 aussi est vérifiée.

On note

$$m = \min\left\{ rg(M) \mid M \in \mathscr{L}\backslash\{0_E\} \right\},$$

et on se propose de montrer que $m = 1$, ce qui établira P_1.

On suppose dans un premier temps que $m \geq 2$. On note alors M_0 un élément de $\mathscr{L}$ qui vérifie $rg(M_0) = m$ et on considère une base $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$ de $M_0(V)$. On note $x_1,\ldots, x_m$ des éléments de V tels que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $M_0 x_i = z_i$.

II.A - Montrer que $\left\{ N z_1 \mid N \in \mathscr{L} \right\} = V$.

On note alors N_0 un élément de $\mathscr{L}$ qui vérifie $N_0 z_1 = x_2$ et on pose $M_1 = M_0 N_0 M_0$. Montrer que (M_0, M_1) est une famille libre.

II.B - Montrer que $M_0(V)$ est stable par $M_0 N_0$ puis que $\exists (\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V)$, tel que $z \neq 0_V$ et $M_0 N_0 z = \alpha z$.

En déduire que $0 < rg(M_1 - \alpha M_0) < rg(M_0)$.

Conclure que $m = 1$.

Partie III -

Dans cette partie on suppose que $n > 2$ et que la dimension de $\mathscr{L}$ est supérieure ou égale à $n^2 - 1$. On veut montrer que P_3 et P_6 sont vérifiées, puis que $\mathscr{L} = E$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de E stable par produit matriciel.

III.A - Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$; on note k la dimension de W. Montrer que $\{ M \in E \mid M(W) \subset W \}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathscr{L}$ et dont la dimension vaut $n^2 - k(n-k)$. En déduire que $W = \{0_V\}$ ou $W = V$. On a donc démontré P_6.

III.B -

III.B.1) On suppose ici : $(*) \exists k, m \in [\![1, n]\!]^2$, $k \neq m$ et $E_{k,m} \in E\backslash\mathscr{L}$.

On note alors $\mathscr{H} = \mathrm{Vect}(E_{k,m}, I)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $E_{k,m}$ et I.

Montrer que $\dim(\mathscr{H} \cap \mathscr{L}) \geq 1$ puis que $\mathscr{L}$ contient une matrice inversible.

III.B.2) On suppose ici que c'est le contraire de (*) qui est vrai, donc

$$k \neq m \Rightarrow E_{k,\,m} \in \mathscr{L} \ .$$

Trouver une combinaison linéaire de ces $E_{k,\,m}$ qui donne une matrice inversible. En déduire que dans tous les cas $\mathscr{L}$ contient une matrice inversible A.

III.C - Montrer que pour la matrice A définie ci-dessus, la famille $\left(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1} \right)$ est une famille liée.

En déduire qu'il existe un entier $p > 0$ et des nombres complexes $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ tels que $\lambda_0 \lambda_p \neq 0$ et

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_p A^p = 0 \, .$$

Montrer alors que $I \in \mathscr{L}$.
On a donc démontré P_3.

Compte tenu de la partie II -, la propriété P_1 est donc satisfaite. On note alors M_0 une matrice de rang 1 qui appartient à $\mathscr{L}$, matrice que l'on peut écrire

$$M_0 = v_0 \, {}^t\overline{w}_0 \text{, où } v_0, w_0 \in V \setminus \{0_V\} \, .$$

On introduit le produit scalaire canonique sur V, $(v, w) \mapsto {}^t\overline{v} w$ et pour $v \in V$ on pose

$$A_v = \left\{ Lv \,|\, L \in \mathscr{L} \right\},$$

$$B_v = \left\{ {}^t\overline{L} v \,|\, L \in \mathscr{L} \right\},$$

$$C_v = (B_v)^{\perp} \ .$$

III.D - Soit $u \in V$, $u \neq 0_V$. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$ et que B_u n'est pas réduit à $\{0_V\}$.

Montrer alors que $C_u = \{0_V\}$ et $B_u = V$.
Montrer que $A_u = V$. En déduire que pour tout $(x, y) \in V^2$ il existe $L, M \in \mathscr{L}$ tels que $Lv_0 = x$ et ${}^t\overline{M} w_0 = y$, puis que toute matrice $A \in E$ de rang 1 appartient à $\mathscr{L}$. Montrer que $\mathscr{L} = E$.

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES I

Les parties II, III et IV sont relativement indépendantes.

Partie I - Définition d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n points tous distincts dans un plan. Ces points sont, dans cet ordre, les sommets d'un polygone convexe. Autrement dit, en convenant que $A_{n+1} = A_1$ la propriété suivante est vérifiée : pour tout côté A_iA_{i+1} du polygone, tous les sommets du polygone autres que A_i et A_{i+1} sont du même côté de la droite joignant A_i à A_{i+1}.

On appelle diagonale du polygone tout segment joignant deux sommets non consécutifs. On trace un certain nombre de ces diagonales de manière à découper le polygone en triangles. Les diagonales utilisées ne doivent avoir, deux par deux, aucun point commun à l'intérieur du polygone.

Pour n fixé, on note a_n le nombre de découpages possibles du polygone.

Pour $n = 4$, par exemple, il y a deux découpages possibles, l'un utilisant la diagonale A_1A_3 et l'autre utilisant la diagonale A_2A_4, donc $a_4 = 2$.

I.A - Ici, $n = 5$. Montrer que le triangle $A_1A_2A_3$ figure dans 2 découpages possibles, le triangle $A_1A_2A_4$ dans un seul découpage et le triangle $A_1A_2A_5$ dans 2 découpages possibles.

En déduire que $a_5 = 5$.

I.B - Ici, $n = 6$. Combien y-a-t-il de découpages possibles du polygone dans lesquels figurent le triangle $A_1A_2A_3$? le triangle $A_1A_2A_4$? le triangle $A_1A_2A_5$? le triangle $A_1A_2A_6$?

Calculer a_6.

I.C - Justifier que

$$a_7 = a_6 + a_5 + a_4^2 + a_5 + a_6 \text{ et que } \quad a_8 = a_7 + a_6 + a_5a_4 + a_4a_5 + a_6 + a_7 \ .$$

I.D - Donner en la justifiant, une formule généralisant les précédentes et permettant, pour $n \geq 7$, de calculer a_n connaissant $a_4, \ldots, a_{n-1}$.

Filière TSI

I.E - On convient que $a_2 = a_3 = 1$. Montrer que l'on a, pour tout n supérieur ou égal à 3,

$$a_n = \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k}.$$

I.F - Écrire une procédure ou une fonction qui, recevant à l'entrée la valeur de n, renvoie un tableau contenant les valeurs $a_2, \ldots, a_n$. Ce programme sera écrit dans le langage du logiciel de calcul formel connu du candidat, qui sera précisé sur la copie. Il devra être accompagné de commentaires le rendant compréhensible par le correcteur.

Partie II - Expression de a_n

On se propose, dans cette partie, d'expliciter l'entier a_n défini dans la première partie. On convient que $a_0 = a_1 = 0$.

II.A - Montrer que l'on a, pour tout n supérieur ou égal à 3,

$$a_n = \sum_{k=2}^{n+1} a_k a_{n+1-k}.$$

II.B - Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tels que la série entière $\sum b_n x^n$ ait un rayon de convergence r non nul. Pour $x \in]-r, r[$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

II.B.1) Soit m fixé dans $\mathbb{N}$. Montrer que, sur $]-r, r[$, la fonction h définie par $h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{m+k} x^k$ est définie et continue.

II.B.2) En déduire que g admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre m. Préciser la partie polynomiale de ce développement limité.

II.B.3) Si p est un entier inférieur ou égal à m, quel est le coefficient de x^p dans le développement limité d'ordre m, au voisinage de 0, de la fonction x a $g^2(x)$? ($g^2(x)$ désigne le produit du réel $g(x)$ par lui-même).

Quel est le coefficient de x^p dans le développement limité d'ordre m de la fonction x a $g^2(x) - xg(x) + x^3$?

II.C - On revient à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{+\infty} a_n x^n$ et on utilise la fonction f définie sur $]-R, +R[$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

II.C.1) Que peut-on dire, si R n'est pas nul, de l'existence et de la valeur de $f'(0)$?

II.C.2) Dire pourquoi les résultats de II.B suggèrent qu'on a peut-être, si R n'est pas nul :

$$\forall x \in]-R, +R[, \quad f^2(x) - xf(x) + x^3 = 0 .$$

II.C.3) Trouver un réel β, le plus grand possible, et une fonction h (que l'on explicitera en résolvant une équation du second degré) définie et continue sur $]-\infty, \beta[$, dérivable en 0 avec $h'(0) = 0$, tels que :

$$\forall x \in]-\beta, +\beta[, \quad h^2(x) - xh(x) + x^3 = 0 .$$

II.D -

II.D.1) Le réel α étant fixé, rappeler le développement en série entière de la fonction x a $(1+x)^\alpha$ et son rayon de convergence.

II.D.2) En déduire le développement en série entière de la fonction x a $\sqrt{1-x}$.

On essaiera d'écrire le coefficient de x^n dans ce développement sous la forme d'une fraction dont les deux termes seraient des produits d'entiers.

II.D.3) Donner de $h(x)$ une expression, valable pour $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, sous forme de série entière.

II.D.4) En utilisant II.C.3 et II.B.3, montrer que, pour tout entier naturel n, le coefficient de x^n dans le développement de $h(x)$ en série entière est exactement égal à a_n.

II.E - Déduire de tout ce qui précède une expression simple de a_n, valable pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et utilisant le coefficient binomial C_{2n-4}^{n-2}.

On rappelle que, avec la convention $0! = 1$, on a $C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$.

II.F - En déduire que, pour n supérieur ou égal à 2, l'entier C_{2n-4}^{n-2} est divisible par l'entier $n-1$.

Partie III - Équivalent de a_n

On se propose dans cette partie de déterminer un équivalent de l'entier a_n défini dans la première partie. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}}\, dt.$$

III.A - Établir l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_0 et I_1.

III.B -

III.B.1) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

III.B.2) Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

III.B.3) En déduire que I_{n+1} est équivalent à I_n lorsque $n \to \infty$.

III.C - Montrer, en utilisant III.B.2, que $(n+1) I_n I_{n+1}$ est une constante que l'on explicitera.

En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to \infty$.

III.D - Pour $n \geq 2$, calculer I_{2n-4} puis exprimer a_n au moyen de I_{2n-4}.

En déduire un équivalent de a_n lorsque $n \to \infty$.

Partie IV - Étude d'une fonction

On se propose dans cette partie d'étudier la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} x^n.$$

IV.A - Montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \qquad \varphi(x) = \frac{x}{2}(1-\sqrt{1-4x}).$$

Étudier les variations et tracer le graphe de la restriction de φ à $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.

IV.B - Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$.

IV.B.1) Soit $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$. Montrer que

$$\sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} x^n \leq \frac{x}{2}(1-\sqrt{1-4x}).$$

IV.B.2) En déduire que

$$\sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{8}.$$

IV.B.3) φ est-elle définie pour $x = \frac{1}{4}$? est-elle définie pour $x = -\frac{1}{4}$?

IV.C - Conclure quant à l'ensemble de définition de φ. La fonction φ est-elle continue sur cet ensemble ? Donner de $\varphi(x)$ une expression simple valable pour tout x appartenant à l'ensemble de définition.

IV.D -

IV.D.1) Citer les théorèmes qui permettent de justifier la dérivabilité de la série entière définissant φ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, d'écrire $\varphi'(x)$ comme somme d'une série entière que l'on explicitera, et de donner le rayon de convergence de cette série.

IV.D.2) Montrer que φ est solution, sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, de l'équation différentielle (E) linéaire du premier ordre

$$x(1-4x)y'(x)-(1-6x)y(x) = p(x) \qquad (E)$$

où p est un polynôme du second degré que l'on déterminera.

IV.D.3) Vérifier que la fonction x a $\frac{x}{2}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

IV.D.4) Résoudre (E) sur chacun des intervalles

$$]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad]0, \frac{1}{4}[.$$

IV.D.5) Vérifier que φ est la seule solution de (E), de classe C^1 sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, avec une dérivée nulle en 0.

IV.E -

IV.E.1) La fonction φ' est-elle bornée sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$?

IV.E.2) La série entière égale à $\varphi'(x)$ pour

$x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ est-elle convergente pour $x = \frac{1}{4}$?

IV.E.3) On note

$x_n = \frac{n}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. Vérifier que l'on a

$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 2$.

En déduire la nature de la série de terme général $\ln(x_n) - \ln(x_{n+1})$ et la nature de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

IV.E.4) La série entière égale à $\varphi'(x)$ pour

$x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ est-elle convergente pour $x = -\frac{1}{4}$?

φ est-elle dérivable en ce point ?

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES II

Le conditionnement d'une matrice est un réel qui mesure les erreurs d'approximation commises lors de la résolution d'un système linéaire dont les données ne sont pas connues avec précision. Plus ce réel est grand, moins le résultat est fiable. L'objectif de ce problème est de montrer que certaines matrices (appelées matrices de Hankel) ont un conditionnement qui croît exponentiellement avec leur taille.

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2. $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n et I_n l'élément unité de $GL_n(\mathbb{R})$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique que l'on notera $<.,.>$. L'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à n lignes et une colonne sera identifié à $\mathbb{R}^n$.
- La norme associée sera notée $\|.\|$, de sorte que pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{<x, x>}$.
- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $(e_1, \ldots, e_n)$.
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on notera $a_{i,j}$ ses coefficients.
- Si $c_1, \ldots, c_n$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on notera $[c_1, \ldots, c_n]$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne est le vecteur c_i, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- Si A est une matrice, on notera A^* sa transposée.

Question préliminaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

- On dit que A est positive si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^*AX \geq 0$.
- On dit que A est définie positive si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $X^*AX > 0$.

Montrer qu'une matrice symétrique positive (resp. définie positive) a ses valeurs propres positives (resp. strictement positives).

Filière TSI

Partie I - Norme N sur $M_n(\mathbb{R})$

I.A - Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on peut définir le réel $N(A)$ par $N(A) = \sup_{\|x\| = 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ et que l'on a alors $N(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

I.B - Montrer que N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et que l'on a

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ N(AB) \leq N(A)N(B)$$

I.C - Soit $c_1, \ldots, c_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$N([c_1, \ldots, c_n]) \geq \max_{i = 1 \ldots n} \|c_i\|$$

I.D - Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$N([0, \ldots, 0, v]) = \|v\|$$

I.E - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A^*A est symétrique positive et en déduire que

$$N(A) = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

où $\rho(A^*A)$ désigne la plus grande valeur propre de A^*A.

I.F - En déduire que : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ N(A^*A) = N(A)^2$.

Partie II - Conditionnement

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on appelle conditionnement de A le réel $\text{cond}(A) = N(A)N(A^{-1})$.

II.A - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) < 1$. On pose $S_m = \sum_{k=0}^{m} A^k$. Montrer que la suite (S_m) converge et en déduire que $I_n - A$ est inversible.

II.B - Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R}) \backslash GL_n(\mathbb{R})$. En remarquant que $B = A(I_n - A^{-1}(A - B))$ montrer que $\text{cond}(A) \geq \frac{N(A)}{N(A - B)}$.

II.C - Soit $A = [c_1, ..., c_n] \in GL_n(\mathbb{R})$ et $v = c_n - p(c_n)$ où $p \in L(\mathbb{R}^n)$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(c_1, ..., c_{n-1})$. On pose $M = [0, ..., 0, v]$. Montrer que $A - M$ n'est pas inversible et en déduire que

$$\text{cond}(A) \geq \frac{\|c_1\|}{\|v\|}$$

Partie III - Matrices de type VDM

On appelle **matrice de type VDM** une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & q_1x_1 & \cdots & \cdots & q_1x_1^{n-1} \\ q_2 & q_2x_2 & \cdots & \cdots & q_2x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_n & q_nx_n & \cdots & \cdots & q_nx_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{ où } (x_1, ..., x_n) \text{ et } (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On a donc $a_{i,j} = q_i x_i^{j-1}$ pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$.

On **suppose** dans cette partie que A est inversible et que

$\forall i \in \{1, ..., n\}$, $|x_i| \leq 1$. On note

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}, \text{ de sorte que}$$

$A = [q, Xq, X^2q, ..., X^{n-1}q]$. On note enfin

$v = X^{n-1}q - p(X^{n-1}q)$ où p est le projecteur orthogonal sur

$H = \text{Vect}(q, Xq, ..., X^{n-2}q)$

III.A - Montrer que

$$\forall u \in H, \|v\| \leq \left\|X^{n-1}q - u\right\|$$

et en déduire que pour tout polynôme P de degré $n-1$, unitaire, à coefficients réels

$$\|v\| \leq \|P(X)q\|$$

III.B - Montrer que pour tout polynôme P de degré $n-1$, unitaire, à coefficients réels

$$\text{cond}(A) \geq \frac{1}{\sup\limits_{x \in [-1,1]} |P(x)|}$$

III.C - On définit la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes par

$$\begin{cases} T_0(X) = 1 \\ T_1(X) = X \\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

et en déduire que

$$\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \leq 1$$

III.D - Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.E - En déduire que

$$\text{cond}(A) \geq 2^{n-2}$$

On **admet** que lorsque les x_i sont quelconques, on a

$$\text{cond}(A) \geq \frac{\sqrt{3}}{8} 2^{\frac{n}{2}}$$

Partie IV - Matrices de Hankel

IV.A - Soit $B \in GL_n(\mathbb{R})$. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt aux colonnes de B, montrer qu'il existe une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure telles que $B = QR$.

IV.B - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$A = B^*B$

et en déduire qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure inversible telle que $A = R^*R$.

On appelle **matrice de Hankel** une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & \alpha_{n+1} \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & a_{n+1} & \dots & \dots & \alpha_{2n-1} \end{pmatrix}$$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}$ sont des réels.

On a donc

$$a_{i,j} = \alpha_{i+j-1} \text{ pour tout } (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 .$$

A est symétrique et **on suppose** qu'elle est définie positive. On considère donc $R \in GL_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $A = R^* R$.

IV.C - On note $r_{1,1}^{-1} R = [c_1, \dots, c_n]$. Exprimer $< c_i, c_j >$ à l'aide des coefficients de A et de $r_{1,1}$ et en déduire que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n-1\}^2, \quad < c_{i+1}, c_j > \; = \; < c_i, c_{j+1} >$$

IV.D - Montrer que

$$\text{Vect}(c_1, \dots, c_{n-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

IV.E - Montrer qu'il existe $T \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} T(c_k) = c_{k+1} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n-1\} \\ T(e_n) = T^*(e_n) \end{cases}$$

IV.F - Montrer que $r_{1,1}^{-1} R = [e_1, Te_1, T^2 e_1, \dots, T^{n-1} e_1]$ et en déduire que

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n-2\}^2, \quad < T(T^i e_1), T^j e_1 > \; = \; < T^*(T^i e_1), T^j e_1 >$$

IV.G - Montrer que pour tout x et y de Vect $(e_1, Te_1, \dots, T^{n-2} e_1, e_n)$ on a

$$< Tx, y > \; = \; < T^* x, y >$$

IV.H - En déduire que T est symétrique.

IV.I - En diagonalisant T, montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice B de type VDM telles que $R = Q^* B$.

IV.J - En déduire que le conditionnement d'une matrice de Hankel A définie positive vérifie $\text{cond}(A) \geq 3 \cdot 2^{n-6}$.

IV.K - Un exemple : en considérant sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$) le produit scalaire

$$(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt,$$

montrer que la matrice

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

est une matrice de Hankel définie positive.

••• FIN •••

Mathématiques I

Préliminaires et objectif du problème

On rappelle que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué par les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

On munit l'algèbre $C([-1, 1], \mathbb{C})$ des fonctions à valeurs complexes continues sur le segment $[-1, 1]$ de la norme $\|\ \|_\infty$ de la convergence uniforme, définie par

$$(\forall f \in C([-1, 1], \mathbb{C})), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \quad .$$

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est identifié à la fonction polynomiale qu'il induit sur $[-1, 1]$.

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

- On dit que cette suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ elle est dominée par la suite $(n^{-k})_{n \in \mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire si

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ (\exists M_k \in \mathbb{R}_+)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ \lambda_n \leq \frac{M_k}{n^k}.$$

On note $\mathcal{E}_\infty$ l'ensemble des fonctions $f \in C([-1, 1], \mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

  - $\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
  - la suite $(\|f - Q_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

- On dit que cette suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle si, pour un certain réel $r \in\ ]0, 1[$, elle est dominée par la suite géométrique $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire si

$$(\exists r \in\ ]0, 1[),\ (\exists M \in \mathbb{R}_+),\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ \lambda_n \leq M r^n$$

On note $\mathcal{E}_{\exp}$ l'ensemble des fonctions $f \in C([-1, 1], \mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

  - $\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
  - la suite $(\|f - Q_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle.

Filière MP

Remarque : Une suite à décroissance rapide (resp. exponentielle) converge vers 0 mais n'est pas forcément décroissante.

L'objectif du problème est de montrer, en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev établies en Partie I, que les fonctions de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$ sont exactement les fonctions de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et de relier les fonctions f de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$ aux fonctions f dont la série de Taylor

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

en tout point $a \in [-1,1]$ converge vers $f(x)$ sur un voisinage de a.

a) Vérifier que si une suite est à décroissance exponentielle alors elle est à décroissance rapide.

b) Vérifier que les ensembles $\mathcal{E}_\infty$ et $\mathcal{E}_{\exp}$ sont des sous-espaces vectoriels de $C([-1, 1], \mathbb{C})$. Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre ces deux sous-espaces ?

c)

i) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ dont toutes les dérivées sont bornées sur $[-1, 1]$ par un même réel M. Montrer que $f \in \mathcal{E}_{\exp}$.

ii) Donner des exemples de fonctions de $\mathcal{E}_{\exp}$.

Partie I - Polynômes de Tchebychev

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose : $(\forall x \in [-1, 1]),\ T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

I.A - Premières propriétés des T_n

I.A.1) Montrer que T_n est une fonction polynomiale à coefficients entiers. Le polynôme associé est encore noté T_n et s'appelle le $n-$ième polynôme de Tchebychev.

I.A.2) Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4.

I.A.3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.

I.A.4) En déduire la parité, le degré et le coefficient dominant de T_n.

I.A.5) Écrire un algorithme pour calculer $T_n(X)$.

On pourra employer le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé ou un langage naturel non ambigu.

I.A.6) Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$, on a : $T_n(\cos t) = \cos nt$.

I.B - Calcul de normes

I.B.1) Calculer $\|T_n\|_\infty$.

I.B.2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\forall u \in \mathbb{R}), |\sin nu| \leq n|\sin u|$.

I.B.3) En déduire que $\|T_n'\|_\infty = n^2$.

I.C - Encadrement de $T_n(x)$ sur $[1, +\infty[$

I.C.1) Montrer que

$$(\forall r \in \mathbb{R}^*), \ T_n\left(\frac{r + r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n + r^{-n}}{2} .$$

I.C.2) Soit un réel $x \in [1, +\infty[$.

a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$, tel que $x = \frac{r + r^{-1}}{2}$.

b) En déduire que $1 \leq T_n(x) \leq \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$.

I.D - Équation différentielle vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n

I.D.1) En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0, \pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n .

I.D.2) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Déduire de la question I.D.1 que

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2^k k!}{(2k)!} .$$

Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$.

Partie II - Application des polynômes de Tchebychev à la majoration des polynômes et de leurs dérivées

On introduit la subdivision $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ du segment $[-1, 1]$ définie par :

$$\forall j \in [0, n], \ a_j = \cos\left[\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi\right] .$$

Par ailleurs, pour tout $i \in [0, n]$ on appelle $E_i = [0, n] \setminus \{i\}$ l'ensemble des entiers naturels autres que i qui sont inférieurs ou égaux à n .

Enfin, pour tout $i \in [0, n]$ on note

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j \in E_i} (X - a_j)}{\prod_{j \in E_i} (a_i - a_j)}$$

le i-ème polynôme élémentaire de Lagrange associé à la subdivision σ .

II.A - Majoration d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

II.A.1) Résoudre sur $[-1, 1]$ l'équation $|T_n(x)| = 1$ et calculer $T_n'(a_j)$ pour $j = n$, pour $j = 0$ puis pour $j \in [1, n-1]$.

II.A.2) Montrer que

$$T_n(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i(X).$$

II.A.3) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|.$$

II.A.4) Soit $P(X)$ un polynôme appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que

$$(\forall x \in [1, +\infty[), \ |P(x)| \leq \|P\|_\infty \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n.$$

II.B - Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

II.B.1) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que :

$$(\forall k \in [1, n]), \ T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left|L_i^{(k)}(x)\right|.$$

II.B.2) Soit $P(X)$ un polynôme appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$(\forall k \in [1, n]), \ (\forall x \in [1, +\infty[), \ \left|P^{(k)}(x)\right| \leq \|P\|_\infty T_n^{(k)}(x).$$

II.C - Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[-1, 1]$

Soit $P \in \mathbb{C}_n(X)$. On considère un entier $k \in [1, n]$.

II.C.1) On pose

$$(\forall \lambda \in [-1, 1]), \ P_\lambda(X) = P\left(\frac{\lambda + \varepsilon}{2} X + \frac{\lambda - \varepsilon}{2}\right) \text{ avec}$$

$\varepsilon = 1$ si $\lambda \in [0, 1]$ et $\varepsilon = -1$ si $\lambda \in [-1, 0[$.

Montrer que :

$$\left|P_\lambda^{(k)}(1)\right| = \left(\frac{|\lambda| + 1}{2}\right)^k \left|P^{(k)}(\lambda)\right|.$$

II.C.2) En déduire que $\left\|P^{(k)}\right\|_\infty \leq 2^k T_n^{(k)}(1) \|P\|_\infty$.

II.C.3) Montrer que :

$$\left\|P^{(k)}\right\|_\infty \leq 2^{2k} \frac{k!}{(2k)!} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|P\|_\infty$$

et que, si $k = 1$, on a la majoration plus fine $\|P'\|_\infty \leq 2n^2 \|P\|_\infty$.

Partie III - Détermination de l'ensemble $\mathfrak{L}_\infty$

On note $C_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. On munit $C_{2\pi}$ de deux normes, la norme quadratique N_2 définie pour $\varphi \in C_{2\pi}$, par

$$N_2(\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$ induite par le produit scalaire hermitien :

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi(t)}\psi(t)dt$$

et la norme N_∞ de la convergence uniforme définie par

$$N_\infty(\varphi) = \sup_{t\in[-\pi,\,\pi]} |\varphi(t)| \ .$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ on pose $e_k : t \mapsto e^{ikt}$. On rappelle que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de l'espace préhilbertien $(C_{2\pi}, N_2)$ et que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le $k-$ième coefficient de Fourier d'une fonction $\varphi \in C_{2\pi}$ est le complexe

$$c_k(\varphi) = (e_k|\ \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)e^{-ikt}dt \ .$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note τ_n le sous-espace vectoriel de $C_{2\pi}$ engendré par les fonctions e_k où $k \in [-n, n]$:

$$\tau_n = \text{vect}(e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n)\ ;\ \dim(\tau_n) = 2n+1 \ .$$

Soit $\varphi \in C_{2\pi}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(\varphi)e_k$$ le $n-$ième polynôme trigonométrique de Fourier de φ.

III.A - Propriétés liées aux normes N_2 et N_∞

III.A.1) On suppose que la série

$$\sum_{n\geq 1} \left(|c_n(\varphi)| + |c_{-n}(\varphi)|\right)$$ converge.

Montrer que la suite $(S_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers φ.

III.A.2) Soit $\varphi \in C_{2\pi}$ muni de la norme quadratique N_2. On rappelle que $S_n(\varphi)$ est la projection orthogonale de φ sur τ_n. En déduire que :

$$(\forall \omega \in \tau_n \setminus \{S_n(\varphi)\})\ ,\ N_2(\varphi-\omega) > N_2(\varphi - S_n(\varphi)) \ .$$

III.A.3) On suppose que la fonction $\varphi \in C_{2\pi}$ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, avec $p \geq 1$. Montrer que :

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^*)\ ,\ |c_k(\varphi)| \leq \frac{N_\infty(\varphi^{(p)})}{|k|^p} \ .$$

III.B - Étude d'une application linéaire

On rappelle que $C([-1,1],\mathbb{C})$ est muni de la norme $\|\ \|_\infty$. On note L l'application linéaire qui à toute fonction f de $C([-1,1],\mathbb{C})$, associe la fonction Lf de $C_{2\pi}$ définie par $\forall t\in\mathbb{R}\quad Lf(t)=f(\cos t)$.

Montrer que L est injective et calculer la norme subordonnée $|||L|||_\infty$ de L lorsque l'on munit $C_{2\pi}$ de la norme N_∞ puis la norme subordonnée $|||L|||_2$ de L lorsque l'on munit $C_{2\pi}$ de la norme N_2.

III.C - Propriétés liées aux coefficients de Fourier d'une fonction Lf

Dans cette section on considère une fonction f fixée dans $C([-1,1],\mathbb{C})$.

III.C.1) Vérifier que $c_{-k}(Lf)=c_k(Lf)$.

III.C.2) Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on ait $Q_n\in\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$(\forall k\geq 2),\ |c_k(Lf)|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\|f-Q_{k-1}\|_\infty .$$

III.C.3) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ on pose :

$$(\forall x\in[-1,1]),\ U_n(f)(x)=S_n(Lf)(\arccos x).$$

Montrer que :

$$U_n(f)=c_0(Lf)+2\sum_{k=1}^{n}c_k(Lf)T_k .$$

III.C.4) On suppose que la série $\sum_{k\geq 1}|c_k(Lf)|$ converge. Montrer que :

$$\|f-U_n(f)\|_\infty\leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty}|c_k(Lf)| .$$

III.D - Développement en série de Tchebychev d'une fonction f de $\mathcal{E}_\infty$

On suppose dans cette question que f est une fonction de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$.

III.D.1) Montrer que la suite $(|c_n(Lf)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.D.2) Montrer que :

$$(\forall x\in[-1,1]),\ f(x)=c_0(Lf)+2\sum_{n=1}^{+\infty}c_n(Lf)T_n(x)$$

et que la série de fonctions converge normalement sur $[-1,1]$.

III.D.3) En déduire que f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\forall x \in [-1, 1]),\ f^{(k)}(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf) T_n^{(k)}(x)$$

III.E - Achèvement de la détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$

On suppose dans cette question que f est une fonction de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.

III.E.1) Montrer que la suite $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.E.2) En déduire que $f \in \mathcal{E}_\infty$.

Partie IV - Étude de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$

IV.A - Caractérisation des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$

IV.A.1) Soit f une fonction de $C([-1, 1], \mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $f \in \mathcal{E}_{\exp}$.

b) La suite $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle.

IV.B - Développement en série de Tchebychev d'une fonction f de $\mathcal{E}_{\exp}$

On suppose dans cette question que f est une fonction de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$. Il existe donc un réel $r \in]0, 1[$ tel que :

$$(\exists M \in \mathbb{R}_+),\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ |c_n(Lf)| \leq M r^n.$$

IV.B.1) Justifier le fait que :

$$(\forall x \in [-1, 1]),\ f(x) = c_0(Lf) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf) T_n(x),$$

que la série de fonctions converge normalement sur $[-1, 1]$, que f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\forall x \in [-1, 1]),\ f^{(k)}(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf) T_n^{(k)}(x).$$

IV.B.2) En déduire que

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{2M}{1-r} \cdot \frac{k!}{[\lambda(r)]^k}, \text{ avec } \lambda(r) = \frac{(1-r)^2}{4r}.$$

IV.C - Développement en série de Taylor au voisinage de tout point $a \in [-1, 1]$ d'une fonction f de $\mathcal{E}_{\exp}$

On conserve les mêmes hypothèses qu'à la question précédente pour f. Soit un point $a \in [-1, 1]$.

Montrer que la série de Taylor :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

de f au point a converge vers $f(x)$ sur le voisinage $[-1, 1] \cap]a - \lambda(r), a + \lambda(r)[$ du point a.

IV.D - Inclusion stricte entre $\mathcal{E}_{\exp}$ et $\mathcal{E}_{\infty}$

Montrer que la fonction f définie par

$$(\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}),\ f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ et } f(0) = 0$$

appartient à $\mathcal{E}_{\infty}$ mais n'appartient pas à $\mathcal{E}_{\exp}$.

IV.E - Réciproque partielle concernant la détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes développable en série entière sur un intervalle ouvert $]-\rho, \rho[$, avec $\rho > 1$. Montrer que la restriction de f au segment $[-1, 1]$ appartient à $\mathcal{E}_{\exp}$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et orienté de sorte que la base canonique, notée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, soit orthonormale directe.

On a donc pour tout x, y et z réels : $(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Le produit scalaire sera noté : $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur non nul élément de E, on note $D_{\boldsymbol{u}}$, la droite vectorielle de base $\boldsymbol{u}$, $P_{\boldsymbol{u}}$ le plan vectoriel orthogonal à $D_{\boldsymbol{u}}$ et $S_{\boldsymbol{u}}$ le demi-tour par rapport à $D_{\boldsymbol{u}}$ c'est-à-dire la symétrie orthogonale par rapport à $D_{\boldsymbol{u}}$ ou encore la rotation vectorielle d'axe $D_{\boldsymbol{u}}$ et d'angle de mesure π.

Si θ est un nombre réel, on note R_θ la rotation vectorielle d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ orienté dans le sens du vecteur $\boldsymbol{k}$ et d'angle de mesure θ.

On rappelle qu'une rotation vectorielle de E ayant -1 comme valeur propre est un demi-tour.

On rappelle également l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in E^2,\ \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle^2 \leq \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2$$

et l'on admet que dans cette inégalité, l'égalité a lieu si et seulement si les deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires.

Partie I - Étude d'un cas particulier

Pour tout (x, y, z) élément de E, on pose : $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et l'on note Q_0 l'ensemble suivant : $Q_0 = \{(x, y, z) \in E \mid q(x, y, z) = 0\}$.

I.A - Une étude de Q_0

I.A.1) Déterminer quelques éléments de symétrie de Q_0

I.A.2) Déterminer et dessiner l'intersection de Q_0 avec le plan $P_{\boldsymbol{j}}$.

I.A.3)

a) Démontrer que pour tout θ réel : $R_\theta(Q_0) \subset Q_0$.

b) En déduire que, pour tout θ réel, Q_0 est invariant par R_θ c'est-à-dire : $R_\theta(Q_0) = Q_0$.

I.A.4) Donner la nature géométrique de Q_0.

Filière MP

I.B - Automorphismes orthogonaux laissant D_u invariant

On note K l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant $D_{\boldsymbol{k}}$, c'est-à-dire : $K = \{\varphi \in O(E) |\ \varphi(D_{\boldsymbol{k}}) = D_{\boldsymbol{k}}\}$

I.B.1) Donner quelques éléments de K.

I.B.2) Soit φ un élément quelconque de K.

a) Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de φ.

b) Démontrer : $\varphi(\boldsymbol{k}) \in \{-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\}$.

c) Déterminer l'ensemble K^+ des rotations vectorielles éléments de K.

I.B.3) On pose $K^- = \{-r | r \in K^+\}$. Démontrer que $K = K^+ \bigcup K^-$.

I.C - Automorphismes orthogonaux laissant Q_0 invariant

On note K_0 l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant Q_0, c'est-à-dire : $K_0 = \{\varphi \in O(E) |\ \varphi(Q_0) = Q_0\}$.

I.C.1) Démontrer que K_0 est un sous-groupe de $O(E)$.

I.C.2)

a) Reconnaître, pour tout θ réel, l'endomorphisme $R_\theta \circ S_{\boldsymbol{i}}$.

b) Démontrer : $K^+ \subset K_0$.

c) Démontrer : $K \subset K_0$.

I.C.3) Soit φ un élément quelconque de K_0.

a) Démontrer que pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ élément de Q_0 tel que : $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$, l'on a : $\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{k} \rangle^2 = 1$.

b) On note $\boldsymbol{u}$ un vecteur quelconque unitaire élément de $P_{\boldsymbol{k}}$.

i) Observer que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k} \in Q_0$, puis démontrer : $\langle \varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle^2 = 1$.

ii) En faisant intervenir le vecteur $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{k}$, en déduire : $\langle \varphi(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{k} \rangle \langle \varphi(\boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle = 0$

iii) On suppose $\langle \varphi(\boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle = 0$; démontrer qu'alors $\varphi(\boldsymbol{u})$ est colinéaire à $\boldsymbol{k}$. Est-ce cohérent ?

iv) En déduire : $\varphi(P_{\boldsymbol{k}}) = P_{\boldsymbol{k}}$.

I.C.4) Démontrer que $K_0 = K$.

I.D - Composition et invariance

On pose : $C = \{\varphi \in O(E) |\ q \circ \varphi = q\}$.

I.D.1) Démontrer $C = K$.

I.D.2)

a) Justifier que q est une forme quadratique sur E et donner sa matrice M dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

b) Reconnaître l'endomorphisme σ de matrice M dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

I.D.3) Démontrer que tout élément φ de C commute avec σ c'est-à-dire vérifie $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$.

I.D.4) Soit φ un élément de $O(E)$ qui commute avec σ. Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de φ.

I.D.5) En déduire $C = \{\varphi \in O(E) |\ \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma\}$.

Partie II - Une généralisation

On note U un endomorphisme symétrique de E et l'on pose pour tout vecteur $\boldsymbol{X}$ de E : $f(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{X} | U(\boldsymbol{X}) \rangle$. Pour tout a réel, on pose ; $F_a = \{\boldsymbol{X} \in E \mid f(\boldsymbol{X}) = a\}$. On veut déterminer les endomorphismes U tels que toutes les surfaces F_a soient de révolution d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ c'est-à-dire tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_a) = F_a \quad (*).$$

II.A - Démontrer que $(*)$ est équivalente à $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta = f$.

II.B - On suppose ici : $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$. Démontrer qu'alors $(*)$ est vérifiée.

II.C - On suppose maintenant que $(*)$ est vérifiée et l'on veut démontrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$.

II.C.1) Déterminer les endomorphismes symétriques V de E tels que :
$\forall \boldsymbol{X} \in E, \langle \boldsymbol{X} | V(\boldsymbol{X}) \rangle = 0$.

II.C.2) Démontrer que si V et V' sont des endomorphismes symétriques de E, il en est de même de $V - V'$.

II.C.3) Démontrer que pour tout réel θ l'endomorphisme $R_\theta^{-1} \circ U \circ R_\theta$ est symétrique.

II.C.4) Conclure.

II.D - On suppose que U commute avec toutes les rotations R_θ.

II.D.1) Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de U. En déduire : $U(P_{\boldsymbol{k}}) \subset P_{\boldsymbol{k}}$.

II.D.2) Démontrer que la matrice M de U dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ est du type :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

II.D.3) En déduire que $(*)$ est vérifiée si et seulement si M s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$ Que vaut alors $f(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) élément de E ?

II.E - Un résultat plus fort

On suppose dans cette section que F_1 est non vide et de révolution d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ c'est-à-dire que U est tel que :

$$\begin{cases} F_1 \neq \varnothing \\ \forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_1) = F_1 \end{cases} \quad (1)$$

et on désigne par $\boldsymbol{X}$ un vecteur quelconque de E.

II.E.1) On suppose $f(\boldsymbol{X}) > 0$; démontrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta(\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X})$.

II.E.2) On suppose $f(\boldsymbol{X}) \leq 0$. On considère alors un vecteur $\boldsymbol{X}_1$ élément de F_1 et pour tout réel t, on pose $g(t) = f(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1)$.

a) Démontrer que g est une fonction polynômiale de degré 2 que l'on précisera. En déduire qu'il existe un réel t_0 tel que :

$\forall t \in [t_0; +\infty[, g(t) > 0$.

b) Démontrer pour tout réel θ :

$\forall t \in [t_0; +\infty[, f(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1) = f \circ R_\theta(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1)$.

En déduire que :

$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\boldsymbol{X}) = f \circ R_\theta(\boldsymbol{X})$.

II.E.3) En déduire quels sont les endomorphismes symétriques U satisfaisant aux conditions (1) et reconnaître toutes les surfaces F_1 associées.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations et objectifs du problème

Pour toutes les questions géométriques on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne canonique et de son repère orthonormé naturel. Le but de ce problème est d'étudier quelques caractéristiques du mouvement sur l'axe Ox d'un mobile qui se trouve à l'origine O au temps initial $t = 0$ et au temps $t = 1$ et dont la vitesse initiale est nulle.

- L'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}$. Si (Φ) est une famille finie d'éléments de $\mathscr{C}$, le sous-espace de $\mathscr{C}$ qu'engendre (Φ) est noté $\mathrm{Vect}(\Phi)$.
- La norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}$ est notée $\| \ \|_\infty$.
- On note $\langle \ | \ \rangle$ le produit scalaire sur $\mathscr{C}$ défini par :

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

L'orthogonalité entre éléments de $\mathscr{C}$ est toujours relative à ce produit scalaire dont la norme associée est notée $\| \ \|_2$. L'orthogonal d'un sous-espace $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}$ est noté $\mathscr{E}^\perp$.

- On désigne par u l'élément de $\mathscr{C}$ défini par $u(t) = \sqrt{3}(1-t)$ et par $\mathscr{H}$ l'orthogonal de la droite $\mathrm{Vect}(u)$.
- On appelle *mouvement admissible* toute application ξ de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\xi(0) = \xi'(0) = \xi(1) = 0$$

On note $\mathscr{A}$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ constitué des mouvements admissibles.

On établit d'abord des résultats préliminaires très proches du cours et utiles dans tout le problème. Dans la partie II on calcule la meilleure borne pour la moyenne quadratique de la vitesse en fonction de l'accélération. La partie I fait établir des résultats qui servent dans la fin de la partie II ; on peut admettre ces résultats pour traiter la partie II.

Filière PSI

Dans tout le problème, on note, pour $k \in \mathbb{N}$, $\omega_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et e_k l'élément de $\mathscr{C}$ défini par :

$$\forall t \in [0,1],\ e_k(t) = \sqrt{2}\cos(\omega_k t)$$

On pose, par ailleurs, $\Omega =]0,+\infty[- \{\omega_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, complémentaire de $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans $]0,+\infty[$.

Résultats préliminaires

A - Soit $h \in \mathscr{C}$, $h \neq 0$. Justifier l'égalité

$$\mathscr{C} = \mathrm{Vect}(h) \oplus \mathrm{Vect}(h)^{\perp}$$

et montrer soigneusement que $(\mathrm{Vect}(h)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(h)$.

On note Π_h le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(h)^{\perp}$.

Démontrer que, pour $f \in \mathscr{C}$:

$$\Pi_h(f) = f - \frac{\langle f|h\rangle}{\|h\|_2^2} h$$

B -Montrer que l'application $\xi \mapsto \xi''$ est un isomorphisme de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{H}$ dont l'isomorphisme réciproque est défini par

$$z \mapsto \left(t \mapsto \int_0^t (t-s)z(s)ds\right)$$

Partie I - Comportement asymptotique de racines d'équations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les coefficients de Fourier en sinus et cosinus d'une fonction réelle f, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 4-périodique, donnés par :

$$a_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx \ ; \qquad b_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx \ .$$

I.A - Démontrer que $(e_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathscr{C}$.

I.B - Pour $f\in\mathscr{C}$, on note $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 4-périodique et paire, telle que, pour $t\in]-2,2]$ on ait :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t\in[0,1] \\ 0 & \text{si } t = 1 \\ -f(2-t) & \text{si } t\in]1,2] \end{cases}$$

I.B.1) Donner, sans démonstration, quelques éléments de symétrie du graphe de $\tilde{f}$. Montrer que $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. À quelle condition est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

I.B.2) Expliciter, pour $k\in\mathbb{N}$, $a_{2k+1}(\tilde{f})$ en fonction $\langle f|e_k\rangle$. Calculer les autres coefficients de Fourier de $\tilde{f}$.

I.B.3) Montrer, en citant précisément les théorèmes utilisés, que, si $f\in\mathscr{C}$:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_k|f\rangle^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{k=0}^{n}\langle f|e_k\rangle e_k\right\|_2 = 0$$

I.B.4) Montrer de même que, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et si $f(1) = 0$, alors, pour tout $t\in[0,1]$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\langle f|e_k\rangle e_k(t)$$

La série de fonctions du second membre converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

I.B.5) En appliquant les résultats des deux questions précédentes aux fonctions u et $t\mapsto\sin(\omega(t-1))$, prouver les relations :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}$$

et, pour $\omega\in\Omega$

$$\tan\omega = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\omega}{\omega_k^2-\omega^2}$$

I.B.6) On note ϕ la fonction définie, pour $\omega\in\Omega$, par :

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\omega}[\omega - \tan\omega]$$

Démontrer que, pour $\omega \in \Omega$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2-\omega_k^2)} = \phi(\omega)$$

I.C - On pose pour $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\phi_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2-\omega_k^2)}$$

I.C.1) Montrer que, pour $k \in \{0, n-1\}$, ϕ_n a une unique racine dans l'intervalle $]\omega_k, \omega_{k+1}[$. On note μ_n la plus petite de ces racines, c'est-à-dire la racine de ϕ_n appartenant à l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$.

I.C.2) Comparer ϕ_n et ϕ_{n+1} sur $]\omega_0, \omega_1[$. En déduire que la suite $(\mu_n)_{n \geq 2}$ converge en décroissant vers une limite $\mu \in [\omega_0, \omega_1[$.

I.C.3) Montrer que la suite $(\phi - \phi_n)_{n \geq 2}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]\omega_0, \omega_1[$. En conclure que μ est différent de ω_0 et est l'unique racine de ϕ dans l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$.

Calculer une valeur approchée de μ à 10^{-6} près en justifiant l'algorithme utilisé.

Partie II - Estimation de la vitesse en moyenne quadratique

On se propose, dans cette partie, d'établir que, si $\xi \in \mathscr{A}$:

$$\|\xi'\|_2 \leq \frac{1}{\mu}\|\xi''\|_2$$

où μ a été défini dans la question I.C.2, et que cette constante $\frac{1}{\mu}$ est la plus petite possible valable quel que soit $\xi \in \mathscr{A}$.

- L'entier naturel n est toujours supposé supérieur ou égal à 2.
- Pour $h \in \mathscr{C}$, la notation Π_h est celle définie dans la question A - des préliminaires.

II.A - Pour $z \in \mathscr{C}$, on note $T(z)$ la fonction y définie sur $[0,1]$ par :

$$y(t) = (1-t)\int_0^t z(s)ds + \int_t^1 (1-s)z(s)ds$$

II.A.1) Montrer que $y = T(z)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} y'' = -z \\ y(1) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

II.A.2) Prouver que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$ et que, si z_1 et z_2 appartiennent à $\mathscr{C}$,

$$\langle T(z_1) | z_2 \rangle = \langle z_1 | T(z_2) \rangle$$

II.A.3) Montrer que e_k est un vecteur propre de T pour une valeur propre à préciser en fonction de ω_k. Déduire de la question I.B.3 que, pour tout $z \in \mathscr{C}$:

$$\|T(z)\|_2 \leq \frac{4}{\pi^2}\|z\|_2$$

et donner un cas d'égalité avec $z \neq 0$.

II.B - On note u_n la projection orthogonale de u sur $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{H}_n = \mathscr{H} \cap \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

II.B.1) Montrer que $\mathscr{H}_n = \mathrm{Vect}(u_n)^\perp \cap \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

Calculer les coordonnées de u_n dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et préciser la dimension de $\mathscr{H}_n$.

II.B.2) Montrer que $\mathscr{H}_n$ est stable par l'endomorphisme $\Pi_{u_n} \circ T$. On note T_n l'endomorphisme de $\mathscr{H}_n$ induit par $\Pi_{u_n} \circ T$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall z \in \mathscr{H}_n, T_n(z) = \Pi_{u_n} \circ T(z)$$

Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de vecteurs de $\mathscr{H}_n$:

$$\langle T_n(z_1) | z_2 \rangle = \langle z_1 | T_n(z_2) \rangle$$

En déduire que T_n est diagonalisable.

II.B.3) *Calcul des valeurs propres de T_n.*

Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, par ses coordonnées dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$, l'unique vecteur $z \in \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ tel que :

$$T(z) - \frac{z}{\omega^2} = \frac{u_n}{\sqrt{6}}$$

À quelle condition sur ω, z appartient-il à $\mathscr{H}_n$? En déduire que les valeurs propres de T_n sont les réels de la forme $\frac{1}{\omega^2}$ où ω est un zéro de la fonction ϕ_n définie à la question I.C.

II.B.4) Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{H}_n$:

$$\langle z|T(z)\rangle \leq \frac{1}{\mu_n}\langle z|z\rangle \qquad (\mu_n \text{ a été défini à la question I.C.1).}$$

II.C - Soit $z \in \mathscr{H}$. On pose :

$$z_n = \Pi_{u_n}\left(\sum_{k=0}^{n} \langle z|e_k\rangle e_k\right)$$

II.C.1) Montrer que :

$$z_n \in \mathscr{H}_n,\ \lim_{n\to\infty} \|z - z_n\|_2 = 0,\ \lim_{n\to\infty} \|T(z) - T(z_n)\|_2 = 0$$

En déduire que

$$\langle z|T(z)\rangle \leq \frac{1}{\mu}\langle z|z\rangle$$

II.C.2) Montrer que si C_2 est un réel tel que :

$$\forall z \in \mathscr{H},\ \langle z|T(z)\rangle \leq C_2\langle z|z\rangle$$

alors $C_2 \geq \frac{1}{\mu^2}$.

II.D - Soit $\xi \in \mathscr{A}$. Montrer que $\langle \xi'|\xi'\rangle = \langle \xi''|T(\xi'')\rangle$ et conclure.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Les deux premières parties de ce problème se proposent d'étudier deux types d'approximation d'une fonction sur un segment, et de les comparer. La troisième partie munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n d'une structure euclidienne et étudie certaines propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange relativement à cette structure. La troisième partie est indépendante des deux premières.

Partie I - Matrices tridiagonales

Notations : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$A_n = M_n[2, 4, \ldots, 4, 2] \; ; \qquad (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 4, \; \alpha_n = 2)$$

$$B_n = M_n[2, 4, \ldots, 4] \; ; \qquad (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$$

$$C_n = M_n[4, \ldots, 4] \; ; \qquad (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$$

I.A - Méthode du pivot

Dans cette section on pose

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

et on se propose de résoudre le système $(\mathscr{S}_n)$ $A_{n+1}X = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, par la méthode du pivot de Gauss **sans échange de lignes**.

Filière PSI

I.A.1) Cas $n = 2$.

Résoudre par cette méthode le système $(\mathscr{S}_2)$.
On remarquera en particulier que les pivots successifs valent :

$$p_0 = 2 \ ; \ p_1 = \frac{7}{2} \ ; \ p_2 = \frac{12}{7}.$$

I.A.2) On revient au cas général.

a) Écrire une procédure de résolution du système

$$A_{n+1}X = B,$$

suivant l'algorithme du pivot de Gauss sans échange de lignes.

b) On note $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ la suite des pivots. Vérifier que :

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-2\}, \quad p_{k+1} = 4 - \dfrac{1}{p_k} \\ p_n = 2 - \dfrac{1}{p_{n-1}} \end{cases}$$

c) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

d) En déduire que $(\forall k \in \{0, \ldots, n-1\})$ $(2 \leq p_k \leq 2 + \sqrt{3})$ et que A_{n+1} est inversible.

I.B - Calculs explicites

Notation : pour toute matrice M, on note $det\ M$ son déterminant.

I.B.1) On pose $c_0 = 1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 15$ et pour tout $n \geq 3$, $c_n = det\ C_n$, $b_n = det\ B_n$, $a_n = det\ A_n$. Montrer que la suite $(c_n)_{n \geq 3}$ vérifie une relation de récurrence simple ; en déduire $(c_n)_{n \geq 3}$ puis $(b_n)_{n \geq 3}$ et $(a_n)_{n \geq 3}$.

I.B.2) En déduire que A_n est inversible.

I.B.3) Calculer explicitement les valeurs propres de A_3 et C_3.

I.B.4) **Localisation des valeurs propres**.

a) Soit λ un réel tel que :

$$|\lambda - \alpha_1| > 1$$

$$|\lambda - \alpha_n| > 1$$

et, $\forall k \in \{2, 3, \ldots n-1\} \quad |\lambda - \alpha_k| > 2$.

Montrer qu'alors $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] - \lambda I$ est inversible.

b) En déduire que les valeurs propres de $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ appartiennent à la réunion des intervalles

$$[\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n-1} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \cup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]$$

et que A_n , B_n et C_n sont inversibles.

Partie II - Fonctions splines cubiques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h = \frac{1}{n}$ et pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$.

On note S l'ensemble des fonctions (dites splines cubiques) de classe C^2 sur $[0, 1]$ telles que : $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$ la restriction de s à $[x_i, x_{i+1}]$ est polynomiale de degré ≤ 3 .

II.A - Montrer que l'application :

$$S \to \mathbb{R}^{n+3}$$

$$s \mapsto \left(s(0), s'(0), s''(0), s_d^{(3)}(0), s_d^{(3)}\left(\frac{1}{n}\right), \; s_d^{(3)}\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, s_d^{(3)}\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

On rappelle que, si $x \in \mathbb{R}$, $s_d^{(3)}(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{s''(x+t) - s''(x)}{t}$ désigne la dérivée à droite d'ordre 3 en x .

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel S ?

II.B - f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$.

II.B.1) Soit $(m_0, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall i \in \{1, \ldots n\}$ la restriction de g à $[x_{i-1}, x_i]$ est polynomiale de degré ≤ 3 ,

(ii) $\forall i \in \{0, \ldots n\}$ $g(x_i) = f(x_i)$,

(iii) $g''(0) = m_0$; $\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x \leq x_i}} g''(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x \geq x_i}} g''(x) = m_i$; $g''(1) = m_n$.

b) Établir que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on a :

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + u_i(x - x_{i-1}) + v_i$$

où u_i et v_i sont des réels que l'on exprimera en fonction de m_{i-1}, m_i, h, $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$.

II.B.2) Montrer que :

$$\begin{cases} g \in S \\ g'(0) = f'(0) \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A_{n+1}M = B,$$

où $M = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$, $A_{n+1} = M_{n+1}[2, 4, \ldots, 4, 2]$ selon les notations de la partie I, et B est une matrice colonne dépendant des $f(x_i)$, $(i \in \{0, \ldots, n-1\})$, $f'(0)$, $f'(1)$ et h.

II.B.3) En déduire qu'il existe une et une seule fonction spline cubique $g \in S$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \ldots, n\},\ g(x_i) = f(x_i) \\ g'(0) = f'(0)\ ;\ g'(1) = f'(1) \end{cases}.$$

II.B.4) Retrouver la valeur de la dimension de S.

On peut montrer et on **admettra** ici que si f est de classe C^4 sur $[0, 1]$,

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \leq \frac{13}{8n^4}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty$$

II.C - Interpolation de Lagrange-Sylvester

II.C.1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale h, de degré $\leq n+2$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \ldots, n\},\ h(x_i) = f(x_i) \\ h'(0) = f'(0)\ ;\ h'(1) = f'(1) \end{cases}$$

II.C.2) On peut montrer, et on **admettra** ici que, si f est de classe C^{n+3} sur $[0, 1]$:

$$\|f - h\|_\infty \leq \frac{\left\|f^{(n+3)}\right\|_\infty}{(n+3)\,!} \|M_n\|_\infty \text{ où } M_n(x) = x(x-1)\prod_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right).$$

Comparer les deux méthodes d'approximation précédentes (splines cubiques et Lagrange-Sylvester) du double point de vue de la simplicité et de la précision, d'abord pour $n = 1$, puis pour $n \geq 2$.

Partie III - Un exemple de structure euclidienne

III.A - On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour P, $Q \in E$, on pose :

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$$

III.A.1) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire euclidien sur E. On notera $\|P\|_2$ la norme du polynôme P associée au produit scalaire précédent.

III.A.2) Montrer qu'il existe une unique famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ de E telle que :

$$\forall (i, j) \in \{0, ..., n\}^2 \qquad L_i(j) = \delta_{i,j}$$

où la fonction δ désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Vérifier que la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormée de E. Elle sera notée $\mathscr{B}$. Que peut-on dire du degré du polynôme $X^n + (-1)^{n+1} n!\, L_0$?

III.A.3) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un vecteur N de E orthogonal (au sens du produit scalaire précédemment défini) à l'hyperplan H de E formé des polynômes de degré $\leq n - 1$.

Si $P \in E$, on note

$$d(P, H) = \inf_{Q \in H} \|P - Q\|_2$$

la distance du polynôme P à l'hyperplan H.

Montrer que $d(X^n, H) = n!\; d(L_0, H)$.

III.A.4) En remarquant que : $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer

$$\sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^2$$

à l'aide d'un seul coefficient binômial.

III.A.5) En déduire la valeur de $d(X^n, H)$.

III.B - Étude d'un endomorphisme de E

On note

$$\Pi(X) = \prod_{i=0}^{n} (X - i)$$

et on fixe un polynôme M_0 dans E.

On considère l'application φ de E dans E, qui à tout P de E associe le reste de la division euclidienne de $P \times M_0$ par Π.

III.B.1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

III.B.2) Exprimer $\varphi(L_i)$ en fonction de L_i. En déduire que φ est un endomorphisme autoadjoint de E.

III.B.3) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M_0 pour que φ soit un automorphisme orthogonal de E. Quelle est alors sa nature géométrique ?

III.B.4) On note $\mathscr{B}_E(0, 1) = \{P \in E \ ; \ \|P\|_2 \leq 1\}$.

Exprimer

$$\min_{P \in \mathscr{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P) \quad \text{et} \quad \max_{P \in \mathscr{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P)$$

à l'aide des $M_0(i)$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

La première partie de ce problème est consacrée à la description d'une procédure géométrique qui aboutit naturellement à la construction d'une fonction continue $x :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ que l'on étudie sommairement à la Partie II. La troisième partie concerne les propriétés de dérivabilité des fonctions continues $2\pi-$périodiques ayant une série de Fourier lacunaire. Enfin, à la Partie IV on combine les résultats des parties I et III pour montrer que la fonction x n'est dérivable en aucun point de $]0,\pi[$.

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et on désigne par $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et $2\pi-$périodiques.

Si $f \in C_{2\pi}$ on rappelle que ses coefficients de Fourier sont donnés pour $n \in \mathbb{Z}$ par $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$, la série de Fourier (formelle) de f étant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$.

Partie I - Définition de la fonction x

I.A - On suppose l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. On définit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$T(x,x,0) = (x,x,0)$,

$T(x,y,z) = (x',y',z')$ où $x' = y$ et (y',z') est la projection orthogonale de $(y,-z)$ sur la droite passant par $(x,0)$ et (y,z) si $(x,y,z) \neq (x,x,0)$.

I.A.1) On suppose $x \neq y$, $z \neq 0$ et l'on pose $A = (x,0)$, $B = (y,z)$, $C = (y,-z)$, $A' = (x',0)$, $B' = (y',-z')$, $C' = (y',z')$ où $(x',y',z') = T(x,y,z)$.

Que représentent les points A', B', C' par rapport au triangle ABC ?

I.A.2) Montrer que si $(x,y,z) \neq (x,x,0)$ alors

$$y'-x' = -\frac{2z^2(y-x)}{(y-x)^2+z^2},\quad z' = z\frac{(y-x)^2-z^2}{(y-x)^2+z^2}.$$

I.B - Pour $t \in]0,\pi[$ on pose $X_0(t) = (0,1,\operatorname{cotan} t)$ et on définit par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ la suite $X_n(t) = (x_n(t),y_n(t),z_n(t))$ par $X_{n+1}(t) = T(X_n(t))$.

I.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in]0,\pi[$. Montrer que, si l'on a $z_n(t) = 0$, alors $z_{n+1}(t) = 0$ et $y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = 0$.

Filière PC

Soit $N \in \mathbb{N}^*$; on suppose que $t \in]0,\pi[$ est tel que $z_n(t) \neq 0$ si $0 \leq n \leq N-1$.

a) Montrer que, pour ces valeurs de n,

$$\frac{y_n(t) - x_n(t)}{z_n(t)} = \tan(2^n t) .$$

b) On suppose de plus à présent que $z_N(t) = 0$. Montrer que :

$$\left(\frac{y_{N-1}(t) - x_{N-1}(t)}{z_{N-1}(t)} \right)^2 = 1 \text{ et que } \cos(2^N t) = 0 .$$

I.B.2) Montrer que

$$\forall n \geq 0 , \ \forall t \in]0,\pi[, \ y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = -2\cos^2(2^n t)(y_n(t) - x_n(t)) .$$

I.B.3) En déduire :

$$\forall n \geq 0 , \ \forall t \in]0,\pi[, \ x_{n+1}(t) - x_n(t) = (-1)^n \frac{\sin^2(2^n t)}{2^n \sin^2(t)} .$$

I.B.4) On pose pour $n \geq 0$ $u_n(t) = \sin^2(t) x_n(t)$. Montrer que la suite (u_n) converge simplement vers une fonction u continue sur $]0,\pi[$. En déduire que la suite (x_n) converge simplement vers une fonction x continue sur $]0,\pi[$.

I.B.5) Montrer que la fonction u se prolonge en une fonction paire (que l'on appellera encore u) de $C_{2\pi}$ dont on déterminera la série de Fourier.

I.B.6) Calculer $z_n(t)$ pour $n \geq 0$, $t \in]0,\pi[$ et étudier la limite simple de cette suite de fonctions sur $]0,\pi[$.

Partie II - Étude de quelques propriétés de la fonction x

II.A - Calculer $x(\pi/4)$, $x(\pi/3)$, $x(\pi/2)$; montrer que $x(\pi - t) = x(t)$, $t \in [0, \pi[$.

II.B -

II.B.1) On pose pour $n \geq 1$, $t \in]0,\pi[$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^k \sin^2\left(\frac{t}{2^k}\right) .$$

Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$\forall t \in]0,\pi[\ ,\ 2^n u\left(\frac{t}{2^n}\right) = (-1)^n (u(t) + \varphi_n(t)) .$$

II.B.2) Montrer que la suite (φ_n) converge simplement sur $]0,\pi[$ vers une fonction φ de classe C^1.

II.C -

II.C.1) Montrer que les suites

$$\alpha_n = 2^{-2n} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+2}}\right) , \beta_n = 2^{-(2n+1)} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+3}}\right) \text{ sont convergentes :}$$

déterminer leurs limites puis une valeur approchée de celles-ci à 10^{-3} près.

II.C.2) Montrer que $\lim_{n\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n}}\right) = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+1}}\right) = +\infty$ et qu'il existe une suite de nombres $t_n \in]0,\pi[$ convergeant vers 0 telle que $x(t_n) = 0$.

Partie III - Séries de Fourier lacunaires

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$ et $I_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)^4 dt$.

III.A -

III.A.1) Montrer que : $\forall t \in]-\pi\ ,\ \pi\ [\backslash\{0\}\ ,\ D_N(t) = \dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

III.A.2) Montrer que : $I_N \geq \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t^4} dt$

et en déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall N \geq 0$, $I_N \geq CN^3$.

Dans toute la suite de la Partie III, $a = (a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 0} |a_n| < +\infty$.

III.B -

III.B.1) Pour $n \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ on pose $v_n(t) = 2a_n \cos 2^n t$.

Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $v \in C_{2\pi}$ dont on déterminera la série de Fourier.

Désormais v désigne cette fonction (associée à la suite a) et t_0 un réel tel que v est dérivable en t_0 (on suppose l'existence d'un tel t_0).

Si $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on définit $H_{n_0}(t) = e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}[v(t+t_0) - v(t_0)\cos t - v'(t_0)\sin t]$.

III.B.2) Montrer que $H_{n_0} \in C_{2\pi}$ et que H_{n_0} est dérivable en 0. Calculer $H_{n_0}(0)$ et $H'_{n_0}(0)$.

III.B.3) Calculer $\hat{H}_{n_0}(0)$ à l'aide de la suite a et montrer que $\hat{H}_{n_0}(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}^* \cap [-2^{n_0-1}+1, 2^{n_0}-1]$.

III.C - On suppose désormais $n_0 \geq 6$. Soit $N = 2^{n_0-4}$ et $g_N(t) = I_N^{-1} D_N(t)^4$.

III.C.1) Montrer que pour tout nombre entier j tel que $-4N \leq j \leq 4N$, il existe α_j tel que :

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ g_N(t) = \sum_{j=-4N}^{4N} \alpha_j e^{ijt}.$$

III.C.2) Calculer

$\int_{-\pi}^{\pi} H_{n_0}(t) g_N(t) dt$ à l'aide de la suite a.

III.D - On pose $K(t) = \left|\frac{H_{n_0}(t)}{t}\right|$ si $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, $K(t) = 0$ si $t = 0$ ou $|t| > \pi$ (noter que la fonction K ne dépend pas de n_0).

III.D.1) Montrer que K est bornée sur $\mathbb{R}$. Étudier sa limite en 0.

III.D.2) Montrer qu'il existe $C' > 0$ telle que

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq C' \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{t}{N+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin^4 t}{|t|^3} dt.$$

III.D.3) Étudier la limite de la suite $(2^n a_n)_{n \geq 0}$.

Partie IV -

Utiliser les résultats des parties I et III pour montrer que la fonction x définie en Partie I n'est dérivable en aucun point de $]0,\pi[$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Le but du problème est la recherche des plans stables par un endomorphisme, en relation avec la notion de produit vectoriel

Dans tout le problème,

- les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^6$ sont munis de leur produit scalaire canonique et orientés par leur base canonique,
- on désigne par $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel euclidien, par $\|.\|$ la norme associée,
- on désigne par $\wedge$ le produit vectoriel défini pour un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Les vecteurs dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont notés en colonnes, mais on leur préférera la notation ${}^t(\ldots)$, transposée d'une ligne, lorsqu'ils seront de grande taille.

Partie I - Étude dans E euclidien orienté de dimension 3

On considère dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormale directe. Si u est dans $\mathscr{L}(E)$ on définit $\widetilde{u}$, endomorphisme de E, par sa restriction à $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases} \widetilde{u}(e_1) = u(e_2) \wedge u(e_3) \\ \widetilde{u}(e_2) = u(e_3) \wedge u(e_1) \\ \widetilde{u}(e_3) = u(e_1) \wedge u(e_2) \end{cases}$$

I.A - Dans cette question on considère les endomorphismes $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E)$, de matrices respectives U_1 et U_2 dans la base $\mathscr{B}$:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\widetilde{U}_1$ et $\widetilde{U}_2$, matrices respectives dans la base $\mathscr{B}$ de $\widetilde{u}_1$ et $\widetilde{u}_2$.

Filière PC

I.B - Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $\widetilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$. Montrer que si v dans $\mathscr{L}(E)$ vérifie $\forall (x,y) \in E^2$, $v(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$, alors $v = \widetilde{u}$.

I.C - Déterminer $\widetilde{Id}_E$.
Si u et v sont dans $\mathscr{L}(E)$, montrer que $u \widetilde{\circ} v = \widetilde{u} \circ \widetilde{v}$.
Si u est inversible, en conclure que $\widetilde{u}$ est inversible et en exprimer l'inverse.

I.D - Si u appartient à $\mathscr{L}(E)$ et a comme matrice U dans la base $\mathscr{B}$, exprimer la matrice $\widetilde{U}$ de $\widetilde{u}$ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de $\mathrm{com}(U)$, comatrice de la matrice U.
Montrer que $u^* \circ \widetilde{u} = \det(u) Id_E$ où u^* désigne l'adjoint de u.

Montrer que $\widetilde{u}$ et u^* commutent.

Montrer que $\widetilde{u}^* = (\widetilde{u})^*$.

I.E - On considère toujours u dans $\mathscr{L}(E)$.
I.E.1) Dans le cas où u est inversible, déterminer une expression de $\det(\widetilde{u})$ en fonction de $\det(u)$, et de $(\widetilde{u})^{-1}$ en fonction de u^* et de $\det(u)$.
I.E.2) Dans le cas où u n'est pas inversible, déterminer $\mathrm{Ker}(\widetilde{u})$ puis $\det(\widetilde{u})$.

I.F - Préciser le rang de $\widetilde{u}$ selon la valeur de celui de u. L'application de $\mathscr{L}(E)$ dans lui-même qui à u associe $\widetilde{u}$ est-elle : linéaire ? injective ? surjective ?

Partie II - Recherche des plans stables par u endomorphisme de E

On conserve dans cette partie les notations de la précédente.

II.A - Soit u dans $\mathscr{L}(E)$ et $P = \mathrm{Vect}(x,y)$ un **plan** stable par u.
Montrer que $x \wedge y$ est vecteur propre de $\widetilde{u}$; exprimer la valeur propre associée à $x \wedge y$ à l'aide de $u|_P$.

II.B - Inversement, soit z un vecteur propre de norme 1 de $\widetilde{u}$.
Montrer qu'il existe (x,y) famille orthonormale dans E telle que $x \wedge y = z$.

Si la valeur propre associée à z est non nulle, montrer que $P = \mathrm{Vect}(x,y)$ est stable par u. On pourra remarquer que (x, y, z) est une base orthonormale directe de E et effectuer des calculs dans cette base.

II.C - Soit u dans $\mathscr{L}(E)$. Montrer que 0 est valeur propre de u si, et seulement si, 0 est valeur propre de $\widetilde{u}$. Montrer que, pour tout réel λ, les plans stables par u sont les plans stables par $u - \lambda Id_E$. En déduire un moyen pour obtenir les plans stables par u dans $\mathscr{L}(E)$ n'ayant pas 0 comme valeur propre, puis par u quelconque dans $\mathscr{L}(E)$.

II.D - Appliquer cette méthode à la recherche des plans respectivement stables par les deux endomorphismes u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis à la question I.A.

Certaines démonstrations dans les parties qui suivent sont analogues à celles demandées dans les deux précédentes et, de ce fait, certains résultats seront admis.

Partie III - Définition et étude d'un produit vectoriel de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$

On munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ de leurs structures euclidiennes canoniques et on les oriente grâce à leurs bases canoniques.

À un vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^4, \text{ on associe } l(X) = x_1 \text{ et } L(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix},$$

de sorte que l'on écrira, par blocs,

$$X = \begin{pmatrix} l(X) \\ L(X) \end{pmatrix}.$$

On définit alors, pour X et Y dans $\mathbb{R}^4$, $X \times Y$ comme suit :

si $X = \begin{pmatrix} a \\ \xi \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a' \\ \xi' \end{pmatrix}$, où $a, a' \in \mathbb{R}$ et $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^3$, alors $X \times Y$ est le

vecteur de $\mathbb{R}^6$ défini par les blocs $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, avec $A = a\xi' - a'\xi$ et $B = \xi \wedge \xi'$,

ce dernier produit vectoriel étant le produit vectoriel canonique de $\mathbb{R}^3$.

On admettra sans démonstration que $\times$ est une application bilinéaire antisymétrique de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$.

III.A - Trouver une condition nécessaire et suffisante sur X et Y dans $\mathbb{R}^4$ pour que $X \times Y = 0$.

Soient p et p' les applications linéaires de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix} \text{ associent respectivement}$$

$$p(\Sigma) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ et } p'(\Sigma) = \begin{pmatrix} \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix}.$$

III.B - Soit Σ dans $\mathbb{R}^6$, de la forme $X \times Y$, où X et Y sont dans $\mathbb{R}^4$; montrer que

$$\langle p(\Sigma), p'(\Sigma) \rangle = 0 \quad (\mathscr{C})$$

III.C - Soit, inversement, Σ dans $\mathbb{R}^6$ vérifiant $(\mathscr{C})$; on pose $A = p(\Sigma)$ et $B = p'(\Sigma)$.

III.C.1) Si $B \neq 0$ et si C dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vérifient $C \cdot B = 0$, trouver tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$ et $L(X) = C$.

III.C.2) Exemple : si $\Sigma = {}^t(2 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 0 \;\; -2)$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer tous les X, Y correspondants.

III.C.3) Si $B \neq 0$, décrire tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$.

III.C.4) Enfin, si $B = 0$, décrire tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$. Si $\Sigma \neq 0, B = 0$ et $X \times Y = \Sigma$, donner une description simple de $\mathrm{Vect}(X, Y)$ à l'aide notamment de A.

III.D - Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a, a', ξ, ξ', pour que la famille (X, Y) définie par

$$X = \begin{pmatrix} a \\ \xi \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} a' \\ \xi' \end{pmatrix}$$

soit orthonormale dans $\mathbb{R}^4$. Dans ce cas, exprimer $\|a\xi' - a'\xi\|^2$ et $\|\xi \wedge \xi'\|^2$ en fonction de (a, a') seulement. En déduire que $\|X \times Y\|^2 = 1$.

III.E - Soit X, Y, Z, T dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \cdot T = Y \cdot T = 0$. Simplifier l'expression $(X \times Y) \cdot (Z \times T)$.

On pourra utiliser la formule suivante, valable pour ξ, ξ', ξ'', ξ''' vecteurs dans $\mathbb{R}^3$,

$$(\xi \wedge \xi') \cdot (\xi'' \wedge \xi''') = (\xi \cdot \xi'')(\xi' \cdot \xi''') - (\xi \cdot \xi''')(\xi' \cdot \xi'')$$

III.F - En déduire que si $(e_1, ..., e_4)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$, alors $\widetilde{\mathscr{B}} = (e_i \times e_j)_{1 \leq i < j \leq 4}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^6$. Déterminer $\widetilde{\mathscr{B}}$ lorsque $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Partie IV - Endomorphisme $\widetilde{u}$ de $\mathbb{R}^6$ associé à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ et détermination des plans stables par u

Si u est dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, on admet qu'il existe un unique $\widetilde{u}$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que l'on ait

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^4)^2, \quad \widetilde{u}(X \times Y) = u(X) \times u(Y)$$

On admet également que $\widetilde{u \circ v} = \widetilde{u} \circ \widetilde{v}$, pour u et v dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$.

IV.A - Si u est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^4$, montrer que $\widetilde{u}$ est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^6$; on pourra utiliser **III.F.**

IV.B - Si u est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^4$, justifier l'existence d'une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ formée de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres notées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$; exprimer alors la matrice de $\widetilde{u}$ dans la base $\widetilde{\mathscr{B}}$ et en déduire que $\widetilde{u}$ est autoadjoint.

On admet que, pour tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$, il existe s et w, endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ respectivement autoadjoint et orthogonal et tels que $u = s \circ w$.

IV.C - Montrer que, pour tout u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, $\widetilde{u}^* = (\widetilde{u})^*$.

IV.D - Soit u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ et $P = \mathrm{Vect}(X, Y)$ un plan vectoriel stable par u ; montrer que $X \times Y$ est un vecteur propre de $\widetilde{u}$.

IV.E - Exemple : on donne u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ défini par

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

IV.E.1) Déterminer u^2 ; u a-t-il des vecteurs propres ?

IV.E.2) Soit X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $P = \mathrm{Vect}(X, u(X))$ est un plan stable par u. Montrer qu'inversement tout plan stable par u est de cette forme.

IV.E.3) Si $X = {}^t(x, y, z, t)$ est non nul dans $\mathbb{R}^4$, déterminer par ses composantes dans la base canonique le vecteur propre $\varphi(X) = X \times u(X)$ de $\widetilde{u}$ ainsi obtenu.

IV.E.4) Montrer que $(\widetilde{u})^2 = Id_{\mathbb{R}^6}$ et vérifier que deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ sont des vecteurs propres de $\widetilde{u}$.

IV.E.5) Déterminer la matrice $\widetilde{M}$ de $\widetilde{u}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^6$; on pourra exprimer $\widetilde{u}(X \times Y)$ pour $X = {}^t(x, y, z, t)$ et $Y = {}^t(x', y', z', t')$ quelconques dans $\mathbb{R}^4$.

IV.E.6) La matrice $\widetilde{M}$ est-elle diagonalisable ?

IV.E.7) Déterminer les ensembles

$$E_{+1} = \left\{\Sigma \in \mathbb{R}^6, \quad \widetilde{M}\Sigma = \Sigma\right\} \text{ et } E_{-1} = \left\{\Sigma \in \mathbb{R}^6, \quad \widetilde{M}\Sigma = -\Sigma\right\}.$$

En déduire les valeurs propres de $\widetilde{M}$ ainsi que leurs ordres de multiplicité.

IV.E.8) Vérifier que, dans E_{-1}, seul le vecteur nul satisfait à $(\mathscr{C})$.

IV.E.9) Vérifier que, dans E_{+1}, le vecteur Σ satisfait à $(\mathscr{C})$ si, et seulement si, il est de la forme ${}^t(a, b, c, d, -b, -c)$, où $ad = b^2 + c^2$.

IV.E.10) Vérifier que tous les vecteurs de la forme $\varphi(X)$ obtenus en IV.E.3 sont bien de cette forme.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notation : $C(I,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues sur l'intervalle I, à valeurs réelles. On écrira indifféremment un polynôme P ou $P(X)$ et on identifiera un polynôme et la fonction polynomiale associée.

Les trois parties sont indépendantes. Seules les questions III.B.1) et III.C.5) dépendent des parties précédentes.

Partie I -

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n l'application définie pour $x \in [-1,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc}\cos x)$$

I.A -

I.A.1) Montrer que f_n est une application polynomiale de degré n et à coefficients réels.

On pourra, par exemple, poser $\theta = \operatorname{Arc}\cos x$ et exprimer $\cos n\theta$ en fonction de puissances entières de $\cos\theta$, en raisonnant par récurrence.

Dans toute la suite de la Partie I, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n le polynôme associé à la fonction polynomiale f_n ce qui signifie, par exemple, que si

$$f_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ alors } T_n(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 .$$

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = 2^{n-1} T_n$.

I.A.2) Déterminer le terme de degré n du polynôme T_n.

I.A.3) Calculer T_1, T_2, T_3, T_4.

I.A.4) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$.

I.A.5) Montrer que les racines de P_n sont :

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad \text{avec } 1 \leq k \leq n$$

et qu'elles sont simples.

I.A.6) Montrer qu'il y a $n+1$ points x'_k du segment $[-1,1]$ où la fonction f_n atteint un extrémum absolu. Déterminer cet extrémum.

Filière TSI

I.A.7) Écrire, dans un langage de programmation au choix du candidat, un algorithme permettant de calculer P_n pour tout $n \geq 1$.

I.B -

I.B.1) Tracer les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4.

I.B.2) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P unitaire de degré n tel que

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

(on pourra considérer le polynôme $T_n - P$ et utiliser les résultats précédents).

I.B.3) Établir que, pour tout polynôme unitaire P de degré n :

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_n(x)| \leq \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

I.B.4) Soit $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer l'existence de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

I.B.5)

a) Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ définit un produit scalaire sur $C([-1,1],\mathbb{R})$.

b) Montrer que la famille de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $h_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_n(x)$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire

(on peut utiliser un changement de variable du type $\theta = \operatorname{Arccos} x$ pour calculer certaines intégrales avec les justifications nécessaires).

Partie II -

Dans cette partie, le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et E est une partie fermée et bornée de ce plan, contenant une infinité de points. Pour A, B, C dans E, on note :

$$d(A,B) = AB, \quad d(A,B,C) = (AB \cdot AC \cdot BC)^{1/3}$$

$$d_2 = \sup_{(A,B) \in E^2} d(A,B), \quad d_3 = \sup_{(A,B,C) \in E^3} d(A,B,C)$$

II.A -

II.A.1) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to \mathbb{R}^+ \\ (A,B) &\mapsto d(A,B) \end{aligned}$$

est continue sur $E \times E$ et en déduire que d_2 et d_3 sont bien définis dans $\mathbb{R}$.

II.A.2) Montrer que $d_3 \leq d_2$.

II.A.3) Justifier que $d_3 = \sup_{(A,B) \in E^2} \left(\sup_{C \in E} d(A,B,C) \right)$.

II.B - Montrer que si E est un segment de longueur $a > 0$, alors $d_3 = \dfrac{a}{\sqrt[3]{4}}$.

II.C - On suppose à présent que E est le cercle $C(O,R)$ de centre l'origine et de rayon $R > 0$. L'angle polaire d'un point $M \in E$ est par définition l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

II.C.1) Montrer que si A, B sont deux points de E, dont les angles polaires ont pour mesures respectives α et β avec $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, on a : $AB = 2R \sin \dfrac{\beta - \alpha}{2}$.

II.C.2) Soient $\alpha, \gamma \in [0,2\pi]$ fixés, avec $\alpha \leq \gamma$.
Vérifier que la fonction, définie sur $[\alpha,\gamma]$, qui à β associe $\sin \dfrac{\beta - \alpha}{2} \sin \dfrac{\gamma - \beta}{2}$ atteint son maximum en $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$.

II.C.3) Étudier les variations sur $[0,1]$ de la fonction φ qui à $t \in [0,1]$ associe $\varphi(t) = t^3 \cdot \sqrt{1 - t^2}$.

II.C.4) Déduire de ce qui précède que $d_3 = \sqrt{3} \cdot R$.

Partie III -

Dans toute la partie III, E est le segment $[-1,1]$ de l'axe réel. Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i|, \quad D_n = \sup_{x_1, \ldots, x_n \in E} D(x_1, \ldots, x_n), \quad d_n = D_n^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

III.A -

III.A.1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in E$ tels que $D_{n+1} = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$.

III.A.2) Vérifier que $D_{n+1} \leq |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot |\lambda_3 - \lambda_1| \cdot \ldots \cdot |\lambda_{n+1} - \lambda_1| \cdot D_n$.

III.A.3) Vérifier que $D_{n+1}^{n+1} \leq D_n^{n+1} D_{n+1}^2$ et en déduire que $D_{n+1}^{n-1} \leq D_n^{n+1}$.

III.A.4) Montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera désormais $d = \lim\limits_{n \to +\infty} d_n$.

Pour $n \geq 1$, on note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.

On note pour $P \in \mathscr{P}_n$,

$$\mu(P) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|, \quad \mu_n = \inf_{P \in \mathscr{P}_n} \mu(P), \quad m_n = \sqrt[n]{\mu_n}$$

III.B -

III.B.1) À l'aide de la question I.B.3, calculer m_n pour $n \geq 1$.

III.B.2) Montrer que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente ; on pose $m = \lim\limits_{n \to \infty} m_n$. Déterminer m.

III.B.3) Établir que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, la suite $\left(\dfrac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{\ell}{2}$

(on pourra traiter le cas particulier $\ell = 0$ puis ramener le cas général à ce cas).

À tout élément $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$, on associe le déterminant $V(x_1, \ldots, x_{n+1})$ dont on admet la valeur :

$$V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & \ldots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

III.C -

III.C.1) Démontrer que pour tout polynôme unitaire P de degré n, on a :

$$V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \ldots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

III.C.2) En développant le dernier déterminant par rapport à la dernière ligne, établir que :

$$d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq (n+1)\, d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}\, m_n^n$$

III.C.3) En considérant le polynôme particulier P, défini par :

$P(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$, montrer que :

$$m_n^n \cdot d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

III.C.4) Déduire de ce qui précède que $m_n \leq d_{n+1}$.

III.C.5) En utilisant les questions III.C.2, III.B.1 et III.B.3, montrer que $d \leq m$ et conclure que $d = m = \frac{1}{2}$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, M_2 désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées 2×2 à coefficients réels dont l'élément nul est noté 0, et S_2 le sous-espace vectoriel de M_2 formé des matrices symétriques.

Si A et B sont deux éléments de M_2, le produit de A par B est noté AB, la matrice transposée de A est notée ${}^tA$.

D'autre part, on note Ψ l'application de $\mathbb{R}^4$ dans M_2 qui à $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ fait correspondre la matrice

$$\psi(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On rappelle aussi que Ψ est linéaire et bijective.

Partie I -

Pour tout élément A de M_2, s'écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on définit la trace de A par :

$$\mathrm{tr}(A) = a + d$$

I.A - *Dans cette question, on définit une structure euclidienne sur M_2.*

À toute matrice M de M_2, on associe sa trace $\mathrm{tr}(M)$: on définit ainsi l'application trace notée tr de M_2 dans $\mathbb{R}$.

I.A.1) Montrer que l'application trace est linéaire de M_2 dans $\mathbb{R}$.

Comparer pour $(A,B)\in M_2\times M_2$, les réels $\mathrm{tr}(AB)$ et $\mathrm{tr}(BA)$, puis $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}({}^tA)$.

I.A.2) On pose

$$\forall (A,B)\in M_2\times M_2, \langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A\,{}^tB)$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur M_2.

Pour toute la suite du problème, on pose :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note également $I = E_1 + E_2$ l'élément unité de M_2.

Filière TSI

I.B - Montrer que la famille $\mathrm{B}_0 = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base orthonormée de M_2 pour ce produit scalaire.

En déduire une base orthonormée de S_2.

I.C - Étude de la forme « déterminant » sur M_2

À toute matrice M de M_2, on associe son déterminant $\det(M)$: on définit ainsi une application notée $\det$ de M_2 dans $\mathbb{R}$.

I.C.1) On pose

$$M = \sum_{i=1}^{4} x_i E_i \in M_2 .$$

Exprimer $\det(M)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3, x_4).

I.C.2) Montrer que $\det \circ \Psi$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$, dont on précisera la matrice dans la base $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, avec :

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 0, 0, 1),\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0),\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0).$$

Partie II -

On se propose dans cette partie de déterminer les applications q de M_2 dans $\mathbb{R}$ telles que $q \circ \Psi$ soit une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^4$ et qui vérifient

$$q(MN) = q(M)q(N) \qquad (1)$$

pour tout couple de matrices $(M, N) \in M_2 \times M_2$.

II.A - Donner un exemple d'application q solution du problème exposé au début de la partie II.

Dans les questions suivantes de la partie II, q est une application de M_2 dans $\mathbb{R}$ telle que $q \circ \Psi$ est une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^4$ et qui vérifie (1).

II.B - Calculer $q(0)$, $q(I)$.

II.C - Montrer que si le rang de M est égal à 2, $q(M)$ est non nul.

II.D - *On suppose dans cette seule question que* $M \in M_2$ *est une matrice de rang égal à* 1. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *dont la matrice dans la base canonique* $B_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est égale à* M.

II.D.1) Montrer qu'il existe $B_2 = (u, v)$ une base de $\mathbb{R}^2$ telle que le noyau de f (noté $\ker f$) soit engendré par v (c'est-à-dire $\ker f = \text{Vect}(v)$), puis qu'il existe un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ tel que $B_3 = (w, f(u))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

En déduire que l'on peut trouver deux matrices P et Q inversibles telles que

$$PMQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.D.2) En déduire que $q(M) = 0$.

II.E - Expliquer pourquoi on peut ainsi conclure que M est une matrice inversible si et seulement si $q(M) \neq 0$

II.F - Soit M une matrice fixée de M_2 que l'on supposera trigonalisable, dont les valeurs propres sont notées λ_1 et λ_2 (éventuellement confondues). On pose

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = \det(M - \lambda I),\ g(\lambda) = q(M - \lambda I)$$

On notera d'autre part φ *l'application de* $M_2 \times M_2$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi(M, N) = \frac{1}{4}\Big(q(M+N) - q(M-N) \Big).$$

Par extension des notions vues en cours, si l'application q *est dite « forme quadratique » sur* M_2 *alors* φ *est dite « forme polaire » associée à* q.

II.F.1) Montrer que f est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et les racines.

II.F.2) Exprimer $g(\lambda)$ en fonction de $q(M)$, $\varphi(M, I)$ et λ. Quelles sont les racines de l'équation $g(\lambda) = 0$? En déduire que $q(M) = \det(M)$.

II.G - Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice quelconque de M_2.

II.G.1) Donner un exemple de matrice M pour laquelle on ne peut pas appliquer la méthode de la question II.F.

II.G.2) Calculer $q(M)$ en fonction de a, b, c, d lorsque $a \neq 0$. On pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss et son interprétation en terme de produits matriciels pour trigonaliser M.

II.G.3) On suppose $a = 0$ et $c \neq 0$. Calculer le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M$$ et en déduire $q(M)$.

II.G.4) En déduire une formule de $q(M)$ en fonction de a, b, c, d valable pour toute matrice M.

Partie III - Étude d'une surface de $\mathbb{R}^3$

Dans ce qui suit, S_2 est rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, E_1, E_2, E_3)$ les matrices E_1, E_2, E_3 ayant été définies à la partie I. Les matrices sont donc ici considérées comme des point de l'espace affine euclidien S_2. Pour tout réel k, on note Γ_k l'ensemble des matrices $M = xE_1 + yE_2 + zE_3$ de S_2 dont le déterminant est égal à k.

$$\Gamma_k = \{M \in S_2 \,|\, \det(M) = k\}$$

III.A - Montrer que Γ_k est une quadrique et préciser son équation cartésienne dans $\mathcal{R}$.

III.B - Dans cette question, $k = 0$.

III.B.1) Montrer que par tout point M de Γ_0, $M \neq 0$, passe une droite Δ_M contenue dans Γ_0.

III.B.2) Soit $M_0(x_0, y_0 z_0) \in \Gamma_0$, $M_0 \neq 0$. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à Γ_0 en M_0, et vérifier qu'il contient Δ_{M_0}.

III.C - Dans cette question $k = -1$.

III.C.1) Déterminer et tracer la projection orthogonale de Γ_{-1} sur le plan xOy.

III.C.2) Déterminer et tracer la projection orthogonale de Γ_{-1} sur le plan xOz.

III.C.3) Montrer que Γ_{-1} contient au moins deux droites strictement parallèles (on pourra exploiter III.C.2).

III.D - Équation réduite de Γ_k

III.D.1) Déterminer une équation réduite de Γ_k sous la forme

$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = k, \alpha > 0$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}^1(0, U, V, E_3)$.

On précisera U et V à l'aide de E_1, E_2 et on notera X, Y, Z Les coordonnées de M dans ce nouveau repère.

III.D.2) Reconnaître la surface Γ_k selon les valeurs de k.

Partie IV -

On s'intéresse dans cette partie aux applications Φ *de* M_2 *dans* M_2 *qui vérifient le groupe des propriétés suivantes, appelé* P *:*

$$\mathrm{P}\begin{cases}\Phi \text{ est linéaire et bijective}\\ \forall (M,M')\in M_2\times M_2,\ \ \Phi(MM') = \Phi(M)\Phi(M')\\ \forall M\in M_2,\ \ \ \Phi({}^tM) = {}^t\Phi(M)\end{cases}$$

IV.A - *Dans cette question, on s'intéresse au cas général, et* Φ *est une application vérifiant la propriété* P *.*

IV.A.1) Montrer que :

a) $\Phi(I) = I$;

b) $\Phi(S_2) = S_2$;

c) $\Phi(E_4) = \pm E_4$.

IV.A.2) Montrer que pour toute matrice $M\in M_2$, $\Phi(M)$ est inversible si et seulement si M est inversible. En déduire $\Phi(\Gamma_0)$.

IV.B - *Dans cette question, on étudie un exemple d'application* Φ *. Soit* A *une matrice de* S_2 *(c'est-à-dire telle que* $A = {}^tA$ *) s'écrivant :* $A = \begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$.

On définit l'application Φ_A *de* M_2 *dans* M_2 *par :* $\Phi_A(M) = AMA$.

IV.B.1) Montrer que Φ_A vérifie la propriété P si et seulement si $A^2 = I$.

On suppose dans les questions IV.B.2 à IV.B.5 que Φ_A *vérifie la propriété* P *et que* A *est distinct de* I *et de* $-I$.

IV.B.2) Montrer que A est une matrice orthogonale symétrique et en déduire qu'il est possible d'exprimer les valeurs de a, b, c en fonction d'un seul paramètre $\theta\in[0, 2\pi[$. En déduire $\Phi_A(E_4)$.

IV.B.3) Montrer que A décrit un cercle de S_2 dont on précisera le plan à l'aide de deux vecteurs directeurs, ainsi que le centre et le rayon.

IV.B.4) Soit $M\in M_2$. Calculer la norme euclidienne de $\Phi_A(M)$ en fonction de la norme de M (norme associée au produit scalaire défini à la partie I). En déduire que Φ_A est une symétrie orthogonale.

IV.B.5) Étude de la restriction de Φ_A à S_2 (que l'on notera encore Φ_A).

a) Montrer que Φ_A est la réflexion par rapport à un plan que l'on précisera en fonction de I et de A .

b) Déterminer la matrice de la restriction de Φ_A à S_2 dans la base orthonormée (U, V, E_3) de S_2, avec $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + E_2)$ et $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_2)$.

IV.C - *On revient à nouveau au cas général étudié au IV.A. L'application Φ vérifie donc la propriété* P.

IV.C.1) Montrer que l'application $M \mapsto \det(\Phi(M))$ de M_2 dans $\mathbb{R}$, est une « forme quadratique » non nulle sur M_2 c'est-à-dire que $\det \circ \Phi \circ \Psi$ est une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^4$.

IV.C.2) En déduire que $\forall M \in M_2, \det(\Phi(M)) = \det(M)$, puis que l'application Φ laisse globalement invariantes toutes les surfaces Γ_k pour $k \in \mathbb{R}$.

IV.C.3) En écrivant la matrice la plus générale de Φ dans la base orthonormée $\mathrm{B} = (U, V, E_3, E_4)$ où U et V ont été définis à la question IV.B.5.b), on remarquera que $\Phi(U) = U$, $\Phi(S_2) = S_2$, $\Phi(E_4) = \varepsilon E_4$ avec $\varepsilon = \pm 1$, et en écrivant que pour tout M de M_2,

$\det(\Phi(M)) = \det(M)$, démontrer qu'il existe $(\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 1\}^2$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la matrice de Φ dans B soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \varepsilon' \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\varepsilon' \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

IV.C.4) On suppose $\varepsilon' = 1$. On considère l'application Φ_A avec

$$A = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)V + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)E_3\right).$$

a) Montrer que l'application $\Phi \circ \Phi_A$ vérifie la propriété P et déterminer sa matrice dans B.

b) Quelle est la matrice dans B de l'application qui à M associe ${}^tM$? En déduire la valeur de ε et montrer que $\Phi = \Phi_A$.

IV.C.5) On suppose $\varepsilon' = -1$ et on considère toujours la matrice

$$A = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)V + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)E_3\right).$$

En considérant l'application $\Phi \circ \Phi_A$, montrer qu'il existe une matrice B, que l'on déterminera, telle que $\Phi = \Phi_B \circ \Phi_A$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème I désigne un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

où f est une application continue définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.

On verra que l'espace des solutions contient une solution f_1 ayant un comportement particulier en $+\infty$.

Les parties I et II portent sur deux exemples. La partie III met en place l'application $\Phi : f \mapsto f_1$ dans un cadre général. Les Parties IV à VI envisagent diverses propriétés de la fonction f et sont largement indépendantes.

Les symboles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les corps des nombres réels et des nombres complexes.

Partie I - Étude d'un premier exemple

I.A - Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence et donner la valeur des expressions suivantes :

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt, \qquad e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt$$

I.B - On considère l'équation différentielle

$$y' - y + \cos x = 0 \, , \; x \in \mathbb{R}$$

Déterminer une fonction Y_0 bornée et une fonction g telles que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle puisse se mettre sous la forme

$$Y_\lambda(x) = \lambda g(x) + Y_0(x) \, , \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Donner sans démonstration le résultat analogue relatif à l'équation différentielle $y' - y + \sin x = 0$.

I.C - Soit Π le plan vectoriel engendré par les fonctions *cosinus* et *sinus* dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$$

Filière MP

où α et β sont des nombres réels. Pour tout $f \in \Pi$, on définit f_1 par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt$$

I.C.1) Montrer que la transformation $f \mapsto f_1$ définit une application $\Phi : \Pi \to \Pi$. La linéarité de Φ étant considérée comme évidente, donner la matrice de Φ dans la base de Π constituée des fonctions *cosinus* et *sinus*.

I.C.2) On munit Π de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Déterminer une constante $k > 0$ telle que, pour tout $f \in \Pi$, on ait

$$\|f_1\|_\infty \leq k\|f\|_\infty$$

Pour $f \in \Pi$, on définit par récurrence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_1 = \Phi(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

Étudier l'existence de la limite de cette suite relativement à la norme définie sur Π et déterminer la valeur de cette limite.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0\,.$$

II.A - Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0{+}\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.

Quelle expression donner à la solution générale Y_λ, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

On note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution Y_λ.

II.B - Pour tout point $m(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note Y_m la solution de l'équation vérifiant $Y_m(x_m) = y_m$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative.

II.B.1) Déterminer l'ensemble $\mathscr{H}$ des points m tels que $Y'_m(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathscr{I}$ des m tels que $Y''_m(x_m) = 0$. Donner sans démonstration une interprétation géométrique pour chacun des ensembles $\mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$.

II.B.2) Quelle est la place de la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la solution Y_0 par rapport aux courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$?
(on pourra faire des intégrations par parties sur $Y_0(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$).

II.B.3) Tracer sans explication sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathscr{H}$, $\mathscr{I}$, $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\lambda_1}$, $\mathscr{C}_{\lambda_2}$, où λ_1 et λ_2 sont des réels respectivement négatif et positif.

Partie III - La transformation Φ

On suppose maintenant que I est un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$, a pouvant être égal à $-\infty$.
Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathfrak{E} = \left\{ f \;\middle|\; \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \right\}$$

Autrement dit, $\mathfrak{E}$ est l'ensemble des fonctions f négligeables en $+\infty$ devant une certaine fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ (α dépendant de f).

III.A - Montrer que $\mathfrak{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$
Étant donné $f \in \mathfrak{E}$ et $x \in I$, on considère l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

III.B - Montrer que E_f admet une unique solution $f_1 \in \mathfrak{E}$ définie par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt .$$

On définit l'application $\Phi : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ par $\Phi(f) = f_1$; elle est évidemment linéaire.

III.C - Soit Φ^n la composée n fois de Φ avec elle-même. Pour $f \in \mathfrak{E}$, on pose $f_n = \Phi^n(f)$ (avec $f_0 = f = \phi^0(f)$). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de I,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément vers une constante sur tout compact de I,

(iii) la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout compact de I.

III.D - Montrer que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u) e^{-u} du$$

(on pourra raisonner par récurrence en écrivant $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$ et intégrer par parties).

III.E - L'application linéaire

$$\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ f \mapsto f_1$$

est-elle injective ? Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des applications $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $g \in \mathcal{E}$ et $g' \in \mathcal{E}$.

Partie IV - Fonctions bornées

Soit $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. $\mathcal{B}$ étant un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ (défini au III), l'application Φ est définie sur $\mathcal{B}$.

IV.A - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{B}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution bornée f_1.

IV.B - On munit $\mathcal{B}$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}$$

L'application Φ est-elle continue pour cette norme ?

IV.C - Soit $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_0$) le sous-espace de $\mathcal{B}$ des fonctions ayant une limite (resp. une limite nulle) en $+\infty$, $\mathcal{K}$ le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$.

Montrer que ces sous-espaces sont stables par Φ.

IV.D - Montrer, à l'aide du III.D, que pour tout $f \in \mathcal{L}$, la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ vers une constante que l'on précisera (couper l'intervalle d'intégration en exprimant que f a une limite en $+\infty$).

IV.E - Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une injection de $\mathcal{B}$ dans le sous-espace des fonctions bornées de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto \sin(x^2)$ est-elle dans l'image de Φ ? Préciser l'image de Φ.

Partie V - Fonctions périodiques

Soit $\mathscr{P}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques.

V.A - Montrer que pour tout $f \in \mathscr{P}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution périodique f_1.
Cette fonction f_1 est-elle somme de sa série de Fourier ?

V.B - Quel lien a-t-on entre les coefficients de Fourier complexes $c_k(f)$ et $c_k(f_1)$?

V.C - Soit $\mathscr{P}_0$ le sous-espace des $f \in \mathscr{P}$ dont la valeur moyenne

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

est nulle et $\mathscr{K}$ le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{P}$.
Montrer que pour tout $f \in \mathscr{P}$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une constante que l'on précisera.

V.D - Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une bijection de $\mathscr{P}$ sur le sous-espace $\mathscr{P}_1$ des fonctions 2π-périodiques de classe C^1.

V.E - On considère sur $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_1$ les normes N_1 et N_2 suivantes :

$$N_1(f) = \int_0^{2\pi} |f(t)|dt\,,\ N_2(f) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

Les applications Φ et Φ^{-1} sont-elles continues pour la norme N_1 ? Même question pour la norme N_2.

Partie VI - Fonctions polynomiales

Soit d un entier naturel et $\mathscr{FP}_d$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $d+1$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à d.

VI.A - Soit une famille $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d)$ de $d+1$ nombres réels distincts. Pour tout $f \in \mathscr{FP}_d$, on pose

$$N_\xi(f) = \sup_{0 \le i \le d} |f(\xi_i)|$$

Montrer que c'est une norme sur $\mathscr{FP}_d$.

VI.B - Soit une suite de fonctions polynomiales de $\mathscr{FP}_d$

$$x \mapsto f_n(x) = a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \ldots + a_{0,n}$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$,

(iii) il existe $d+1$ nombres réels distincts $\xi_0, \ldots, \xi_d$ tels que, pour tout indice $0 \leq i \leq d$, la suite $(f_n(\xi_i))$ converge.

(iv) chacune des $d+1$ suites numériques $(a_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, pour $0 \leq i \leq d$,converge.

VI.C - Pour tout $f \in \mathscr{FP}_d$, montrer que l'équation différentielle E_f a une unique solution $f_1 = \Phi(f)$ dans $\mathscr{FP}_d$.

On note encore $\Phi : f \mapsto f_1$; Φ est considéré ici comme un endomorphisme de $\mathscr{FP}_d$.

VI.D - Pour f fonction polynomiale de degré d, on forme la suite de fonctions polynomiales (f_n) où $f_n = \Phi^n(f)$. Cette suite vérifie-t-elle les conditions équivalentes de VI.B ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le texte, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et n est un entier strictement positif. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels et on désigne par $E_n(I)$ l'ensemble des applications de classe C^1 de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in E_n(I)$, M' désigne la dérivée de M. Parmi les éléments de $E_n(I)$, on s'intéresse en particulier à ceux qui vérifient l'une ou l'autre des propriétés qui suivent :

$(P1)$: $\forall (x, y) \in I^2$, $M(x)M(y) = M(y)M(x)$

$(P2)$: $\forall x \in I$, $M'(x)M(x) = M(x)M'(x)$

On adopte les notations suivantes : I_n désigne la matrice identité d'ordre n, $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel des vecteurs-colonnes à n lignes, $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales réelles d'ordre n et $SO_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices orthogonales réelles d'ordre n et de déterminant $+1$; si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $M_{[i,j]}$ le coefficient de M en position (i, j) lorsque $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$. Enfin, on dit d'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *stricte* si elle a les coefficients diagonaux tous nuls et d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *scalaire* si elle est proportionnelle à l'identité ($M = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Enfin, on rappelle que, si M est élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$t \mapsto \exp(tM) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} M^k$$

est un élément de $E_n(\mathbb{R})$ dont la dérivée est

$$t \mapsto M\exp(tM) = \exp(tM)M .$$

Partie I - Exemples élémentaires

I.A - .

I.A.1) Montrer que tout élément de $E_n(I)$ vérifiant $(P1)$ vérifie $(P2)$.

Filière MP

I.A.2) Démontrer que si M est une application élément de $E_n(I)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $M^k : x \mapsto M(x)^k$ est élément de $E_n(I)$; calculer sa dérivée.

I.A.3) Démontrer que si M est une application élément de $E_n(I)$, telle que pour tout $x \in I$ la matrice $M(x)$ est inversible, alors l'application $M^{-1} : x \mapsto M(x)^{-1}$ est élément de $E_n(I)$; calculer sa dérivée.

I.B - Dans la suite de la Partie I, on prend $n = 2$.

Un élément M de $E_2(I)$ s'écrit pour $x \in I$:

$$M(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}.$$

I.B.1) On suppose dans cette question que M vérifie $(P2)$ et que la fonction b ne s'annule pas. Que dire des fonctions

$$\frac{c}{b} \text{ et } \frac{d-a}{b} \text{ ?}$$

Montrer, en l'explicitant, qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in I$, $M(x) \in \text{Vect}\{I_2, A\}$. Montrer que l'application M vérifie aussi $(P1)$.

I.B.2) Soit A une matrice non scalaire dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^2$ tel que (X, AX) soit une base de $\mathbb{R}^2$. On suppose X ainsi choisi. Si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il existe donc $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $BX = uX + vAX$.

Montrer que, si la matrice B commute avec A, elle s'écrit $B = uI_2 + vA$.

I.B.3) On suppose dans cette question que M vérifie $(P2)$ et que $M(x)$ n'est scalaire pour aucun x de I.

Montrer qu'il existe un unique couple (u, v) d'applications continues de I dans $\mathbb{R}$ tel que $M'(x) = u(x)I_2 + v(x)M(x)$ pour tout $x \in I$. Pour $x_0 \in I$ donné, on pose alors $C(x) = M(x)M(x_0) - M(x_0)M(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que C vérifie une équation différentielle matricielle très simple, dans laquelle intervient la fonction v et la résoudre en la ramenant par exemple à des équations différentielles ordinaires. En conclure que M vérifie $(P1)$.

I.B.4) Dans cette question, on s'intéresse à $E_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $(P2)$ est vérifiée lorsqu'on choisit pour a, b, c et d les fonctions qui à x réel associent respectivement $1+x^2$, $x|x|$, x^2 et $1-x^2$.

b) Déterminer soigneusement les éléments de $E_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1+x^2 & b(x) \\ c(x) & 1-x^2 \end{pmatrix} \text{ vérifiant } (P2).$$

Pour chaque élément de $E_2(\mathbb{R})$ ainsi trouvé,

- dire s'il vérifie $(P1)$,
- déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par l'ensemble des $M(x)$, noté $\mathrm{Vect}\{M(x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

I.C - Soit M un élément de $E_2(I)$ tel que pour tout $x \in I$, $M(x)$ est la matrice d'une réflexion.

I.C.1) Montrer qu'il existe une application θ de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ telle que la première colonne de $M(x)$ soit

$$\begin{pmatrix} \cos\,\theta(x) \\ \sin\,\theta(x) \end{pmatrix} \text{ pour tout } x \in I.$$

I.C.2) À quelle condition, portant sur la fonction θ, M vérifie-t-elle $(P2)$?

On dit d'une application de $I \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *de type* $(\mathcal{Q})$ (abréviation pour *quasi-polynomial*) si elle est de la forme

$$(x, M) \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, P_k(x)\, M^k\, Q_k(x)$$

où sont donnés

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ a_0, \ldots, a_m \text{ de classe } C^0 \text{ de } I \text{ dans } \mathbb{R} \\ P_0, \ldots, P_m, Q_0, \ldots, Q_m \text{ de classe } C^0 \text{ de } I \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

On dira qu'une telle application est *polynomiale* si, de plus, les applications P_k et Q_k sont toutes constantes, égales à I_n.

On admettra alors le théorème $\mathscr{T}$ suivant, qui est une version du théorème de Cauchy-Lipschitz :

a) Si $F : I \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de type $(\mathscr{Q})$, et si $(x_0, U_0) \in I \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique solution maximale U de l'équation différentielle matricielle $M'(x) = F(x, M(x))$, définie sur un intervalle J tel que $x_0 \in J \subset I$ vérifiant de plus $U(x_0) = U_0$.

b) Si, en outre, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si $F(I \times E) \subset E$ et si $U_0 \in E$, alors $U(x) \in E$ pour tout $x \in J$.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans les questions qui suivent, les hypothèses faites entraînent que les fonctions matricielles solutions d'éventuelles équations différentielles sont définies sur I tout entier et que, partant, le point de vue de la maximalité de ces solutions est accessoire.

Partie II - Étude de cas particuliers

II.A - Soit une équation différentielle matricielle polynomiale de la forme $(\mathscr{E})$:

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) M^{2k+1}(x).$$

Déduire du théorème $\mathscr{T}$ le résultat $(\mathscr{R})$ suivant : si une solution U sur I de $(\mathscr{E})$ est telle que, pour une valeur $x_0 \in I$, $U(x_0)$ est une matrice antisymétrique, alors $U(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in I$. Donner un énoncé plus général concernant une forme analogue d'équation différentielle matricielle, mais de type $(\mathscr{Q})$, pour laquelle le résultat $(\mathscr{R})$ soit conservé.

II.B - Soit une équation différentielle matricielle polynomiale, de la forme

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) M^{k}(x).$$

Soit M une solution sur I et $x_0 \in I$ tel que le polynôme caractéristique de $M(x_0)$ soit scindé. On choisit alors $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $T_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $M(x_0) = PT_0P^{-1}$.

II.B.1) Former une équation différentielle matricielle polynomiale vérifiée par $T : x \mapsto P^{-1}M(x)\,P$ permettant de montrer que $T(x)$ est triangulaire supérieure pour tout $x \in I$.

II.B.2) On suppose en outre que T_0 est triangulaire stricte. En considérant les fonctions à valeurs réelles $x \mapsto T(x)_{[i,i]}$ avec $1 \leq i \leq n$, donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction a_0 pour que $T(x)$ soit triangulaire stricte pour tout $x \in I$.

II.B.3) Cette condition étant supposée remplie, on choisit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_0^r = 0$; former une *équation différentielle matricielle de type* $(\mathscr{Q})$ vérifiée par $x \in I \mapsto T^r(x)$ permettant de montrer que l'application T^r est nulle.

II.C -

II.C.1) Soit U solution sur I de l'équation différentielle matricielle

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) P_k(x)\, M^k(x)\, Q_k(x).$$

On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $U(x_0)$ commute avec toutes les matrices $P_k(x)$ et $Q_k(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que $U(x)$ commute avec $U(x_0)$ pour tout $x \in I$.

II.C.2) Soit U une solution sur I d'une *équation différentielle matricielle polynomiale*. Vérifie-t-elle $(P1)$, vérifie-t-elle $(P2)$? Montrer que $\dim(\mathrm{Vect}\{U(x),\ x \in I\})$ est inférieure ou égale à n.

II.D - Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $(M, N) \in E^2 \Rightarrow MN - NM \in E$. En introduisant une équation différentielle matricielle bien choisie, montrer que $\forall (t, M, N) \in I \times E^2$, $\exp(tM) N \exp(-tM) \in E$.

Partie III - Cas des matrices orthogonales

III.A - On s'intéresse à une équation différentielle matricielle de la forme $(\mathscr{E}')$: $M'(x) = a(x)(I_n - M^2(x))$, où a désigne une fonction donnée, de classe C^0 de I dans $\mathbb{R}$.

III.A.1) Si U est une solution sur I de $(\mathscr{E}')$ telle que $(U(x_0))^2 = I_n$ (matrice d'une symétrie) pour un certain $x_0 \in I$, que peut-on dire de la fonction U ?

III.A.2) Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'une solution U de $(\mathscr{E}')$ sur I vérifie ${}^tU(x_0) J U(x_0) = J$ pour un $x_0 \in I$. On pose alors $N(x) = {}^tU(x) J U(x)$ pour tout $x \in I$. Former une équation différentielle matricielle de type $(\mathscr{Q})$ vérifiée par $N - J$ et en conclure que $N(x) = J$ pour tout $x \in I$. Si, en outre, J est inversible, montrer que l'application $x \mapsto \det(U(x))$ est constante.

III.B - Dans toute cette section III.B, on choisit $n = 3$. Soit U une matrice élément de $E_3(I)$ à valeurs dans $SO_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(P2)$ et telle que,

$$\forall x \in I,\ \begin{cases} U(x) \neq I_3 \\ -1 \text{ n'est pas valeur propre de } U(x) \end{cases}.$$

III.B.1)

a) Pour $x_0 \in I$ fixé, on pose $U_0 = U(x_0)$. Montrer qu'il existe un vecteur Z_0 unitaire dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, tel que $U_0 Z_0 = Z_0$.

b) On choisit alors X_0 et Y_0 tels que $B = (X_0, Y_0, Z_0)$ soit une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, on pose $X = Y_0 + Z_0$ et $C = (X, U_0 X, U_0^2 X)$.

De quelle forme est la matrice dans B de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant U_0 pour matrice dans la base canonique ? Calculer alors $\det_B(C)$ en fonction des coefficients de cette matrice et en déduire que C est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) En conclure qu'il existe trois fonctions u, v, w de I dans $\mathbb{R}$ telles que $U'(x) = u(x) I_3 + v(x) U(x) + w(x) U^2(x)$ pour tout $x \in I$. On admettra que ces trois fonctions sont continues.

d) En exprimant la dérivée de ${}^tUU$ en fonction de u, v, w, ${}^tU + U$, montrer que U est solution d'une équation différentielle matricielle, notée $\mathscr{F}$, de la forme $(\mathscr{E}')$: on exprimera, à l'aide de certaines des fonctions u, v, w, la fonction a correspondante.

III.B.2) Transformer l'équation $(\mathscr{F})$ par le changement de matrice inconnue défini par la formule : $(I_3 + U(x))A(x) = I_3 - U(x)$, en justifiant l'introduction de $A(x)$.

Montrer que A est solution sur I d'une équation différentielle matricielle polynomiale très simple. Résoudre cette équation et en déduire une expression de $U(x)$ pour tout $x \in I$.

III.C - En s'inspirant de III.B.1-d), construire une fonction élément de $E_3(\mathbb{R})$ à valeurs dans $SO_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(P2)$ mais pas $(P1)$.

III.D - Chercher la solution maximale U dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle matricielle $M'(x) = I_2 + M^2(x)$, définie au voisinage de 0 et telle que

$$U(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on montrera que les solutions sont nécessairement de la forme

$$x \in I \mapsto U(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}$$

et on cherchera ensuite une équation différentielle vérifiée par $u = b^2 - a^2$, sachant que $u(0) = 1$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations, définitions et rappels

Si $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n. Pour P dans $\mathbb{C}[X]$, soit $T(P)$ le polynôme $P(X+1)$. L'application T ainsi définie est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$. De plus, si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par T et on note T_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ induit par T.

Soit $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Hilbert, définie par :

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$

Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, soient :

$$D_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\},\ \overline{D_R} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\} \text{ et } C_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$$

On convient d'autre part que $D_\infty = \mathbb{C}$. Pour R dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$, soit E_R l'espace vectoriel des fonctions de D_R dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ où la série entière } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à R. L'espace E_∞ est appelé *espace des fonctions entières*.

On pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\text{si } n \to +\infty, \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Objectif du problème, dépendance des parties

La partie I étudie les polynômes de Hilbert, ce qui permet notamment de déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$. La partie II est complètement indépendante de I. Elle a pour but d'établir quelques propriétés des séries entières utilisées dans la partie III, laquelle montre que toute fonction entière vérifiant une certaine condition asymptotique est un polynôme. Le résultat obtenu est dû à Georg Pólya (1915). La partie III utilise II et la dernière question de I.

Filière PSI

Partie I - Polynômes de Hilbert

Soit n dans $\mathbb{N}$.

I.A - Inversion d'une matrice

I.A.1) Écrire la matrice M_n de T_n dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.

I.A.2) Vérifier que M_n est inversible ; expliciter M_n^{-1}.

I.B - Propriétés de la suite $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$

I.B.1) Montrer que $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

I.B.2) Si $j \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $H_i(j)$ montrant que $H_i(j)$ est dans $\mathbb{Z}$. On distinguera les trois cas : $j < 0$, $0 \leq j \leq i-1$ et $j \geq i$.

I.C - Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

Soit P dans $\mathbb{C}_n[X]$. On décompose P sur $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ en :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i .$$

I.C.1) Vérifier l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^tM_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

où ${}^tM_n$ est la transposée de la matrice M_n.

I.C.2) Établir :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \; a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j) .$$

Si $i \geq n+1$, que vaut $\displaystyle\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$?

I.C.3) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $P(i) \in \mathbb{Z}$,

b) $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $a_i \in \mathbb{Z}$,

c) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

En particulier les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes de Hilbert.

I.D - Description des suites de la forme $(P(j))_{j \in \mathbb{N}}$ où P est un polynôme.

Soit $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \mathbb{N}$, $u_j = P(j)$,

b)

$$\forall i \in \mathbb{N},\ i \geq n+1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_j = 0.$$

Partie II - Quelques propriétés des séries entières

Dans toute cette partie, on fixe : R dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, f dans E_R, ω dans D_R et r dans $]|\omega|, R[$. Pour z dans D_R on écrit donc :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ où la série entière } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à R.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $f^{(k)}$ la fonction définie pour $z \in D_R$ par :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$

(on sait que cette série entière a même rayon de convergence que la série entière initiale).

II.A - Représentation intégrale de $f(\omega)$ à partir des valeurs de f sur C_r

II.A.1) Si $p \in \mathbb{N}$, prouver :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = 2\pi a_p r^p.$$

II.A.2) Montrer :

$$f(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - \omega} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi}.$$

Indication : on pourra partir de :

$$\frac{re^{it}}{re^{it}-\omega} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\omega}{re^{it}}\right)^p .$$

II.B - Principe du maximum

II.B.1) Justifier la définition de $M_f(r) = \text{Max}\{|f(z)|, z \in C_r\}$.

II.B.2) Montrer : $|f(\omega)| \leq \frac{r}{r-|\omega|} M_f(r)$.

II.B.3) Montrer : $|f(\omega)| \leq M_f(r)$.

Indication : si $p \in \mathbb{N}^*$, on pourra appliquer, avec justification, le résultat de II.B.2 à f^p puis faire tendre p vers $+\infty$.

II.C - Division de $f(z)-f(\omega)$ par $z-\omega$ pour f dans E_R

II.C.1) Si $j \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de la série de terme général $a_n \omega^{n-1-j}$ pour $n \geq j+1$. On pose :

$$b_j = \sum_{n=j+1}^{+\infty} a_n \omega^{n-1-j} .$$

II.C.2) Montrer que, lorsque $j \to +\infty$, $b_j = O\left(\frac{1}{r^j}\right)$.

II.C.3) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j$ est supérieur ou égal à R. Pour $z \in D_R$, on pose :

$$g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j .$$

Vérifier : $\forall z \in D_R$, $(z-\omega)g(z) = f(z)-f(\omega)$.

II.D - Minoration de $M_f(r)$ à l'aide des zéros de f

On suppose que $p \in \mathbb{N}^*$, que f s'annule en p points distincts $z_1, \ldots, z_p$ de $\overline{D}_r \backslash \{0\}$.

II.D.1) Montrer qu'il existe F dans E_R telle que :

$$\forall z \in D_R, F(z) \times \prod_{j=1}^{p} (z-z_j) = f(z) \times \prod_{j=1}^{p} (r^2 - \overline{z}_j z) .$$

II.D.2) Si $j \in \{1, \ldots, p\}$ et $z \in C_r \backslash \{z_j\}$ que vaut

$$\left|\frac{r^2 - \overline{z}_j z}{z-z_j}\right| ?$$

II.D.3) En appliquant II.B.3 à F au point $\omega = 0$, montrer :

$$M_f(r) \times \left| \prod_{j=1}^{p} z_j \right| \geq |f(0)| r^p .$$

II.D.4) On suppose $f(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver :

$$M_f(r) \times \left| \prod_{j=1}^{p} z_j \right| \geq \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^{p+k} .$$

II.E - Étude asymptotique d'une fonction entière nulle sur $\mathbb{N}$

On suppose que $R = +\infty$, $c \in]0, e[$, f est nulle sur $\mathbb{N}$ et que lorsque $r \to \infty$, $M_f(r) = O(c^r)$.

Montrer que $f = 0$.

Indication : on supposera par l'absurde $f \neq 0$, on appliquera II.D.4 avec $k = \text{Min}\{i \in \mathbb{N}, f^{(i)}(0) \neq 0\}$, $r = p$, $z_1 = 1, \ldots, z_p = p$, et on fera tendre p vers $+\infty$.

Partie III - Théorème de Pólya

Soit f dans E_∞.

III.A - Majoration de $\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(k) \right|$

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et r un réel tel que $r > n$.

III.A.1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{n!}{X(X-1)\ldots(X-n)} .$$

III.A.2) À l'aide de II.A.2, prouver :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1)\ldots(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) .$$

III.A.3) Montrer :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \right| \leq \frac{n! M_f(r)}{(r-1)\ldots(r-n)} .$$

III.B - Preuve du théorème

On suppose ici

a) $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$,

b) Lorsque $r \to +\infty$, $M_f(r) = o\left(\dfrac{2^r}{\sqrt{r}}\right)$.

On va démontrer que f est polynomiale (théorème de Pólya).

N.B. L'exemple de $f(z) = 2^z$ montre que la condition asymptotique (b) n'est pas loin d'être optimale.

III.B.1) En appliquant III.A.3 à $r = 2n + 1$, prouver qu'il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) = 0.$$

III.B.2) À l'aide de I.D) et II.E), prouver le résultat désiré.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère un espace euclidien E de dimension n. On note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y et $x \mapsto \|x\|$ la norme associée.

Pour $u \in L(E)$, on note u^* son adjoint, χ_u son polynôme caractéristique et $Sp(u)$ l'ensemble de ses valeurs propres. On note π_u le générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de u dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1. π_u est appelé polynôme minimal de u.

L'endomorphisme u de E est dit antisymétrique lorsque $u^* = -u$.

On note, $S(E)$, $A(E)$ et $O(E)$ les sous-ensembles de $L(E)$ formés respectivement des endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux.

Si F est un sous-espace de E stable par u, on note $u|_F$ l'endomorphisme de F induit par u.

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que u^* soit un polynôme en u et $\mathscr{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec leur adjoint, donc :

$$\mathscr{P}(E) = \{u \in L(E) \,/\, u^* \in \mathbb{R}[u]\},\ \mathscr{N}(E) = \{u \in L(E) \,/\, (u^* \circ u = u \circ u^*)\}.$$

Le but du problème est d'étudier et comparer les deux ensembles $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{N}(E)$.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et S_n, A_n et O_n les sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_A son polynôme caractéristique et π_A son polynôme minimal, c'est-à-dire le polynôme minimal de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On note ${}^tA$ la transposée de A.

Deux matrices A et B sont dites orthogonalement semblables lorsqu'il existe $P \in O_n$ tel que $B = P^{-1}AP$.

On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA$ peut s'exprimer comme un polynôme en A, donc :

$\mathscr{P}_n = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tA \in \mathbb{R}[A]\}$, et de manière analogue :

$\mathscr{N}_n = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tAA = A\,{}^tA\}$

Les parties I et II sont indépendantes.

Filière PSI

Partie I - Généralités sur $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}_n$

I.A -

I.A.1) Soient A et B les deux matrices d'un même endomorphisme de E rapporté à deux bases orthonormales. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.

I.A.2) Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice sur $\mathscr{B}$, une base orthonormale de E. Établir un rapport entre l'appartenance de u à $\mathscr{P}(E)$ (resp. $\mathscr{N}(E)$) et l'appartenance de A à $\mathscr{P}_n$ (resp. $\mathscr{N}_n$).

Dans la suite du problème, on pourra exploiter ce rapport pour répondre à certaines questions.

I.A.3) Montrer que $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{N}(E)$ et que $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{N}_n$.

I.B -

I.B.1) Vérifier que $S(E) \subset \mathscr{P}(E)$ et $A(E) \subset \mathscr{P}(E)$.

I.B.2) Quelles sont les matrices triangulaires supérieures qui appartiennent à $\mathscr{P}_n$?

En déduire que si $n \geq 2$, on a $\mathscr{P}(E) \neq L(E)$.

I.B.3) Soit $u \in L(E)$ admettant, sur une certaine base $\mathscr{B}$ de E, une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}'$ de E, telle que les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ soient triangulaires supérieures.

Montrer que la matrice de u dans $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure.

En déduire les éléments $u \in \mathscr{P}(E)$ qui sont trigonalisables.

I.B.4) On suppose que u est un automorphisme de E ; montrer que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. En déduire que u^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en u.

En déduire que $O(E) \subset \mathscr{P}(E)$.

I.C -

I.C.1) Montrer que si $A \in \mathscr{P}_n$ et $A \neq 0$, alors il existe un unique polynôme réel que l'on note P_A, tel que degré $(P_A) <$ degré(π_A) et $P_A(A) = {}^tA$.

Si A est la matrice nulle, on convient que P_A est le polynôme nul.

Énoncer le résultat correspondant pour $u \in \mathscr{P}(E)$.

I.C.2) Déterminer les matrices A de $\mathscr{P}_n$ pour lesquelles P_A est un polynôme constant.

I.C.3) Déterminer les matrices A de $\mathscr{P}_n$ pour lesquelles P_A est du premier degré. On rappelle que toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

I.C.4) Soient A et B deux matrices orthogonalement semblables.

Montrer que si $A \in \mathscr{P}_n$ alors $B \in \mathscr{P}_n$ et $P_A = P_B$.

I.D - Décrire les éléments A de $\mathscr{P}_2$ et calculer les P_A correspondants.

I.E - Soit

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \text{ avec } A_1 \in \mathscr{P}_{n_1},\ A_2 \in \mathscr{P}_{n_2}.$$

I.E.1) On suppose que π_{A_1} et π_{A_2} sont premiers entre eux. Montrer l'existence de deux polynômes U et V tels que :

$$P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\,\pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\,\pi_{A_2}.$$

Calculer A^m pour m entier positif quelconque, puis $P(A)$ pour $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1}$.

En déduire que $A \in \mathscr{P}_{n_1+n_2}$.

I.E.2) Expliciter π_A en fonction de π_{A_1} et π_{A_2}.

Comment trouver P_A connaissant π_{A_1}, π_{A_2}, et le polynôme P défini par :

$$P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1} \ ?$$

I.F - Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que $A \in \mathscr{P}_4$ et calculer P_A avec la méthode précédente.

Partie II - Étude de $\mathscr{N}(E)$ **et** $\mathscr{N}_n$

II.A - Montrer que si $u \in \mathscr{N}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(u) \in \mathscr{N}(E)$.

II.B - Soient $u \in \mathscr{N}(E)$ et $x \in E$. Montrer que $\|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$. En déduire que u et u^* ont le même noyau.

II.C - Soit m un entier, $m > 0$. On suppose donné un endomorphisme f antisymétrique inversible de l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de son produit scalaire canonique.

II.C.1) Comparer les déterminants de f et f^*. En déduire que m est pair.

II.C.2) On considère les applications n et g définies sur $\mathbb{R}^m$ par $n(x) = \|x\|^2$ et $g(x) = \|f(x)\|^2$ et l'application

$$q : U = \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R} \text{ définie par } q(x) = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}.$$

Montrer que n et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m$ et que leurs différentielles en x fixé sont les formes linéaires

$h \mapsto 2(x|h)$ et $h \mapsto 2(f(x)|f(h))$.

Montrer que l'application q est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle en x, en calculant $dq(x)(h)$ au moyen de produits scalaires et de normes.

On note $S = \{x \in U / \|x\| = 1\}$.

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par q sur S coïncide avec l'ensemble des valeurs prises par q sur U. Montrer que la fonction q admet un maximum sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et que ce maximum est atteint en un point $x_0 \in S$.

Montrer que, pour tout h, on a $(f(x_0)|f(h)) = \|f(x_0)\|^2 (x_0|h)$. En déduire que $\Pi = \text{Vect}(x_0, f(x_0))$ est un plan stable par f.

Donner une base orthonormale de Π et exprimer la matrice de $f|_\Pi$ relative à cette base.

II.C.3) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix} \text{ avec } \tau_i = \begin{bmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix} \text{ et } b_i \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

II.D - Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $E_1 \subset E$ un sous-espace stable par u et u^*. On note E_2 le supplémentaire orthogonal de E_1.

II.D.1) Montrer que E_2 est stable par u et u^*.

II.D.2) Montrer que $(u|_{E_1})^* = u^*|_{E_1}$.

II.D.3) Montrer que si, en outre, $u \in \mathscr{N}(E)$, alors $u|_{E_1} \in \mathscr{N}(E_1)$ et $u|_{E_2} \in \mathscr{N}(E_2)$.

Jusqu'à la fin de la partie II, u désigne un élément de $\mathscr{N}(E)$.

II.E - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$; montrer que $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$. En déduire que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres et que ceux-ci sont en somme directe orthogonale.

Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre associé. Soit F le supplémentaire orthogonal du sous-espace :

$$\bigoplus_{\lambda} E_u(\lambda)$$, où la somme porte sur l'ensemble des valeurs propres de u.

Montrer que F est stable par u et u^*. En considérant la restriction de u à F, montrer que la dimension de F ne peut être impaire. On notera $\dim F = 2p$.

II.F - On suppose que p est non nul. Soit $v \in \mathcal{N}(F)$. On pose

$$s = \frac{v + v^*}{2} \text{ et } a = \frac{v - v^*}{2}.$$

II.F.1) Justifier que le polynôme caractéristique de s est scindé.On le note :

$$\chi_s(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{n_i}.$$

II.F.2) Montrer que $s \circ a = a \circ s$ et $s \circ v = v \circ s$.

Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de v dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{bmatrix}$$

avec, pour $i = 1, \dots, k$, M_i de la forme $\lambda_i I_{n_i} + A_i$ où A_i est antisymétrique.

II.F.3) On suppose en outre que v n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les A_i sont inversibles.

II.G - Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_p \end{bmatrix} \text{ avec } D \text{ matrice diagonale, } \tau_i = \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix} \text{ et } b_i \neq 0$$

pour $i = 1, \dots, p$.

II.H - Donner une caractérisation des matrices $A \in \mathcal{N}_n$.

II.I - Préciser la matrice obtenue dans II.G quand $u \in O(E)$.

Partie III - Relation entre $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{N}_n$

III.A - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

III.A.1) Soit

$$\Delta = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{bmatrix}$$ une matrice réelle diagonale par blocs.

Montrer que $P(\Delta) = {}^t\Delta$ si et seulement $P(M_i) = {}^tM_i$, pour $i = 1, \dots, k$.

III.A.2) Donner les expressions de P_A, χ_A et π_A pour une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$ où $b \neq 0$.

Montrer que $P(A) = {}^tA$ si et seulement si $P(a+ib) = a-ib$ et $P(a-ib) = a+ib$.

Dans les questions qui suivent, on fixe $A \in \mathscr{N}_n$. D'après II.H, A est orthogonalement semblable à une matrice B telle que celle représentée dans II.G.

III.A.3) Montrer que $P(A) = {}^tA$ si et seulement si :

$$\begin{cases} P(\lambda) = \lambda \text{ pour toute valeur propre réelle } \lambda \text{ de } A \\ P(z) = \bar{z} \text{ pour toute racine complexe non réelle } z \text{ de } \chi_A \end{cases}.$$

III.A.4) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré minimal, vérifiant les conditions ci-dessus (sur $P(\lambda)$ et $P(z)$) et que ce polynôme est, en fait, à coefficients réels.

En déduire que $\mathscr{N}_n = \mathscr{P}_n$.

III.B - Montrer que le polynôme P trouvé dans III.A.4 est, en fait, P_A.

Retrouver, avec la méthode précédente, le polynôme P_A de la question I.F.

III.C - Dans cette question, on suppose $n \geq 3$ et on note $C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice circulante

$$C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{bmatrix}$$ et $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$.

III.C.1) Montrer que $J \in \mathscr{P}_n$.

En déduire que toute matrice circulante appartient à $\mathscr{P}_n$.

III.C.2) À toute matrice circulante non nulle $A = C(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$, on associe les polynômes

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \text{ et } Q(X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X^{n-i}.$$

Donner l'expression de π_J. Comparer Q et le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par π_J.

En déduire les étapes d'une méthode de calcul de P_A. Détailler le calcul pour $A = C(1, 1, 0)$.

III.D - Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe un entier $n \geq 3$ et une matrice $A \in \mathscr{P}_n$ telle que $P = P_A$ si et seulement si $(a_1 - 1)^2 - 4a_0 a_2 \in [0, 4[$.

Indication : montrer que, si n et A existent, χ_A admet au moins une racine réelle et exactement deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Plan du problème

Dans les préliminaires, on établit quelques généralités utiles par la suite sur les applications intégrables. Elles sont illustrées par la partie I et utilisées pour établir les résultats de la partie II. Dans les parties III et IV, on étudie le comportement asymptotique de quelques suites et séries en utilisant les idées qui précèdent.

Rappels et notations

- Soient f et g deux fonctions de variable réelle et à valeurs réelles ne s'annulant pas au voisinage d'un élément $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, sauf éventuellement en ce point. f et g sont dites équivalentes en b si et seulement si leur quotient tend vers 1 en b. On notera alors $f \sim g$ en b. f est dite négligeable devant g en b si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 en b. On notera alors $f = o(g)$ en b.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de termes non nuls à partir d'un certain rang. Les suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes si et seulement si la suite (w_n) définie pour n assez grand par $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1 ; on note alors $u_n \sim v_n$. La suite (u_n) est dite négligeable devant (v_n) si et seulement si (w_n) converge vers 0 ; on note alors $u_n = o(v_n)$.
- Pour une série $\sum u_n$ de nombres réels, on note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k .$$

Si de plus $\sum u_n$ est convergente, on note $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses restes :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k .$$

- $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Filière PC

Préliminaires

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$, f et g deux applications continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs strictement positives.

1) On suppose que g est intégrable sur $[a, b[$.

a) Montrer qu'en b, la relation $f = o(g)$ entraîne

$$\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right).$$

b) Montrer qu'en b, la relation $f \sim g$ entraîne $\int_x^b f \sim \int_x^b g$
(on justifiera l'intégrabilité de f sur les intervalles $[x, b[$ considérés).

2) On suppose que g n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

a) Montrer qu'en b, la relation $f = o(g)$ entraîne $\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right)$.

Montrer à l'aide d'exemples que l'on ne peut en général rien dire de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$.

b) Montrer qu'en b, la relation $f \sim g$ entraîne $\int_a^x f \sim \int_a^x g$.

Que dire de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$?

Partie I -

I.A -

I.A.1) Déterminer un équivalent simple de

$$\int_x^1 \frac{e^t}{\text{Arc sin} t}\, dt \text{ en } 0^+.$$

I.A.2) En déduire un équivalent simple de $\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\text{Arc sin} t}\, dt$ en 0^+.

I.B -

I.B.1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'en $+\infty$, on a

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

I.B.2) Plus généralement, si n est un entier naturel, établir le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right).$$

I.C -

I.C.1) Justifier le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right).$$

I.C.2) Écrire, dans le langage associé au logiciel de calcul formel utilisé, une procédure permettant d'obtenir le terme d'indice n ($n \geq 2$) du développement asymptotique en $+\infty$ (par rapport aux $\frac{e^x}{x^k}$, $k \geq 2$) de :

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$$

(on indiquera le logiciel de calcul formel utilisé).

Partie II -

Soit a un nombre réel et f une application de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives. On suppose que le quotient $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers une limite finie α en $+\infty$.

II.A - Montrer à l'aide des préliminaires qu'en $+\infty$, $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α (on peut distinguer le cas $\alpha = 0$).

II.B - On suppose dans cette question $\alpha < -1$.

II.B.1) Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

II.B.2) Montrer qu'en $+\infty$, on a $\int_x^{+\infty} f \sim \frac{-xf(x)}{\alpha+1}$ (on peut considérer $\frac{xf(x)}{\alpha+1}$ et utiliser les préliminaires).

II.C - On suppose dans cette question $\alpha > -1$.

II.C.1) Étudier l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

II.C.2) Montrer qu'en $+\infty$, on a

$$\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}.$$

II.C.3) Donner un exemple d'application f de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ à valeurs

strictement positives telles qu'en $+\infty$ le quotient $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tende vers une limite $\alpha > -1$, mais telle que l'on n'ait pas $\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

II.D -

II.D.1) Étudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$, selon $\beta \in \mathbb{R}$.

II.D.2) Étudier, à l'aide des questions précédentes, l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma(\ln x)^\beta}$, selon $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

II.E - Que conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ dans le cas $\alpha = -1$?

Partie III -

Dans cette partie, on considère une application f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs strictement positives.

On suppose qu'en $+\infty$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ tend vers $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère la série de terme général $f(n)$. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses restes quand la série converge.

On associe à f deux applications u et v continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et définies par :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [n-1, n[$, $u(x) = f(n)$ et $v(x) = \int_{n-1}^n f(t)dt$.

On pose enfin pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = e^{-\alpha x} f(x)$.

III.A - Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Montrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $t \in [n-1, n]$, on ait :

$$|h(t) - h(n)| \leq (e^\varepsilon - 1)h(n)$$

(on peut considérer $\frac{h'}{h}$).

III.B - On suppose dans cette question que α n'est pas nul. Déduire de III.A que lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$\int_{n-1}^n f(t)\,dt \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} f(n).$$

III.C - On suppose encore dans cette question que α n'est pas nul.

III.C.1) Exprimer pour $k \in \mathbb{N}^*$ les intégrales $\int_{k-1}^k v(t)dt$ et $\int_{k-1}^k u(t)dt$ à l'aide de f.

À l'aide des préliminaires, établir les résultats suivants :

III.C.2) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $f(n)$ converge et on a quand n vers $+\infty$,

$$R_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f(t)dt .$$

III.C.3) Si f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $f(n)$ diverge et on a quand n vers $+\infty$,

$$S_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_0^n f(t)dt .$$

III.D - On suppose à présent que $\alpha = 0$.

Montrer alors que la série de terme général $f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec $R_n \sim \int_n^{+\infty} f(t)dt$ en cas de convergence et $S_n \sim \int_0^n f(t)dt$ en cas de divergence.

Partie IV -

IV.A - À l'aide de ce qui précède, déterminer un équivalent simple des sommes suivantes quand n tend vers $+\infty$:

IV.A.1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

IV.A.2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

IV.A.3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln(k)$

IV.B - Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives équivalentes.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } S_n(b) = \sum_{k=0}^{n} b_k .$$

Dans le cas où ces séries convergent, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \text{ et } R_n(b) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n$$

IV.B.1) Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors quand n tend vers $+\infty$, on a $R_n(a) \sim R_n(b)$.

IV.B.2) Montrer que si $\sum a_n$ diverge, alors quand n tend vers $+\infty$, on a $S_n(a) \sim S_n(b)$.

IV.C - Déduire de ce qui précède les résultats suivants lorsque n tend vers $+\infty$:

IV.C.1)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

IV.C.2)

$$n! = \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right)$$

où γ et δ sont deux constantes qu'on ne demande pas d'expliciter.

IV.C.3) Que vaut δ ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans ce problème, nous étudions les propriétés de certaines classes de matrices carrées à coefficients réels et certains systèmes linéaires de la forme $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$, A étant une matrice à coefficients réels, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Cette étude fait l'objet des parties I à IV, et les matrices A considérées ont la particularité d'avoir beaucoup de termes nuls. Au cours de la dernière partie, on montre comment la recherche de solutions approchées d'une équation différentielle peut conduire à de tels systèmes linéaires.

Dépendance entre les questions

On peut aborder les parties II à V sans avoir traité entièrement la partie I. Le préambule de la partie III reprend les résultats de la partie II qui sont nécessaires pour la traiter. Les résultats des premières questions de la partie III servent dans la partie IV. Le début de la partie V peut être abordé directement.

Notations du problème

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et I_n désigne la matrice unité d'ordre n. Si M est une matrice (carrée ou non), ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M. On identifie un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et la matrice à n lignes et 1 colonne,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

et ${}^tx$ désigne alors la matrice à 1 ligne et n colonnes : ${}^tx = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$;

- e_k est l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le k-ième, égal à 1 ;
- $S_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées symétriques, à coefficients réels, d'ordre n (c'est-à-dire à n lignes et n colonnes) ;
- $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices orthogonales d'ordre n.

Filière PC

Partie I - Une famille de matrices symétriques

Soient n un entier naturel tel que $n \geq 2$, et α un réel strictement positif. On considère dans cette partie les matrices carrées $A_n = (a_{i,j})$ d'ordre n, telles que, pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{cases} a_{i,i} = 1 \\ a_{i,j} = -\alpha, \quad \text{si } |i-j| = 1 \\ a_{i,j} = 0, \quad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ainsi, pour n prenant respectivement les valeurs 2, 3, 4 :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

On note $P_n(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_n : $P_n(X) = \det(A_n - XI_n)$.

I.A - À propos des éléments propres de A_n

I.A.1) Calculer les polynômes $P_2(X)$ et $P_3(X)$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_2 et de A_3.

I.A.2) Montrer que $P_4(X) = (1-X)\,P_3(X) - \alpha^2 P_2(X)$.

I.A.3) De façon plus générale, exprimer $P_{n+2}(X)$ en fonction de $P_{n+1}(X)$ et de $P_n(X)$ pour tout $n \geq 2$.

I.A.4) Démontrer que 1 est valeur propre de A_n si et seulement si n est impair.

I.B - On suppose que n est un entier supérieur ou égal à 3 et que $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre λ.

I.B.1) Exprimer x_2 en fonction de x_1.

I.B.2) Exprimer x_3 en fonction de x_1 et x_2. En déduire

$$x_3 = \frac{P_2(\lambda)}{\alpha^2} x_1 .$$

I.B.3) Donner une relation entre x_{k-1}, x_k et x_{k+1} lorsque $2 \leq k \leq n-1$.

Avec la convention $P_1(X) = 1 - X$, démontrer que, pour tout k tel que $1 \leq k \leq n-1$,

$$x_{k+1} = \frac{P_k(\lambda)}{\alpha^k} x_1 .$$

I.B.4) Montrer que les sous-espaces propres $Ker(A_n - \lambda I_n)$ de la matrice A_n sont des droites vectorielles, puis que A_n admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Partie II - Matrices définies positives

On dit qu'une matrice symétrique $A \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^t x A x > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Dans les questions qui suivent, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et k est un entier tel que $1 \leq k \leq n$.

II.A - En calculant ${}^t e_k A e_k$, montrer que $a_{k,k} > 0$.

II.B - Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé.

Calculer ${}^t x A x$ et en déduire que $\lambda > 0$. Justifier que $\det(A) > 0$.

II.C - On suppose que $1 \leq k < n$ et on écrit A sous la forme de blocs

$$A = \begin{bmatrix} A' & B \\ {}^t B & A'' \end{bmatrix}, \quad \text{où } A' \in S_k(\mathbb{R}).$$

Préciser la taille des blocs A', A'', B, ${}^t B$.

Soit u un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $u_j = 0$ si $j > k$. En calculant ${}^t u A u$ en fonction de A' et de $u' = {}^t(u_1, \ldots, u_k)$, montrer que la sous-matrice A' est elle-même symétrique et définie positive.

II.D - Matrices symétriques à valeurs propres strictement positives

II.D.1) Soient M_1 et M_2 deux matrices symétriques d'ordre n. On suppose qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M_2 = {}^t Q M_1 Q$.

Montrer que M_1 est définie positive si et seulement si M_2 est elle-même définie positive.

II.D.2) Montrer qu'une matrice diagonale d'ordre n, à coefficients réels, est définie positive si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous strictement positifs.

II.D.3) Montrer qu'une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

II.E - Soit A_n la matrice symétrique définie dans la partie I.

Nous allons montrer que, sous certaines conditions, $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Supposons que x soit un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre λ et désignons par i_0 un indice pour lequel $\sup_{1 \le i \le n} |x_i| = |x_{i_0}|$.

II.E.1) Montrer que si $i_0 = 1$ ou $i_0 = n$ alors $|1 - \lambda| \le \alpha$ (*indication :* écrire la ligne 1 ou la ligne n du système $A_n x = \lambda x$).

II.E.2) Montrer que si $2 \le i_0 \le n-1$, alors $|1 - \lambda| \le 2\alpha$.

II.E.3) En déduire que si $\alpha < 1/2$, la matrice A_n est définie positive.

Partie III - Décomposition des matrices définies positives

Préambule : On cherche à démontrer dans cette partie la propriété $\mathscr{P}$:

Pour toute matrice $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice carrée L d'ordre n, triangulaire inférieure et à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $M = L\,{}^tL$.

On pourra utiliser ici les résultats de la partie II, en particulier le fait que, si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$,

- ses termes diagonaux sont strictement positifs ;
- son déterminant est strictement positif ;
- les sous-matrices formées des termes d'indices i, j, tels que $1 \le i, j \le k$, où $k \le n$, sont elles-mêmes symétriques et définies positives.

III.A - Montrer la propriété $\mathscr{P}$ pour $n = 2$. En notant

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \text{ et } \quad L = \begin{bmatrix} r & 0 \\ s & t \end{bmatrix},$$

donner les expressions de r, s, t en fonction de a, b, d.

III.B - On suppose la propriété $\mathscr{P}$ vraie au rang $n-1$ (avec $n \ge 3$), et on considère une matrice $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, que l'on écrira en 4 blocs :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & x \\ {}^tx & m \end{bmatrix},$$

où M_1 est une matrice carrée d'ordre $n-1$, m un réel et x un vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$, ${}^tx$ désignant la ligne transposée de x, à savoir : ${}^tx = [x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_{n-1}]$.

III.B.1) Montrer que M_1 est inversible.

III.B.2) Soient $\mu > 0$, $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ et L' une matrice triangulaire inférieure, d'ordre $n-1$, à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $M_1 = L' {}^tL'$. Montrer que la matrice carrée d'ordre n

$$L = \begin{bmatrix} L' & 0 \\ {}^tw & \mu \end{bmatrix}, \quad \text{où } 0 \text{ désigne le vecteur nul de } \mathbb{R}^{n-1},$$

vérifie $M = L\,{}^tL$ si et seulement si :

$$\begin{cases} L'w = x \\ \mu^2 = m - {}^txM_1^{-1}x \end{cases} \tag{1}$$

III.B.3) En admettant que

$$m - {}^txM_1^{-1}x > 0, \tag{2}$$

montrer que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang n.

III.C - Preuve de (2) et fin de la démonstration

III.C.1)

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} I_{n-1} & x \\ {}^ty & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & m \end{bmatrix}, \text{ d'ordre } n \geq 3.$$

Calculer $\det(A)$ en fonction de m, des x_i et des y_i.

III.C.2) Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive que l'on écrit par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & x \\ {}^tx & m \end{bmatrix}.$$

a) Calculer le produit de deux matrices :

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & x \\ {}^txM_1^{-1} & m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ {}^t0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Montrer, par un calcul de déterminants, que M vérifie la relation (2).

III.D - Décrire un algorithme de calcul de la matrice L.

Partie IV - Matrices tridiagonales

IV.A - Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On suppose que M est de plus tridiagonale, c'est-à-dire qu'elle vérifie $m_{i,j} = 0$ si $|i-j| \geq 2$.

IV.A.1) On suppose $n \geq 3$. Soient $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, tel que $x_i = 0$ si $1 \leq i \leq n-2$, et $L' = (\ell_{i,j})$, une matrice d'ordre $n-1$, triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont non nuls.
Résoudre l'équation $L'w = x$.

IV.A.2) L désigne encore la matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $L\,{}^tL = M$.

Démontrer, en raisonnant par récurrence et en utilisant la question III.B.2), que L est tridiagonale.

IV.B - On reprend les notations de la partie I et on suppose $\alpha < 1/2$. On note L_n la matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A_n = L_n\,{}^tL_n$.

IV.B.1) Calculer L_2 et L_3.

IV.B.2) On s'intéresse au système linéaire $A_n x = b$ où $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'il possède une unique solution.

b) Montrer que la résolution de ce système est équivalente à la résolution successive des systèmes $L_n y = b$ et ${}^tL_n x = y$.

c) Dénombrer avec soin les additions, les soustractions, les multiplications et les divisions que nécessite la résolution successive de ces deux systèmes.

Montrer que seules $2(3n-2)$ de ces opérations sont nécessaires pour obtenir x.

Partie V - Solutions approchées d'une équation différentielle

V.A - Question préliminaire : approximation d'une dérivée seconde

On pose $\mathcal{J} = [a, b]$. Soit $\phi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4. On rappelle que pour z et θ tels que z, $z+\theta \in \mathcal{J}$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral sous la forme :

$$\phi(z+\theta) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\phi^{(k)}(z)}{k!}\theta^k + \int_0^\theta \frac{(\theta-t)^3}{3!}\phi^{(4)}(z+t)\,dt\,.$$

On note

$$M_4 = \sup_{x \in [a,b]} \left|\phi^{(4)}(x)\right| .$$

V.A.1) Justifier l'existence de M_4 et donner une majoration de la valeur absolue du reste intégral en fonction de θ et de M_4. On pourra commencer par le cas où $\theta > 0$.

V.A.2) Montrer que si $z - \theta$, $z + \theta \in \mathscr{I}$,

$$\phi''(z) = \frac{\phi(z+\theta) - 2\phi(z) + \phi(z-\theta)}{\theta^2} + R_z(\theta) , \tag{3}$$

avec

$$|R_z(\theta)| \leq \frac{M_4 \theta^2}{12} .$$

Dans toute la suite du problème, on se donne $\omega > 0$, deux réels a_0 et a_1, une fonction g sur $[0,1]$, à valeurs réelles, de classe C^2.

On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \omega^2 u = g, \quad \text{sur } [0,1] \\ u(0) = a_0 \\ u(1) = a_1 \end{cases} \tag{4}$$

V.B -

V.B.1) Donner l'expression générale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{H}) : u'' - \omega^2 u = 0$.

V.B.2) On note u_0 une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : u'' - \omega^2 u = g$.

Donner l'expression générale des solutions de l'équation $(\mathscr{E})$. Montrer que le problème (4) admet une solution et une seule.

V.B.3) Montrer que cette solution est de classe C^4.

V.C - On se propose d'approcher la solution du problème (4)

On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en considérant les points

$$t_k = \frac{k}{n+1} , \; k \in \{0, \ldots, n+1\} .$$

Pour $1 \leq k \leq n$, on remplace l'équation :

$$u''(t_k) - \omega^2 u(t_k) = g(t_k)$$

par l'équation approchée :

$$\frac{u(t_{k+1}) - 2u(t_k) + u(t_{k-1})}{\theta^2} - \omega^2 u(t_k) = g(t_k), \qquad (5)$$

dans laquelle :

$$\theta = \frac{1}{n+1}.$$

On note

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t_1) \\ \vdots \\ u(t_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

V.C.1) Montrer que l'on peut choisir un réel $\alpha > 0$, que l'on exprimera en fonction de θ et de ω, qui permet de réécrire le système formé des n équations (5) sous la forme $A_n x = b$ où A_n est la matrice étudiée dans la partie I et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera.

V.C.2) Montrer que le système linéaire $A_n x = b$ possède une unique solution.

V.C.3) Dans cette question on choisit $\omega = 4$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $n = 3$, et on considère la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{4}{t+1}.$$

Donner les valeurs numériques de α, A_3, L_3 et b.

Donner les expressions approchées de $u(1/4)$, $u(2/4)$, $u(3/4)$ obtenues en mettant en œuvre la démarche proposée dans les parties IV et V du problème.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

L'épreuve est constituée par deux problèmes indépendants.

Partie I -

α étant un réel donné, on désigne par f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_\alpha(x) = \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x},$$

et, dans le cas où l'intégrale est convergente, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx .$$

I.A -

I.A.1) On suppose $\alpha < 0$.

Déterminer la limite de la fonction f_α quand x tend vers $+\infty$.

L'intégrale de la fonction f_α est-elle convergente sur $\mathbb{R}^+$?

I.A.2) Reprendre la question précédente dans le cas où $\alpha = 0$.

I.A.3) Montrer que :

$$f_\alpha(x) \geq \frac{x}{1 + x^\alpha}.$$

L'intégrale de la fonction f_α est-elle convergente sur $\mathbb{R}^+$ quand α vérifie $0 < \alpha \leq 2$?

Filière TSI

I.B - On suppose $\alpha > 0$. On pose :

$$v_n = \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi \int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{dx}{1+\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha}\sin^2 x},$$

$$u_n = \int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} f_\alpha(x)dx,$$

et $$w_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{dx}{1+\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha}\sin^2 x}.$$

I.B.1) Montrer que l'intégrale de la fonction f_α est convergente sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si la série

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente.

I.B.2) Montrer que :

$\forall n \in N^*$, $v_n \le u_n \le w_n$.

I.B.3) Montrer que

$$w_n = (2n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha}\sin^2 u} \quad \text{et} \quad v_n = (2n-1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha}\sin^2 u}.$$

I.B.4) h étant un réel strictement positif, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+h^2\sin^2 x}dx$$

et en déduire v_n et w_n.

I.B.5) Montrer qu'il existe une constante K strictement positive telle que

$$v_n \geq \frac{K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

pour tout entier naturel n non nul et une constante K' strictement positive telle que

$$w_n \leq \frac{K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1.

I.B.6) En déduire que l'intégrale de la fonction f_α est convergente sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha > 4$.

I.C - On pose

$$\phi(\alpha) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

pour tout α réel strictement supérieur à 4.

I.C.1) Montrer que ϕ est décroissante sur $]4, +\infty[$.

I.C.2) En utilisant la minoration de v_n établie à la question I.B.5, montrer que $\phi(\alpha)$ tend vers l'infini quand α tend vers 4.

I.C.3) En utilisant la majoration de w_n établie à la question I.B.5, montrer que $\phi(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$.

Partie II -

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ avec } u_n(x) = \frac{n^x}{n!}.$$

On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

II.A - Pour quelles valeurs de x la série est-elle convergente ?

On pose alors

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

II.B - Montrer que S est à valeurs strictement positives et que la fonction S est strictement croissante.

II.C - Calculer $S(0), S(1), S(2), S(3)$.

II.D - Montrer que, pour tout réel x strictement négatif et tout entier naturel n strictement supérieur à 1 :

$$0 < S(x) \leq S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On remarquera que, lorsque k est strictement supérieur à n, on a :

$$\left(\frac{k}{n}\right)^x < 1 \quad \text{et} \quad \frac{n!}{k!} \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}.$$

II.E - En déduire une valeur approchée de $S(-1)$ à 10^{-2} près.

II.F - Étudier les limites de S quand x tend vers $+\infty$, quand x tend vers $-\infty$.

II.G - Donner l'allure de la représentation graphique de S, en précisant la nature des branches infinies.

II.H - Démontrer que :

$$\forall x \in [0, 1],\ \forall p \in N^*,\ \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + e\frac{x^p}{p!}.$$

II.I - Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} \mathrm{d}t$$

est convergente.

II.J - Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt = S(-1).$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes de taille n.

On note ${}^tA$ la matrice transposée d'une matrice A.

On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Questions préliminaires

I.A - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ deux bases de E ; on note P la matrice de passage de $\mathscr{U}$ à $\mathscr{V}$.

Soit f un endomorphisme de E, A sa matrice sur $\mathscr{U}$ et B sa matrice sur $\mathscr{V}$. Exprimer A en fonction de B, de P et de P^{-1}. (On ne demande pas de démonstration).

I.B - Soient M et N deux matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$; on rappelle que M est dite semblable à N s'il existe une matrice inversible Q appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = QNQ^{-1}$.

Montrer que si M est semblable à N, alors N est semblable à M. On dit alors, de façon abrégée, que « M et N sont semblables ».

I.C - Soit A, B et C trois matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est semblable à B et que B est semblable à C.

Montrer que A est semblable à C.

Montrer aussi que ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

I.D - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

I.D.1) Montrer que si A est diagonale, A et ${}^tA$ sont semblables.

I.D.2) Montrer que si A est diagonalisable, alors A et ${}^tA$ sont semblables.

Plus généralement :

Le but du problème est de montrer que toute matrice A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

Filière TSI

Partie II - Cas $n = 2$

Dans cette partie, on fixe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, non diagonale, qu'on écrit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ et on cherche à résoudre l'équation } (\mathscr{E}) : {}^tAP = PA,$$

où l'inconnue P est une matrice appartenant à $M_2(\mathbb{R})$, qu'on cherchera sous la forme

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}.$$

II.A - Trouver un ensemble de conditions, portant sur x, y, z et t, qui soit nécessaire et suffisant pour que P vérifie $(\mathscr{E})$.

On ramènera cet ensemble à deux conditions, l'une étant $y = z$ et l'autre ne portant que sur x, y et t.

II.B - En prenant l'un des deux nombres x ou t nul, l'autre égal à $d - a$ et, dans chacun des deux cas, en choisissant convenablement y, trouver deux matrices P solutions ; montrer que l'une au moins de ces deux matrices est inversible.

II.C - Montrer que A et ${}^tA$ sont semblables.

Partie III - Cas $n = 3$

Dans cette partie, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. La base canonique est donc orthonormée. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est noté $\vec{x} \,.\, \vec{y}$.

On fixe une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$. On note f et h les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui admettent respectivement A et ${}^tA$ pour matrices sur la base canonique. On désigne par id l'endomorphisme identité et par I la matrice unité d'ordre 3.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$ est dit stable par f si, pour tout vecteur $\vec{v}$ de V, le vecteur $f(\vec{v})$ appartient à V.

III.A - Questions préliminaires

III.A.1) Montrer que toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, admet au moins un zéro.

III.A.2) Montrer que les matrices A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique et que ce polynôme admet au moins une racine réelle.

III.A.3) Soit (D) une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, dirigée par un vecteur $\vec{i}$.

Montrer que (D) est stable par f si et seulement si $\vec{i}$ est vecteur propre de f. Montrer qu'il existe au moins une droite stable par f.

III.A.4) On suppose que le réel a est valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant F, et valeur propre de h, le sous-espace propre associé étant H. Comparer les rangs des matrices $A - aI$ et ${}^tA - aI$. En déduire que F et H sont de même dimension.

III.A.5) Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, de matrices X et Y sur la base canonique.

Comparer le produit scalaire $\vec{x} \,.\, \vec{y}$ et l'unique terme de la matrice ${}^tXY$.

Exprimer de façon analogue les produits scalaires $f(\vec{x}) \,.\, \vec{y}$ et $\vec{x} \,.\, h(\vec{y})$ et montrer que ces deux nombres sont égaux.

III.A.6) Soit $\vec{u}$ un vecteur propre de h.

Montrer que le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\vec{u}$ est stable par f.

III.B - Dans toute cette question, on suppose qu'il existe une seule droite, notée (D), stable par f. On désigne par $\vec{i}$ un vecteur unitaire dirigeant (D).

III.B.1) Montrer qu'il existe une seule droite, qu'on notera (D'), stable par h. Dans toute cette question **III.B**, on suppose que (D') est orthogonale à (D) et on introduit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{k}$ dirigeant (D'). Soit B la matrice de f sur cette base.

III.B.2) Montrer que $f(\vec{j})$ est orthogonal à $\vec{k}$.

III.B.3) Justifier que B est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

III.B.4) En considérant le rang de $B - aI$, montrer que b et d sont non nuls.

III.B.5) On pose

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer BP et $P\,{}^tB$.

Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

III.C - Complément

On suppose, dans cette question seulement, que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que f vérifie toutes les hypothèses de **III.B**.

III.D - Dans cette question, on suppose que f ne vérifie pas toutes les hypothèses de la question **III.B**.

III.D.1) Montrer qu'il existe une droite (D) et un plan (P) stables par f, (D) n'étant pas contenue dans (P).

III.D.2) Montrer qu'on peut trouver un vecteur $\vec{i}$ dans (D) et deux vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans (P) tels que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Quel est l'aspect de la matrice B de f sur cette base ?

III.D.3) Montrer, en calculant les produits ${}^tBQ$ et QB et en utilisant la partie **II**, qu'on peut trouver des réels x, y, z et t tels que la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{bmatrix} \text{ soit inversible et vérifie } {}^tBQ = QB.$$

Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

Partie IV - Un résultat utile pour la suite du problème

On utilise maintenant des matrices complexes.

On note i le complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

IV.A - Soit M une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple (P, Q) de matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ tel que $M = P + iQ$.

IV.B - Soient A et B deux matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que ces deux matrices, considérées comme éléments de $M_n(\mathbb{C})$, sont semblables.

IV.B.1) Montrer qu'il existe deux matrices P_1 et P_2 appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telles que $P_1A = BP_1$, $P_2A = BP_2$ et $\det(P_1 + iP_2)$ est non nul.

IV.B.2) Soit g l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g(x) = \det(P_1 + xP_2)$.

Montrer, par exemple par récurrence sur n, que g est une fonction polynomiale.

Montrer que g n'est pas la fonction nulle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

En déduire qu'on peut trouver un réel x tel que $\det(P_1 + xP_2) \neq 0$.

IV.B.3) Montrer que les matrices A et B, considérées comme éléments de $M_n(\mathbb{R})$, sont semblables.

Partie V - Cas général

Dans cette partie, n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont A est la matrice sur la base canonique.

V.A - Rappeler le résultat du cours sur la trigonalisation d'un endomorphisme et justifier qu'il s'applique à f.

On admettra le résultat suivant, plus précis :

Soit α une valeur propre de f. On peut trouver une base $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et un entier k entre 0 et $n-1$ ayant les propriétés suivantes :

- La matrice T de f sur $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure.
- Les k premiers termes diagonaux sont tous différents de α et les $n-k$ derniers sont tous égaux à α.

On pose $g = f - \alpha\, id$, où id désigne l'identité de $\mathbb{C}^n$.

V.B - Dans cette question, $k = 0$; les termes diagonaux de T sont donc tous égaux à α.

V.B.1) Montrer que, pour tout i de 2 à n, $g(e_i)$ appartient au sous-espace engendré par $e_1, e_2, ..., e_{i-1}$.

En déduire que l'endormorphisme g^n est nul. (g^m désigne l'endomorphisme composé $g \circ g \circ ... \circ g$, où g est utilisé m fois).

Dans toute la suite de ce **V.B**, on désigne par p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que g^p soit nul.

Montrer que si $p = 1$, alors A est semblable à ${}^tA$.

On continue en supposant $p \neq 1$. On a donc : $2 \leq p \leq n, g^{p-1} \neq 0$ et on désigne par $\vec{u}$ un vecteur tel que $g^{p-1}(\vec{u})$ ne soit pas nul.

On pose $\vec{u}_p = \vec{u},\ \vec{u}_{p-1} = g(\vec{u}), ..., \vec{u}_1 = g^{p-1}(\vec{u})$.

Montrer que la famille $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ est libre.

V.B.2) On suppose que $p = n$.

Quelles sont les matrices de f sur les bases $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n)$ et $(\vec{u}_n, \vec{u}_{n-1}, ..., \vec{u}_1)$ de $\mathbb{C}^n$? Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

V.B.3) On suppose que $p < n$ et on complète $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ en une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n)$ de $\mathbb{C}^n$.

On note U la matrice de g sur cette base et P la matrice carrée dont la k – ième ligne est égale à la première ligne de U^{k-1}.

Montrer que les lignes de cette matrice P, à partir de la $p+1$ – ième, sont nulles. Que peut-on en conclure concernant le rang de P ?

Pour j et k entre 1 et p, préciser $g^{k-1}(u_j)$ suivant que $k < j$, $k = j$ ou $k > j$.

En déduire les p premiers termes de la k – ième ligne de P.

Montrer que la matrice P est de rang p.

Soit h l'endomorphisme admettant P pour matrice sur la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et soit W le sous-espace engendré par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p)$.

Montrer que pour tout $\vec{v} \in W$, on a $h(\vec{v}) = \vec{v}$.

En déduire que W et le noyau de h sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$. Montrer que ces deux sous-espaces sont stables par g et par f.

V.C - Dans cette question, k n'est pas nul.

V.C.1) Justifier que la matrice de g sur la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} T_1 & B \\ \hline O & T_2 \end{array}\right],$$

où les matrices T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures, de tailles respectives k et $n-k$.

Montrer que la matrice T_2^{n-k} est nulle et que la matrice T_1 est inversible.

V.C.2) On admet que la matrice de g^{n-k} sur la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} T_1^{n-k} & B' \\ \hline O & T_2^{n-k} \end{array}\right].$$

Quel est le rang de cette matrice ? Quelle est la dimension du noyau G de g^{n-k} ?

V.C.3) Soit F le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k)$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$ et que ces sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ sont stables par g et f.

V.D - On suppose par récurrence que toute matrice carrée complexe de taille comprise entre 1 et $n-1$ est semblable à sa transposée.

V.D.1) On suppose ici qu'il existe deux sous-espaces F et G supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$ et stables par f, aucun de ces deux sous-espaces n'étant réduit au vecteur nul.

En considérant les restrictions de f à F et G, montrer que A est semblable à ${}^tA$.

V.D.2) En rassemblant les résultats, montrer que, dans tous les cas, A est semblable à ${}^tA$.

V.E - On suppose maintenant que $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à ${}^tA$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Avertissement

Les trois parties sont indépendantes. Le résultat final de la Partie I fournit une valeur particulière de la fonction F étudiée dans les parties II et III.

Partie I - Calcul de la somme d'une série

I.A -

I.A.1) Calculer, sous forme trigonométrique réelle, les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle en 0 et π, et égale à 1 sur $]0,\pi[$. Pour tout entier $n \geq 0$, expliciter la somme partielle de Fourier $S_n f$ de f.

I.A.2) Que peut-on dire de la suite de fonctions $(S_n f)$? En déduire la valeur de

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

I.A.3) Calculer

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

I.B -

I.B.1) Préciser le domaine d'existence dans $\mathbb{R}$ de

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}.$$

Exprimer $L(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

I.B.2) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx.$$

I.B.3) En déduire la valeur de

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}.$$

Filière MP

I.B.4) Exprimer

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$$

en fonction de S_1 et S_2. En déduire la valeur de S_3.

* * *

Dans toute la suite, on utilise les notations qui suivent :

- Pour tout réel $t>0$, $\ln t$ désigne le logarithme népérien de t.
- Si t est un réel strictement positif et si $z = x+iy$, où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, est un complexe, on note $t^z = \exp(z\ln t)$.
- On définit la fonction $p :]0,1[\to \mathbb{R}$ par

$$p(t) = \frac{\ln t \cdot \ln(1-t)}{t}.$$

Pour tout z complexe tel que la fonction $t \mapsto t^{-z}p(t)$ est intégrable sur $]0,1[$, on pose

$$F(z) = \int_0^1 t^{-z}p(t)dt.$$

On définit ainsi une fonction F de la variable complexe z ; on notera encore, par extension, F la fonction de deux variables réelles associée.
Ainsi, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $F(x,y) = F(x+iy)$.

Le but du problème est d'étudier la fonction F.

Partie II - Étude locale de F

II.A - Montrer que le domaine de définition de F est $\Omega = \{z/z\in\mathbb{C}, Re(z)<1\}$. On pose $I = \Omega\cap\mathbb{R} =]-\infty,1[$.

II.B - Déterminer la limite de $F(z)$ quand la partie réelle de z tend vers $-\infty$.

II.C -

II.C.1) Déterminer la limite de $F(x)$ quand le réel $x \in I$ tend vers 1.

II.C.2) Pour tout $x \in I$, on pose

$G(x) = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| dt$. Calculer $G(x)$.

II.C.3) Prouver que la limite de $F(x) - G(x)$, quand $x \in I$ tend vers 1, existe et est finie.

II.C.4) En déduire la limite de $\frac{F(x)}{G(x)}$ quand $x \in I$ tend vers 1.

II.D - Montrer que la restriction de F à I est C^∞. Pour tout $x \in I$, donner l'expression de la dérivée k–ième $F^{(k)}(x)$ sous forme intégrale.

II.E -

II.E.1) Établir que F est de classe C^∞ sur Ω. Si k et l sont deux entiers ≥ 0 et si $z \in \Omega$, exprimer la dérivée partielle

$\frac{\partial^{k+l} F}{\partial x^k \partial y^l}(z)$ sous la forme d'une intégrale.

II.E.2) Comparer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$.

II.E.3) Évaluer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

II.F -

II.F.1) Soient $z \in \Omega$ et (z_n) une suite de points de Ω, distincts de z, qui converge vers z. Prouver l'existence de

$\lim_{n \to \infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z}$.

On pourra utiliser la continuité de $\frac{\partial F}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F}{\partial y}$, ainsi que le résultat de II.E.2.

On observera que cette limite ne dépend que de z, et non de la suite (z_n).

Par la suite, on note $DF(z)$ cette limite.

On définit ainsi une application $DF : \Omega \to \mathbb{C}$.

II.F.2) Pour tout entier $k \geq 2$, démontrer l'existence de l'application $D^k F = D(D^{k-1} F) : \Omega \to \mathbb{C}$. On convient que $D^1 F = DF$.

II.G -

II.G.1) Pour tout réel $t > 0$, développer en série entière de u la fonction $u \in \mathbb{C} \to t^{-u}$. Préciser le rayon de convergence.

II.G.2) Établir qu'au voisinage de 0,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ où } c_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 (-\ln t)^k p(t)dt . \quad (1)$$

II.G.3) Quel est le rayon de convergence R de la série entière (1) ?

II.H -

II.H.1) Déterminer un équivalent de c_k quand $k \to \infty$.

II.H.2) Quelle est la nature de la série (1) quand $|z| = R$?

Partie III - Développements en série

III.A -

III.A.1) Développer en série entière de $t \in \mathbb{R}$ la fonction

$t \to \frac{\ln(1-t)}{t}$. Préciser le rayon de convergence.

III.A.2) Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $z \in \Omega$, calculer

$$u_n(z) = \int_0^1 t^{n-z} \ln t \, dt .$$

III.A.3) Démontrer que $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-z)^2}$.

III.B -

III.B.1) Pour tout $x \in I$, exprimer

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} F(u)du$$

sous forme d'une série ne faisant plus intervenir d'intégrale. Préciser $\phi(0)$.

III.B.2) Déterminer un équivalent de $\phi(x)$ quand $x \in I$ tend vers 1.

III.C -

III.C.1) Si $y \in \mathbb{R}$, on pose $H(y) = F(iy)$. Les fonctions $|H|$ et $|H|^2$ sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}$? Préciser la valeur de

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(y)dy .$$

III.C.2) Pour quelles valeurs des réels α et β, la somme

$$S(\alpha,\beta) = \sum_{m,n\geq 1} (mn)^{-\alpha}(m+n)^{-\beta}$$ est-elle finie ?

III.C.3) Si

$$K_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} (y+im)^{-2}(y-in)^{-2}dy\,,$$

où m et n sont des entiers ≥ 1, calculer $K_{m,n}$. En déduire la valeur de

$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(y)|^2dy$ sous la forme $S(\alpha,\beta)$.

III.D -

III.D.1) Démontrer que la série de fonctions obtenue en III.A.3 converge sur un domaine $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}$ que l'on précisera. On note encore F le prolongement de F à $\tilde{\Omega}$. Prouver que F est de classe C^∞ sur $\tilde{\Omega}$.

III.D.2) Soient p un réel, n_0 un entier >0, z et z' deux complexes dont les parties réelles sont majorées par n_0. Pour tout entier $n > n_0$, majorer $\left|(z'-n)^{-p}-(z-n)^{-p}\right|$ en fonction de n, n_0, p et $|z'-z|$.

III.D.3) Avec les notations de II.F.1 et II.F.2, pour tout entier $k\geq 1$ et tout $z\in\tilde{\Omega}$, établir l'existence de $D^kF(z)$ qu'on exprimera sous forme de somme d'une série.

III.E -

III.E.1) Pour tout entier $k\geq 0$, évaluer c_k, défini en II.G.2, sous forme de somme d'une série numérique.

III.E.2) Retrouver, à l'aide du III.E.1, le résultat obtenu en II.H.1.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Objectif du problème

Cette introduction est destinée à expliquer le type des résultats obtenus dans le problème. Ce dernier ne commence qu'à partir du I.

Dans la démonstration en 1994 du « dernier théorème » de Fermat par Andrew Wiles, les « courbes elliptiques » jouent un rôle central par le biais de l'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan ouvert $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathscr{I}m(z) > 0\}$.

En effet, il se trouve que l'ensemble des courbes elliptiques sur le corps $\mathbb{C}$ est en bijection (à un $\mathbb{C}$-isomorphisme près) avec l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$ (à une similitude près), lui même en bijection avec l'ensemble des orbites du demi-plan $\mathscr{H}$ sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$. Ce sont quelques propriétés de ces deux derniers ensembles que nous proposons d'étudier dans ce problème.

Partie I - Matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers

Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ carrées d'ordre 2 à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Dans les parties I, II, III, les lettres a, b, c, d désignent des éléments de $\mathbb{Z}$. On pose :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I.A - Démontrer que l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ est un anneau.

I.B -

I.B.1) Démontrer que l'ensemble $GL_2(\mathbb{Z})$ des éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication, appelé le groupe des unités de l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$.

I.B.2) Montrer que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } |ad - bc| = 1.$$

Filière MP

I.C - On pose

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) : ad - bc = 1 \right\} ;$$

I.C.1) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

I.C.2) Déterminer l'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{bmatrix}$ appartienne à $SL_2(\mathbb{Z})$.

I.C.3) Déterminer l'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{bmatrix}$ appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$.

I.C.4) Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour qu'il existe une matrice

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ appartenant à $GL_2(\mathbb{Z})$?

I.D - Soient S et T les éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$ définis par

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Pour chacune des trois matrices T, S et TS, répondre aux questions suivantes :

I.D.1) La matrice est-elle diagonalisable, ou à défaut trigonalisable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Donner une forme réduite éventuelle ainsi qu'une matrice de passage.

I.D.2) La matrice est-elle diagonalisable, ou à défaut trigonalisable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Donner une forme réduite éventuelle ainsi qu'une matrice de passage.

I.E - On cherche les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

I.E.1) Soit A une telle matrice. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser les formes réduites diagonales possibles de A.

I.E.2) En déduire l'ensemble des matrices solutions A.

I.F -

On cherche les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

I.F.1) Soit A une telle matrice. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et calculer la trace $Tr(A)$ de A.

I.F.2) Donner la forme générale des matrices solutions A en fonction des trois paramètres a, b, c et d'une relation liant ces trois paramètres.

I.G -

I.G.1) Démontrer que si deux matrices U et V de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

I.G.2) En déduire que les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ solutions de l'équation :

$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sont semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Partie II - Réseaux de $\mathbb{C}$

On note $\mathscr{H}$ le demi-plan ouvert défini par $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$.

$\mathscr{B} = (\alpha, \beta)$ étant une base de $\mathbb{C}$ considéré comme plan vectoriel réel, on appelle réseau engendré par $\mathscr{B}$ l'ensemble $\Lambda_{\mathscr{B}} = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta = \{u\alpha + v\beta ; (u,v) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Pour simplifier les notations, un réseau sera généralement désigné par la lettre Λ, sans préciser quelle base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}$ l'engendre.

II.A -

II.A.1) De quelle structure algébrique est doté un réseau Λ ?

II.A.2) Démontrer que tout réseau Λ peut être engendré par une base

$\mathscr{B} = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{C}$ telle que $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathscr{H}$.

II.A.3) Démontrer que pour tout quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$, on a

$$Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} Im(z).$$

II.B -

II.B.1) Démontrer que si deux bases $\mathscr{B} = (\omega_1,\omega_2)$ et $\mathscr{B}' = (\omega_1',\omega_2')$ de $\mathbb{C}$ telles que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathscr{H} \text{ et } \frac{\omega'_1}{\omega'_2} \in \mathscr{H}$$

engendrent le même réseau Λ, alors il existe une matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ telle que } \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}.$$

II.B.2) Étudier la réciproque.

II.C - On considère un réseau Λ engendré par une base $\mathscr{B} = (\omega_1,\omega_2)$ de $\mathbb{C}$ telle que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathscr{H}$$

Déterminer l'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\mathscr{B}' = (\omega_1',\omega_2')$ avec $\omega'_1 = 3\omega_1 + 5\omega_2$ et $\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2$ soit une base de $\mathbb{C}$ engendrant également le réseau Λ.

II.D - Pour tout complexe $\tau \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ on note Λ_τ le réseau engendré par la base $(\tau,1)$ de $\mathbb{C}$. On suppose que $\tau \in \mathscr{H}$. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $\tau' \in \mathscr{H}$ vérifie $\Lambda_{\tau'} = \Lambda_\tau$.

Partie III - Similitudes directes de centre O laissant stable un réseau

Si Λ est un réseau et z un nombre complexe, on pose $z\Lambda = \{z\rho \ ; (\rho \in \Lambda)\}$.

On dit que deux réseaux Λ et Λ' sont semblables s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda' = \lambda\Lambda$.

III.A -

III.A.1) Démontrer que tout réseau Λ est semblable à un réseau Λ_τ où $\tau \in \mathscr{H}$.

III.A.2) Démontrer que deux réseaux Λ_τ et $\Lambda_{\tau'}$, où $(\tau,\tau') \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$, sont semblables si et seulement si il existe une matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ telle que } \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

La fin de la partie III montre qu'il existe des similitudes directes de centre O, autres que des homothéties, laissant stable un réseau donné Λ.

III.B - Soit Λ un réseau.

III.B.1) Indiquer, sans faire de démonstration, le lien existant entre l'ensemble $S(\Lambda) = \{z \in \mathbb{C} \,;\, z\Lambda \subset \Lambda\}$ et l'ensemble des similitudes directes σ de centre O laissant stable le réseau Λ, c'est-à-dire telles que $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$.

III.B.2) Quel est l'ensemble des homothéties de centre O laissant stable le réseau Λ ? En déduire l'ensemble $S(\Lambda) \cap \mathbb{R}$.

III.B.3) De quelle structure algébrique est doté l'ensemble $S(\Lambda)$?

III.B.4) $\mathscr{B} = (\omega_1, \omega_2)$ étant une base de $\mathbb{C}$, on pose

$\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$. Comparer les ensembles $S\left(\Lambda_{\mathscr{B}}\right)$ et $S(\Lambda_\tau)$.

III.B.5) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre les ensembles $S(\Lambda_\tau)$ et Λ_τ ?

III.C - τ étant un complexe de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on considère le réseau Λ_τ engendré par la base $(\tau, 1)$ de $\mathbb{C}$.

III.C.1) On suppose que l'ensemble $S(\Lambda_\tau)$ n'est pas réduit à $\mathbb{Z}$. Montrer que τ est alors racine d'un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

III.C.2) Réciproquement, on suppose que τ est racine non réelle d'un polynôme $P(X) = uX^2 + vX + w$ du second degré à coefficients u, v, w dans $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $S(\Lambda_\tau)$ n'est pas contenu dans $\mathbb{R}$.

b) Que dire des ensembles $S(\Lambda_\tau)$ et Λ_τ si $u = 1$?

Partie IV - Action du groupe Γ des homographies associées à $SL_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $\mathscr{H}$

Dans cette dernière partie, on étudie l'action de ce groupe Γ sur l'ensemble $\mathscr{H}$. On introduit au IV.D un sous-ensemble fondamental $\mathscr{F}$ de $\mathscr{H}$. On montre aux questions IV.E et IV.F que Γ est engendré par les homographies s et t associées aux matrices S et T introduites au I.D et qu'un système de représentants des orbites de Γ est constitué par les points de $\mathscr{F}$.

À toute matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

de $SL_2(\mathbb{Z})$ on associe l'application $g : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall \tau \in \mathscr{H},\ g(\tau) = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$.

IV.A -

IV.A.1) Montrer que l'on a $g(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H}$. On identifie dorénavant g avec l'application de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ qu'elle induit. Lorsque la matrice A parcourt $SL_2(\mathbb{Z})$, l'application correspondante g de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ décrit un ensemble noté Γ. Dans la suite de cette question on s'intéresse aux propriétés de la surjection

$$\Phi : \begin{cases} SL_2(\mathbb{Z}) \to \Gamma \\ A \mapsto g \end{cases}$$

IV.A.2) Montrer que $\Phi(A) \circ \Phi(A') = \Phi(AA')$. En déduire que la loi $\circ$ de composition des applications est une loi interne sur Γ.

IV.A.3) Pour tout $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, montrer que $\Phi(A)$ est une bijection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}$ et que l'on a $[\Phi(A)]^{-1} = \Phi(A^{-1})$. En déduire que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe.

IV.A.4) Montrer que $\left[\Phi(A) = id_{\mathscr{H}}\right] \Leftrightarrow [A = \pm I_2]$.

IV.A.5)

a) Résoudre l'équation $\Phi(A') = \Phi(A)$.

b) En utilisant les matrices S et T définies en I.D, vérifier que le groupe $(\Gamma, \circ)$ n'est pas commutatif.

IV.B -

IV.B.1) Montrer que le cercle $\mathscr{C}(\omega, R)$ de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ a pour équation

$$|z|^2 - (\omega \bar{z} + \bar{\omega} z) + |\omega|^2 = R^2 .$$

À quelle condition nécessaire et suffisante ce cercle est-il inclus dans $\mathscr{H}$?

IV.B.2) On appelle s l'application de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ associée à la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

définie au I.D, c'est-à-dire l'élément $s = \Phi(S)$ de Γ. Déterminer l'image par s d'un cercle $\mathscr{C}(\omega, R)$ inclus dans $\mathscr{H}$.

IV.C -

IV.C.1) Trouver l'image par s d'une droite $\mathscr{D}$ incluse dans $\mathscr{H}$, c'est-à-dire d'une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \beta$, avec $\beta > 0$.

IV.C.2) Trouver l'image par s d'une demi-droite $\mathscr{D}_+$ d'équation

$\begin{cases} x = \alpha \\ y > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, incluse dans $\mathscr{H}$.

IV.D - On introduit le sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathscr{H}$, défini par

$$\mathscr{F} = \left\{ \tau \in \mathscr{H} : |\tau| \geq 1, \, | \, Re(\tau)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

On appelle t l'application de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ associée à la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

définie au I.D, c'est-à-dire l'élément $t = \Phi(T)$ de Γ. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathscr{F}$ et ses images $t(\mathscr{F})$ et $t^{-1}(\mathscr{F})$ par les applications t et t^{-1}.

IV.E - On note G le sous-groupe de Γ engendré par l'ensemble $\{s, t\}$. Soit τ un élément de $\mathscr{H}$.

IV.E.1) Montrer qu'il existe un élément $g_0 \in G$ tel que
$(\forall g \in G) \; Im(g(\tau)) \leq Im(g_0(\tau))$.

IV.E.2) On pose alors $\tau' = g_0(\tau)$. Démontrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\left| \, Re(t^m(\tau')) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

IV.E.3) Vérifier que $\left| t^m(\tau') \right| \geq 1$ et en conclure que $t^m(\tau') \in \mathscr{F}$.

IV.F - On peut démontrer le résultat suivant, que l'on admettra ici : si $\tau \in \mathscr{F}$ et si pour un élément $g \in \Gamma$, avec $g \neq id_{\mathscr{H}}$, on a $g(\tau) \in \mathscr{F}$ alors τ est un point frontière de $\mathscr{F}$, autrement dit on a

$$Re(\tau) = \pm \frac{1}{2} \text{ ou } |\tau| = 1.$$

En utilisant ce résultat ainsi que ceux de la section IV.E, démontrer que $G = \Gamma$.

Indication : on pourra considérer un point τ intérieur à F (c'est-à-dire $\tau \in \overset{\circ}{F}$) et son image $g(\tau)$ par $g \in \Gamma$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations, définitions

Si I est un intervalle, F une application de I dans I, n un élément de $\mathbb{N}^*$, on pose $F^n = F \circ \ldots \circ F$ (composé de n fois F) ; on convient que $F^0 = Id_I$. Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et F une application de I dans J, on dit que F est un C^1-difféomorphisme de I sur J si et seulement si F est une bijection de classe C^1 de I sur J dont la réciproque est elle aussi de classe C^1. On rappelle que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que F soit de classe C^1, que la dérivée F' de F ne s'annule pas sur I, et que $F(I) = J$.

On désignera par $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[0, r]$ avec $r > 0$ et f une application de classe C^∞ de I dans lui-même vérifiant :

i) $f(0) = 0$,

ii) $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $f(x) < x$,

iii) $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$.

Si (I, f) et (J, g) sont dans $\mathcal{E}$, on dit que (I, f) et (J, g) sont *conjugués* si, et seulement si, existent deux réels r et r' dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $[0, r] \subset I$, $[0, r'] \subset J$ et un C^1-difféomorphisme croissant h de $[0, r]$ sur $[0, r']$ tel que :

$$\forall y \in [0, r'],\ g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y).$$

Enfin, si λ est dans $]0, 1]$, $\mathcal{E}_\lambda$ désigne l'ensemble des couples (I, f) éléments de $\mathcal{E}$ tels que $f'(0) = \lambda$.

Objectif du problème

Le but du problème est de prouver que si λ est dans $]0, 1]$, alors deux éléments quelconques de $\mathcal{E}_\lambda$ sont conjugués puis d'étudier le problème de la conjugaison dans $\mathcal{E}_1$.

Dépendance des parties

Le résultat du I.D est utilisé dans les parties II et III. Les parties II et III sont formellement indépendantes, mais certaines questions de la partie III se traitent sur le modèle de questions de la partie II ; elles sont explicitement signalées dans l'énoncé.

Filière PSI

Partie I - Préliminaires

I.A - Soit (I, f) et (I, g) deux éléments conjugués de $\mathcal{E}$. Montrer que $f'(0) = g'(0)$.

I.B - Soit f une application de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], f)$ appartienne à $\mathcal{E}$.

I.B.1) Montrer que $f'(0)$ est dans $]0, 1]$.

I.B.2) Montrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.

I.B.3) Montrer que cette convergence est uniforme.

I.C - Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général $a_n = u_n - 1$ converge absolument et on pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k .$$

En considérant la série de terme général $(\ln P_{n+1} - \ln P_n)$, montrer que la suite (P_n) converge vers un réel strictement positif.

I.D - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(\phi_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que la série de fonctions de terme général $\psi_n = \phi_n - 1$ converge normalement sur I. On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n} \phi_k .$$

Montrer que la suite de fonctions $(Q_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Partie II - Conjugaison d'éléments de $\mathcal{E}$ localement contractants

Soient λ dans $]0,1]$ et f une application de $[0,1]$ dans lui-même telle que $([0,1],f)$ appartienne à $\mathcal{E}_\lambda$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{f^n}{\lambda^n}.$$

Soit enfin h_λ l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par :

$\forall x \in [0,1], h_\lambda(x) = \lambda x$.

II.A - Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n \circ f - h_\lambda \circ u_{n+1}$.

II.B -

II.B.1) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda + \varepsilon < 1$ et $(\lambda+\varepsilon)^2 < \lambda$.

II.B.2) Montrer qu'il existe a dans $]0,1]$ tel que :

$\forall x \in [0,a]$, $f(x) \leq (\lambda+\varepsilon)x$.

II.C -

II.C.1) Montrer qu'il existe $C \geq 0$ tel que :

$\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - \lambda x| \leq Cx^2$.

II.C.2) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [0,1]$, $f^n(x) \in [0,a]$.

II.C.3) Pour $n \geq n_0$ et $x \in [0,1]$, majorer $|u_{n+1}(x) - u_n(x)|$ et prouver que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Sa limite sera notée u.

II.D -

II.D.1) Montrer que la série de fonctions de terme général

$\frac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1$ converge normalement sur $[0,1]$.

II.D.2) En déduire que u est un C^1-difféomorphisme de $[0,1]$ sur son image.

II.E - Conclure que $([0,1],f)$ et $([0,1],h_\lambda)$ sont conjugués.

Partie III - Conjugaison des éléments de $\mathcal{E}$ tangents à l'identité

On note $\mathcal{E}_1^*$ l'ensemble des éléments (I, f) de $\mathcal{E}_1$ tels que l'ensemble $\{k \in N^*, f^{(k+1)}(0) \neq 0\}$ soit non vide. Pour (I, f) dans $\mathcal{E}_1^*$, on note $\nu(f) = \min\{k \in N^*, f^{(k+1)}(0) \neq 0\}$. La formule de Taylor-Young donne alors :

$$\text{quand } x \to 0,\ f(x) = x - a x^{\nu(f)+1} + o(x^{\nu(f)+1}) \text{ avec } a = \frac{-f^{(\nu(f)+1)}(0)}{(\nu(f)+1)\,!}.$$

III.A -

III.A.1) Pour q dans $\mathbb{N}^*$, soit θ_q la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1],\ \theta_q(x) = \frac{x}{(1 + x^q)^{1/q}}.$$

Montrer que $([0, 1], \theta_q)$ est dans $\mathcal{E}_1^*$, préciser $\nu(\theta_q)$.

Dans la suite de III.A, on considère une fonction f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $([0, 1], f)$ appartienne à $\mathcal{E}_1^*$ et on pose $q = \nu(f)$ puis :

$$a = -\frac{f^{(q+1)}(0)}{(q+1)\,!}.$$

III.A.2)

a) Vérifier que a est strictement positif.

b) Si (I, g) appartient à $\mathcal{E}$ et est conjugué à $([0, 1], f)$, vérifier que (I, g) est aussi dans $\mathcal{E}_1^*$ avec $\nu(g) = q$.

III.A.3) Dans ce III.A.3, on suppose qu'il existe k dans $\{2, 3, \ldots, q\}$ et b dans $\mathbb{R}^*$ tels que

$$\text{quand } x \to 0,\ f(x) = x - a x^{q+1} + b x^{q+k} + o(x^{q+k}).$$

Soit β un nombre réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = x + \beta x^k.$$

a) Montrer qu'il existe r et r' dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que h induise un C^1-difféomorphisme de $[0, r]$ sur $[0, r']$.

Dans la suite de III.A.3, les réels r et r' sont ainsi choisis et on note h^{-1} le difféomorphisme réciproque de la restriction de h à $[0, r]$.

b) Établir :quand $y \to 0$, $h^{-1}(y) = y - \beta y^k + o(y^k)$.

c) Déterminer les développements limités à l'ordre $q+k$ en 0 de $x \mapsto h \circ f(x)$ puis de $y \mapsto h \circ f \circ h^{-1}(y)$.

III.A.4) De ce qui précède déduire l'existence d'un réel E et d'un couple (I, g) de $\mathcal{E}_1^*$ conjugué à $([0,1], f)$ et tels que :

$$\text{quand } y \to 0,\ g(y) = y - \frac{y^{q+1}}{q} + Ey^{2q+1} + o(y^{2q+1}).$$

III.B - Dans cette section III.B, q est un entier strictement positif, E est un nombre réel et g une application de $[0,1]$ dans lui-même telle que $([0,1], g)$ appartienne à $\mathcal{E}_1^*$ et que :

$$\text{quand } y \to 0,\ g(y) = y - \frac{y^{q+1}}{q} + Ey^{2q+1} + o(y^{2q+1}).$$

On définit une application τ_q sur $]0,1]$ par :

$$\forall y \in]0,1],\ \tau_q(y) = \frac{1}{y^q}.$$

Donc τ_q est un C^1-difféomorphisme de $]0,1]$ sur $[1, +\infty[$; on ne demande pas de le vérifier. Soit enfin $G = \tau_q \circ g \circ \tau_q^{-1}$.

III.B.1)

a) Identifier $T_q = \tau_q \circ \theta_q \circ \tau_q^{-1}$.

b) Quelles propriétés de G déduit-on des propriétés ii) et iii) du début de l'énoncé ?

c) Déterminer un nombre réel R tel que :

$$\text{quand } x \to +\infty,\ G(x) = x + 1 + \frac{R}{x} + O\left(\frac{1}{x^{1+1/q}}\right).$$

III.B.2)

a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in [1, +\infty[,\ G^n(x) \geq x + \frac{n}{2}.$$

Pour tous n entier naturel et x réel supérieur ou égal à 1, on pose :

$$u_n(x) = G^n(x) - n.$$

b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in [1, +\infty[,\ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{C}{n}.$$

En déduire que pour tout $X \geq 1$ il existe un réel strictement positif K tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in [1, X],\ |u_n(x)| \leq K \ln n .$$

c) Pour tous n entier naturel strictement positif et x réel supérieur ou égal à 1, on pose : $v_n(x) = u_n(x) - R\ln n$, où R est la constante définie au III.B.1-c). Démontrer, en procédant comme au II.C.3), que la suite de fonctions $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers une fonction v et que cette convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.

d) Si $x \geq 1$, vérifier que $v \circ G(x) = v(x) + 1$.

III.B.3)

a) Montrer que :

$$\text{quand } x \to +\infty,\ G'(x) = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$ et, en procédant comme en II.D.1), prouver que v est un C^1-difféomorphisme de $[1, +\infty[$ sur son image.

III.B.4)

a) Montrer que $v'(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$.

b) Conclure, si f est une fonction de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], f)$ soit dans $\mathcal{E}_1^*$ et $\nu(f) = q$, que $([0, 1], f)$ est conjugué à $([0, 1], \theta_q)$.

III.C - Soit $(w_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$w_0 = \frac{\pi}{8} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \operatorname{sh}(\sin(w_n)) .$$

III.C.1)

a) Utiliser ce qui précède pour montrer que w_n admet un équivalent du type $\frac{a}{n^\alpha}$ avec a et α réels. Déterminer α.

b) Montrer qu'il existe des nombres réels b et c tels que :

$$w_n = \frac{a}{n^\alpha} + \frac{b}{n^{3\alpha}} + c\,\frac{\ln n}{n^{5\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha}}\right).$$

III.C.2) Établir un programme permettant de calculer a, b, c (on utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel).

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Notations et objectifs du problème

Dans tout ce problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $d \geq 1$. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E est noté $(u|v)$, la norme du vecteur u est notée $\|u\|$.

L'espace des endomorphismes de E est noté $L(E)$. Le composé de deux éléments f et g de $L(E)$ est noté indifféremment fg ou $f \circ g$ et l'identité I_E. L'adjoint de f est noté f^* ; on rappelle qu'il est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ (f(u)|v) = (u|f^*(v)).$$

Si f est un élément de $L(E)$, $Tr(f)$ désigne la trace de f. Le composé de p exemplaires de f est noté f^p (avec, par convention, $f^0 = I_E$). Si F est un sous espace de E stable par f, l'endomorphisme induit par f sur F est noté f_F.

On notera $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques (ou autoadjoints) de E et $S^+(E)$ le sous ensemble de $S(E)$ constitué des endomorphismes symétriques dont les valeurs propres sont positives.

On rappelle que, si $t \mapsto x(t)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans E et $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_d)$ une base de E, par rapport à laquelle les coordonnées de $x(t)$ sont $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_d(t)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \sum_{i=1}^{d} x_i(t) e_i$$

alors x est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, si et seulement si, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ l'application $t \mapsto x_i(t)$ est une application de classe C^k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit f un élément de $L(E)$ et x_0 un élément de E. On considère l'équation

$$\mathscr{P}(f, x_0) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dont l'inconnue x est la fonction $t \mapsto x(t)$ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans E.

On rappelle que, pour tout x_0 de E, il existe une unique solution de $\mathscr{P}(f, x_0)$. On l'appelle f-trajectoire de x_0.

Filière PSI

Afin d'alléger la rédaction, on conviendra que toute propriété géométrique d'une trajectoire x concerne en réalité l'ensemble $x(\mathbb{R}) = \{x(t) | t \in \mathbb{R}\}$; par exemple, on dira que la trajectoire x est un cercle si $x(\mathbb{R})$ est un cercle.

On désigne par $B(E)$ l'ensemble des f, éléments de $L(E)$, tels que toutes les $f-$trajectoires sont bornées, c'est-à-dire sont telles que, quel que soit le choix de x_0, il existe un réel $M \geq 0$, dépendant de x_0, pour lequel on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|x(t)\| \leq M,$$

si x désigne la $f-$trajectoire de x_0.

De même, on note $SP(E)$ l'ensemble des f, éléments de $L(E)$, tels que toutes les $f-$trajectoires sont sphériques, c'est-à-dire sont telles que, quel que soit le choix de x_0, il existe un élément $\gamma \in E$ et un réel $r \geq 0$, dépendants de x_0, pour lesquels on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|x(t) - \gamma\| = r,$$

si x désigne la $f-$trajectoire de x_0.

L'objectif du problème est de caractériser les ensembles $B(E)$ et $SP(E)$.

Partie I - Étude de trajectoires

I.A - Soit F un sous-espace de E, stable par f. Montrer que si $x_0 \in F$, la $f-$trajectoire de x_0 est contenue dans F.

I.B - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et x la $f-$trajectoire de x_0. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, λ, t.

I.C - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un élément de $\mathrm{Ker}\, f^2$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\, f$ et x la $f-$trajectoire de x_0. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, $f(x_0)$, t et préciser la nature géométrique de cette trajectoire.

I.D - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un élément de $E - \{0\}$. On suppose qu'il existe un réel ϕ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ et un réel k strictement positif tels que

$$(f^2 - 2k\cos\phi f + k^2 I_E)(x_0) = 0.$$

On note $t \mapsto x(t)$ la $f-$trajectoire de x_0.

I.D.1) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0))$ est libre et justifier l'existence de deux applications u et v de $\mathbb{R}$ dans E, telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0).$$

I.D.2) Montrer que u et v sont de classe C^2. Former une équation différentielle linéaire du second ordre, avec deux conditions initiales, vérifiée par u. En déduire l'expression de u.

I.D.3) Montrer que x est bornée si et seulement si $\cos\phi = 0$. Dans ce cas, décrire géométriquement la $f-$trajectoire x. À quelles conditions cette trajectoire est-elle un cercle ?

I.E - Soit k un réel strictement positif, f un élément de $L(E)$, $g = f^2 + k^2 I_E$ et x_0 un élément de $\operatorname{Ker} g^2$. On désigne par G la famille

$$G = \{x_0, f(x_0), g(x_0), gf(x_0)\}.$$

I.E.1) Montrer que $F = \operatorname{vect}(G)$ est stable par f.

I.E.2) Montrer que G est libre si et seulement si $g(x_0) \neq 0$.

I.E.3) On suppose que $g(x_0) \neq 0$. Montrer que la $f-$trajectoire de x_0 peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0).$$

Déterminer $u(t)$, $v(t)$, puis $w(t)$, puis $h(t)$. Montrer que cette trajectoire n'est pas bornée.

Partie II - Étude des endomorphismes à trajectoires bornées

Dans les questions II.A à II.D incluses, f désigne un endomorphisme de E tel que toutes les $f-$trajectoires sont bornées : $f \in B(E)$.

II.A - Soit λ une valeur propre réelle de f. Montrer que $\lambda = 0$.

II.B - Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

II.C - Exhiber, *sans démonstration*, un polynôme *non nul*, à coefficients réels, qui annule f. Démontrer qu'il existe un polynôme unitaire à coefficient réel qui est de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ annulant f.

Dans toute la suite de la section II.C, ce polynôme est noté P.

II.C.1) Soit Q $(Q \in \mathbb{R}[X])$ un diviseur non constant de P. Montrer que $Q(f)$ ne peut être inversible.

II.C.2) On suppose que P admet une racine réelle λ. Montrer que $\lambda = 0$ et, en s'aidant de la question II.B, que l'ordre de multiplicité de cette racine dans P est égal à 1.

II.C.3) Que dire de f si P est scindé sur $\mathbb{R}$?

II.C.4) On suppose que P possède une racine complexe λ non réelle. On écrit λ sous forme trigonométrique : $\lambda = ke^{i\phi}$, avec k et ϕ réels, $k > 0$ et ϕ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$. Démontrer qu'il existe un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que : $(f^2 - 2k(\cos\phi)f + k^2 I_E)(x_0) = 0$. En déduire la valeur de $\cos\phi$. Qu'en conclure sur les racines non réelles de P ?

II.C.5) Soit $k > 0$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + k^2 I_E)^2 = \mathrm{Ker}(f^2 + k^2 I_E)$.

II.C.6) On suppose $f \neq 0$; démontrer qu' il existe un entier $s \geq 1$ et des réels $a_1, a_2, \ldots, a_s$ strictement positifs et distincts tels que P soit de l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$P = \prod_{i=1}^{s} (X^2 + a_i^2) \text{ ou } X\prod_{i=1}^{s} (X^2 + a_i^2).$$

II.D - Prouver que f vérifie les deux propriétés suivantes :

i) L'endomorphisme f^2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels négatifs ou nuls.

ii) $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2$.

Prouver que les dimensions des sous-espaces propres de f^2 associés à ses valeurs propres strictement négatives sont paires.

II.E - Réciproquement soit f un élément de $L(E)$, non nul et vérifiant les deux propriétés i) et ii) de la question II.D). Établir l'existence d'un entier s strictement positif, de s sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tous non réduits à $\{0\}$, de dimensions paires et stables par f et de s réels $a_1, a_2, \ldots, a_s$, strictement positifs et distincts, tels que :

$$\mathrm{Ker}\, f \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} E_i \right] = E \qquad (1)$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\},\ \forall x \in E_i,\ f^2(x) = -a_i^2 x \qquad (2)$$

Étudier la $f-$trajectoire d'un vecteur appartenant à l'un des E_i et en conclure que $f \in B(E)$.

Partie III - Étude des endomorphismes à trajectoires sphériques

III.A -

III.A.1) Soit f un élément de $L(E)$. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a) $f^* + f = 0$

b) $\forall u \in E$, $(u|f(u)) = 0$.

Un endomorphisme vérifiant l'une de ces deux propriétés est appelé *endomorphisme antisymétrique* de E. L'ensemble de ces endomorphismes est noté $A(E)$.

III.A.2) Soit f un élément de $A(E)$ et x une $f-$trajectoire associée ; calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \|x(t)\|^2$. Montrer que $A(E) \subset SP(E)$.

III.B - Soit f un élément de $SP(E)$ et F un sous-espace de E stable par F. Montrer que f_F est élément de $SP(F)$.

III.C - Montrer que $SP(E) \subset B(E)$.

III.D - Dans cette section III.D, E est de dimension 2 et f est un élément non nul de $SP(E)$.

III.D.1) Démontrer que f^2 est une homothétie de rapport strictement négatif.

III.D.2) Soit x_0 un élément de $E - \{0\}$ et a le centre d'un cercle contenant la $f-$trajectoire de x_0. Justifier que a peut s'écrire sous la forme $\alpha x_0 + \beta f(x_0)$ et prouver que $(x_0|f(x_0)) = 0$.

III.D.3) Prouver que $A(E) = SP(E)$.

III.E - Dans cette section III.E, E est un espace vectoriel orienté de dimension 3.

Soit ω un élément de $E - \{0\}$ et v un vecteur de E orthogonal à ω. On définit l'endomorphisme ψ de E par $\psi : u \mapsto \omega \wedge u + (u|\omega)v$.

III.E.1) Montrer que ψ est antisymétrique si et seulement si $v = 0$.

III.E.2) Montrer que si v est non nul, ψ appartient à $SP(E)$.

> On pourra commencer par prouver que pour tout x_0 de E, si x désigne la $f-$trajectoire de x_0, $(x|\omega)$ est constant et l'on cherchera le centre de la sphère sous la forme $\alpha(\omega + \omega \wedge v)$, où α est une constante à déterminer.

On se propose de prouver que tout endomorphisme f élément de $SP(E)$, *non nul* est de la même forme que ψ.

III.E.3) Soit f un élément de $SP(E) - \{0\}$. Établir que f^2 n'admet qu'une seule valeur propre strictement négative, notée $-\mu^2$ et que $\text{Im } f = \text{Ker}(f^2 + \mu^2 I_E)$.

III.E.4) En déduire l'existence d'une base orthonormée de E où la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu & b \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et conclure.

III.F - On suppose, dans cette question, que f, élément de $SP(E)$, vérifie $f^2 = -\mu^2 I_E$ où $\mu > 0$. À l'aide des résultats des questions III.B et III.D, montrer que f est antisymétrique.

III.G - Démontrer que, dans le cas général, $SP(E)$ est constitué des endomorphismes $f \in L(E)$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

i) $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$.

ii) L'endomorphisme induit par f sur $\text{Im}\, f$ est antisymétrique.

Ces deux conditions étant supposées réalisées, préciser géométriquement en fonction de x_0 élément de E, le centre d'une sphère qui contient la $f-$trajectoire de x_0.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de complexes et $\sum a_n z^n$ la série entière associée, dont le rayon de convergence R_a est supposé non nul et fini.

On note C_a l'ensemble des complexes z de module R_a tels que $\sum a_n z^n$ est convergente.

On appelle cercle unité l'ensemble des complexes de module 1 : un complexe z appartient au cercle unité si et seulement s'il existe un réel x appartenant à l'intervalle $I =]-\pi,\pi]$ tel que $z = e^{ix}$.

D'autre part on note : $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, et $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k vérifiant : $p \leq k \leq q$.

On étudie différentes séries entières pour lesquelles l'ensemble C_a prend différentes formes.

Dans le cas où C_a est un cercle, on propose d'observer différents comportements de la fonction somme de la série entière sur ce cercle.

Partie I - Calculs préliminaires

Les résultats de cette partie sont destinés à préparer les démonstrations des parties suivantes.

I.A - Montrer les inégalités :

$$\forall x \in [0,\pi],\ 0 \leq \sin x \leq x \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,\pi/2],\ \sin x \geq \frac{2}{\pi} x \ .$$

I.B - Montrer que pour tout x qui appartient à $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et pour tout couple d'entiers naturels (p, q) tel que $p \leq q$:

$$\left| \sum_{k=p}^{q} e^{ikx} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| .$$

I.C - Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites complexes.

Filière PC

On note $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$:

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k .$$

I.C.1) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (p,q) tel que $1\leq p<q-1$, on a :

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1})V_k + u_q V_q - u_{p+1}V_p .$$

I.C.2) On suppose que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que la série $\sum_{k\geq 1} |u_k - u_{k+1}|$ est absolument convergente.

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n v_n$ est convergente.

I.C.3) On suppose que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, convergente et de limite nulle.

Montrer que la série

$\sum_{n\geq 1} u_n v_n$ est convergente.

I.D - Déduire des questions précédentes que pour tout x qui appartient à $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, les séries

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(kx)}{k} \text{ et } \sum_{k\geq 1} \frac{\sin(kx)}{k} \text{ sont convergentes.}$$

Que dire pour un réel x qui appartient à $2\pi\mathbb{Z}$?

Partie II - Quelques exemples d'ensembles C_a

On se place dans le cadre des notations de l'introduction.

II.A - Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $b_n = a_n(R_a)^n$.
Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est $R_b = 1$ et qu'un complexe z appartient à C_a si et seulement si $\frac{z}{R_a}$ appartient à C_b.
On se ramène ainsi à l'étude de séries entières de rayon de convergence égal à 1

II.B - On suppose dans cette question que $\sum |a_n|$ est convergente et que $R_a = 1$.

II.B.1) Déterminer C_a.

II.B.2) On note pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ x \to a_n e^{inx} \end{cases}.$$

Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction continue sur I.

II.B.3) Donner un exemple simple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle C_a est le cercle unité.

II.C - Donner un exemple simple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle $R_a = 1$ et C_a est vide.

II.D - Construction de quelques cas intermédiaires.

II.D.1) On suppose qu'il existe un complexe z_0 de module 1 tel que $\sum a_n z_0^n$ soit semi-convergente (c'est-à-dire que $\sum a_n z_0^n$ est convergente mais ne converge pas absolument).

Montrer qu'alors $R_a = 1$.

II.D.2) Soit ξ un complexe de module 1. Si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n\xi^n}$, montrer que C_a est le cercle unité privé d'un point à déterminer.

II.D.3) Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et p complexes distincts $\xi_1, \ldots, \xi_p$, tous de module 1.
Construire un exemple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle C_a est le cercle unité privé des p points $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

II.D.4) On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\cos n}{n}$.
Déterminer R_a et C_a.
La série $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ est-elle convergente ?

Partie III - Un exemple pour lequel C_a est le cercle unité et $\sum|a_n|$ diverge

Dans cette partie, on définit la suite a_n de la façon suivante :

- $a_o = 0$,
- pour tout naturel p non nul et tout naturel n tel que

$$p^2 \leq n \leq (p+1)^2 - 1 : a_n = \frac{(-1)^p}{p^2}.$$

III.A - Montrer que la série $\sum|a_n|$ est divergente.
(On pourra par exemple chercher un équivalent de $|a_n|$).

III.B - Soit (A_n) la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum a_n$.
III.B.1) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note P le plus grand entier naturel vérifiant : $P^2 \leq N$.
On pose : $R_N = A_N - A_{P^2-1}$.

Montrer que $|R_N| \leq \frac{2P+1}{P^2}$.

III.B.2) En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente.

III.C - Soit $z = e^{ix}$ un complexe de module 1, avec x non nul appartenant à I.
III.C.1) Calculer $|a_{n+1} - a_n|$ suivant les valeurs du naturel n, et en déduire que la série $\sum|a_{n+1} - a_n|$ est convergente.
III.C.2) Déduire des résultats précédents et de la partie I que la série $\sum a_n z^n$ est convergente.

Partie IV - Un dernier exemple

IV.A - On veut montrer qu'il existe une constante réelle C_1 telle que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq C_1.$$

Soient $x \in]0, \pi[$ et k_x le plus grand entier naturel tel que $k_x \cdot x \leq \pi$.
IV.A.1) On suppose que $1 \leq n \leq k_x$. Montrer que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \leq \pi.$$

IV.A.2) On suppose que $n > k_x$. Montrer que :

$$\left| \sum_{k=k_x+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq 2 .$$

On pourra notamment utiliser le résultat de la question I.C.1.

IV.A.3) Conclure.

IV.B - Soit n et N deux entiers naturels tels que : $1 \leq n \leq N$.

Soit $Q_{n,N}$ le polynôme défini par :

$$Q_{n,N}(X) = \sum_{k=N-n}^{N-1} \frac{1}{N-k} X^k + \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{N-k} X^k .$$

IV.B.1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$Q_{n,N}(e^{ix}) = -2ie^{iNx} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} .$$

IV.B.2) En déduire qu'il existe une constante réelle C_2 telle que, pour tout couple de naturels (n, N) tel que $1 \leq n \leq N$ et tout complexe z de module 1 : $|Q_{n,N}(z)| \leq C_2$.

IV.C - Pour tout entier naturel non nul j, on pose :

$$n_j = 2^{(j^3)}, \; N_j = 2^{(j^3+1)} \text{ et } I_j = [\![N_j - n_j, N_j + n_j]\!] .$$

Vérifier que les intervalles I_j ainsi définis sont disjoints deux à deux.

Pour toute la suite du problème, on pose pour tout naturel j non nul : $P_j = Q_{n_j, N_j}$, et on définit les suites $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- s'il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \in I_j$, et $k \neq N_j$, alors :

$$\alpha_k = \frac{1}{N_j - k} \text{ et } a_k = \frac{e^{(ik)/j}}{j^2 (N_j - k)} ;$$

- sinon $\alpha_k = a_k = 0$.

On étudie la série entière $\sum a_k z^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-\pi, \pi]$, on note

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikx} \text{ et } B_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} P_j\left(e^{i\left(x + \frac{1}{j}\right)} \right) .$$

IV.D - Montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I vers une fonction continue que l'on notera F.

IV.E - Montrer que pour tout naturel n non nul et tout x appartenant à I :

$$B_n(x) = A_{3 \cdot 2^{(n^3)}}(x).$$

IV.F - On veut montrer que la suite de fonctions $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers F sur I.

IV.F.1) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) \in (I_j)^2$ tels que $p < q$:

$$\sum_{k=p}^{q-1} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \leq 4.$$

IV.F.2) En déduire qu'il existe une constante réelle C_3 telle que pour tout entier naturel j non nul, pour tout couple de naturels (p, q), tels que $p \leq q$ et pour tout réel x non nul appartenant à I :

$$\left| \sum_{k=p}^{q} \alpha_k e^{ikx} \right| \leq \frac{C_3}{|x|}.$$

IV.F.3) Soit $x \in I$, $x \neq \pi$. Vérifier que, pour j entier naturel suffisamment grand, on a

$$\left| x + \frac{1}{j} \right| \neq 0 \text{ et } x + \frac{1}{j} \in I.$$

En déduire que pour n naturel suffisamment grand :

$$|A_n(x) - B_j(x)| \leq \frac{1}{j^2} \frac{C_3}{\left| x + \frac{1}{j} \right|}, \text{ où } j \text{ est l'entier naturel tel que } 2^{(j^3)} \leq n < 2^{(j+1)^3}.$$

On considère maintenant le cas $x = \pi$. Montrer, avec les mêmes conditions sur j et n, que

$$|A_n(x) - B_j(x)| \leq \frac{1}{j^2} \frac{C_3}{\left| \pi - \frac{1}{j} \right|}.$$

IV.F.4) Conclure.

IV.G - On note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ x \to a_n e^{inx} \end{cases} .$$

On veut prouver que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

IV.G.1) Montrer que, pour tout entier naturel j non nul :

$$A_{N_j}\left(-\frac{1}{j}\right) - A_{N_j - n_j - 1}\left(-\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{j^2} \sum_{k=1}^{2^{(j^3)}} \frac{1}{k} .$$

IV.G.2) Donner un équivalent simple de cette expression lorsque j tend vers $+\infty$ et conclure.

IV.H - Donner R_a et C_a.

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, P désigne le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, de son repère orthonormé canonique $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ de son orientation canonique et de son repère polaire canonique.

On appellera **conique** toute partie $\mathscr{C}$ (vide ou non) de P ayant une équation de la forme

$$\{M_{(X,Y)} \in \mathscr{C}\} \Leftrightarrow \{AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0\}$$

où A, B, C, D, E, F sont six réels, avec en outre A, B, C non tous nuls.

À tout (A, B, C, D, E, F), élément de $\mathbb{R}^6$ tel que A, B, C non tous nuls correspond ainsi une conique $\mathscr{C}$, que l'on pourra noter $\mathscr{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$.

Le but du problème est notamment l'étude de l'ensemble des points communs à certains ensembles de coniques.

Partie I - Préliminaires

I.1) Montrer que les fonctions $\theta \mapsto \cos 2\theta$; $\theta \mapsto \sin 2\theta$; $\theta \mapsto \cos\theta$; $\theta \mapsto \sin\theta$; $\theta \mapsto 1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ forment une famille libre dans l'espace des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

I.2) Soit un cercle quelconque du plan P, que l'on supposera de rayon $\rho > 0$. Montrer que si le cercle est inclus dans la conique $\mathscr{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$, alors $A = C$ et $B = 0$. Réciproquement, que peut-on dire d'une conique $\mathscr{C}_{(A,0,A,D,E,F)}$?

Filière PC

Partie II -

On note $P' = P\backslash\{Oy\}$ le plan P privé de l'axe des ordonnées. On note M_0 un point de coordonnées (X_0, Y_0) appartenant à P'.

Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des coniques $\mathscr{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$ satisfaisant aux quatre conditions :

$$\begin{cases} M_0 \in \mathscr{C} \\ A = C \end{cases} \qquad \begin{cases} E = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$

II.A -

II.A.1) Montrer que le seul élément, noté $(\mathscr{C}_1)$, de $\mathscr{E}_1$ qui soit un cercle a pour équation $x_0(X^2 + Y^2) - (x_0^2 + y_0^2)X = 0$.

Montrer que $(\mathscr{C}_1)$ est tangent à l'axe Oy et indiquer une construction géométrique de son centre.

II.A.2) Montrer qu'il existe un seul élément, noté $(\mathscr{C}_2)$, de $\mathscr{E}_1$ qui ait une équation de la forme $BXY + CX = 0$. En indiquer une caractérisation géométrique.

II.A.3) Déterminer $(\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2)$. En discuter le nombre d'éléments. En déduire l'ensemble des points communs à tous les éléments de $\mathscr{E}_1$.

II.B - On appelle φ l'application de P' dans P qui, au point M de coordonnées polaires (ρ, θ), tel que $\rho \neq 0$ et que pour tout entier relatif k, $\theta \neq (2k+1)\pi/2$, associe M' de coordonnées polaires $\left(\rho \tan\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

II.B.1) Montrer que cette définition de $\varphi(M)$ est *cohérente*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de (ρ, θ) parmi les coordonnées polaires possibles du point M. Montrer que $\varphi(M_0)$ appartient à toutes les coniques de $\mathscr{E}_1$. En déduire une construction géométrique de $\varphi(M_0)$ à l'aide d'un cercle et d'une droite.

II.B.2) Pour $M \in P'$, quand a-t-on $\varphi(M) \in P'$? Que dire alors de $\varphi \circ \varphi(M)$?

II.B.3) On appelle γ la courbe d'équation polaire

$$\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\mapsto \rho = 2a\sin\theta\,,\ \text{où } a > 0 \text{ est donné.}$$

Reconnaître γ ; déterminer une représentation polaire de la courbe $\gamma' = \varphi(\gamma)$; étudier et tracer cette courbe, *avec justifications.*

II.C - Dans cette question, $M_0(x_0, y_0)$ est un point de P' tel que $|x_0| \neq |y_0|$ et on lui associe $M_0' = \varphi(M_0)$ comme ci-dessus.

II.C.1)

a) Montrer que, quel que soit le couple λ, μ de réels non tous nuls, il existe un unique réel ν, que l'on calculera, tel que la conique $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$ d'équation $\lambda(X^2+Y^2)+2\mu XY+\nu X = 0$ appartienne à $\mathscr{E}_1$.

b) Lorsque $|\lambda| \neq |\mu|$, montrer que $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$ a un centre $\Omega_{\lambda,\mu}$ dont on déterminera les coordonnées. [*Pour ce faire, il est possible d'effectuer une translation arbitraire de l'origine du repère puis de faire en sorte que la nouvelle origine devienne centre de symétrie de la conique* $(\mathscr{C}_{\lambda,\mu})$.]

II.C.2) Le point M_0 restant fixé, montrer que tous les points $\Omega_{\lambda,\mu}$ (où $|\lambda| \neq |\mu|$) appartiennent à la conique Γ d'équation

$$X^2 - Y^2 - \frac{x_0^2+y_0^2}{2x_0}X + y_0 Y = 0\,.$$

En déterminer le genre, le centre, les sommets et les axes.

II.C.3) Déterminer les intersections de Γ avec les droites Ox, Oy, OM_0, OM_0' et M_0M_0'. On trouvera en général six points en tout, pour lesquels le centre de Γ joue un rôle particulier que l'on mettra en évidence.

II.C.4) Faire une figure d'ensemble.

II.C.5) Étudier et représenter $(\mathscr{C}_{1,1})$ et $(\mathscr{C}_{1,-1})$. On réalisera la figure en prenant $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Que remarque-t-on quant à leurs axes ?

On identifiera pour la suite du problème les espaces vectoriels euclidiens canoniques $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On désignera par i le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Partie III -

On admet que le déterminant de Vandermonde

$$V(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^2 & z_3^3 \\ 1 & z_4 & z_4^2 & z_4^3 \end{vmatrix}$$

en les complexes z_1, z_2, z_3, z_4 est nul si, et seulement si, deux au moins des z_i sont égaux.

Dans cette partie et la suivante, on étudie un problème analogue à celui de la première, mais par une méthode sensiblement différente.

III.A - On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des parties de $\mathbb{R}^2$ ayant une équation de la forme $A\bar{z}z + B(z^2 + \bar{z}^2) + \overline{C}z + C\bar{z} + D = 0$ où les réels A, B, D et le complexe C ne sont pas tous les quatre nuls, et qui contiennent trois points M_1, M_2, M_3 *non alignés* donnés, d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3.

III.A.1) Vérifier que les éléments $\mathscr{E}_2$ sont bien des coniques et donner une propriété commune de leurs axes.

III.A.2) Pour z_4 donné dans $\mathbb{C}$, on définit les matrices

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \overline{z_1}z_1 & z_1^2 + \overline{z_1}^2 & z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ \overline{z_2}z_2 & z_2^2 + \overline{z_2}^2 & z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ \overline{z_3}z_3 & z_3^2 + \overline{z_3}^2 & z_3 & \overline{z_3} & 1 \\ \overline{z_4}z_4 & z_4^2 + \overline{z_4}^2 & z_4 & \overline{z_4} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathscr{M}} = \begin{pmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Établir que la matrice $\tilde{\mathscr{M}}$ est inversible. Quelle conclusion peut-on en tirer quant au rang de $\mathscr{M}$?

b) On définit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. En donner la dimension. Montrer que

$$S = \left\{ (A, B, C, D) \in E, \forall i \in \{1, 2, 3\}, A\overline{z_i}z_i + B(z_i^2 + \overline{z_i}^2) + C\overline{z_i} + \overline{C}z_i + D = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E et en donner la dimension.

c) Montrer que le point M_4 d'affixe z_4 appartient à toutes les coniques éléments de $\mathscr{E}_2$ si, et seulement si, le rang de $\mathscr{M}$ est égal à 3. [*Pour la condition nécessaire, on pourra faire intervenir un système linéaire bien choisi.*]

III.B - On suppose dans cette question que les complexes z_1, z_2, z_3 sont égaux respectivement à $a\exp(i\theta_1)$, $a\exp(i\theta_2)$ et $a\exp(i\theta_3)$, où $a>0$ et θ_1, θ_2, θ_3 sont des réels.

III.B.1) Montrer qu'il existe un unique cercle dans $\mathscr{E}_2$ et que si le point M_4 d'affixe z_4 appartient à toutes les coniques éléments de $\mathscr{E}_2$, alors z_4 est de la forme $a\exp(i\theta_4)$.

III.B.2) Soit le déterminant

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} z_1^2 & z_1^4+a^4 & z_1^3 & z_1 \\ z_2^2 & z_2^4+a^4 & z_2^3 & z_2 \\ z_3^2 & z_3^4+a^4 & z_3^3 & z_3 \\ z_4^2 & z_4^4+a^4 & z_4^3 & z_4 \end{vmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{D}$ est de la forme $(z_1z_2z_3z_4-a^4)\ \mathscr{V}$, où $\mathscr{V}$ s'exprime très simplement à l'aide de $V(z_1,z_2,z_3,z_4)$.

III.B.3) Montrer que la condition énoncée en III.A.2-c) est équivalente à la nullité de $\mathscr{D}$.

III.B.4)

a) En déduire l'ensemble des points communs aux coniques de $\mathscr{E}_2$. Discuter soigneusement le nombre d'éléments de cet ensemble.

b) Lorsque ce nombre est égal à 4, que peut-on dire des directions des bissectrices du couple de droites (M_1M_2, M_3M_4) ?

III.C -

III.C.1) Généraliser les résultats de III.B.4 au cas où l'on ne fait plus l'hypothèse III.B. [*On montrera comment on peut se ramener à ce cas.*]

III.C.2) Soit trois points A, B, C non alignés dans P et (Δ) une droite. Par A, resp $\cdot B$, resp $\cdot C$, on mène la parallèle à la symétrique de la droite BC, resp $\cdot CA$, resp $\cdot AB$, par rapport à (Δ). Montrer que ces trois droites concourent. [*On pourra commencer par le cas où (Δ) est l'axe Ox ; dans ce cas, il suffit d'utiliser les résultats de la partie III.*]

Partie IV -

On considère dans cette partie des équations de la forme

$$\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0 \qquad (1)$$

où $A \neq 0$ et B sont deux complexes et C un réel.

IV.A -

IV.A.1) Soit θ un réel et Φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z\exp(i\theta)$. Montrer que, si $(\Gamma) \subset P$ a une équation de la forme (1), alors on peut choisir θ pour que $\Phi(\Gamma)$ ait une équation de la forme

$$\frac{A'}{2}(z^2 + \overline{z}^2) + \overline{B'}z + B'\overline{z} + C' = 0$$

où l'on ait de plus $A' \in \mathbb{R}^{+*}$.

IV.A.2) En déduire la nature d'une telle partie (Γ) de P. [*On pourra revenir en coordonnées cartésiennes.*]

IV.B - Soit trois points M_1, M_2, M_3 *non alignés* donnés, d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3. On appelle $\mathscr{E}_3$ l'ensemble des coniques de P contenant ces trois points et ayant une équation de la forme (1). Soit M_4 un point de P, d'affixe z_4. Montrer que toutes les coniques de $\mathscr{E}_3$ passent par M_4 si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\mathscr{M}' = \begin{bmatrix} z_1^2 & \overline{z_1}^2 & z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2^2 & \overline{z_2}^2 & z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3^2 & \overline{z_3}^2 & z_3 & \overline{z_3} & 1 \\ z_4^2 & \overline{z_4}^2 & z_4 & \overline{z_4} & 1 \end{bmatrix}$$

est égal à une valeur que l'on précisera.

IV.C - Dans cette question, on suppose que de plus z_1, z_2 et z_3 sont de même module $a > 0$ et ont a^3 pour produit.

IV.C.1) Déterminer deux complexes u et v tels que z_1, z_2 et z_3 soient solutions de $Z^3 - uZ^2 + vZ - a^3 = 0$.

IV.C.2) En déduire des complexes α, α', β, β' tels que z_1, z_2 et z_3 soient solutions de

$$\begin{cases} H_1(Z) = Z^2 + \alpha Z + \beta - a\overline{Z} = 0 \\ H_2(Z) = Z + \alpha' + \beta'\overline{Z} - \dfrac{1}{a}\overline{Z^2} = 0 \end{cases}$$

IV.C.3) Grâce à des combinaisons linéaires bien choisies sur les rangées de $\mathscr{M}'$, montrer que toutes coniques de $\mathscr{E}_3$ passent par M_4 si, et seulement si,

$$H_1(z_4) = H_2(z_4) = 0 \qquad (2)$$

IV.C.4)

a) Montrer qu'il existe un polynôme $\varpi(Z)$ à coefficients complexes, de degré 4, tel que (2) implique $\varpi(z_4) = 0$; on donnera d'un tel polynôme les coefficients en Z^4 et en Z^3, en fonction de a, u et v.

b) Déterminer les zéros de ϖ en en discutant la multiplicité. [*On remarquera que trois zéros de ϖ sont déjà connus.*] On ne demande pas de vérifier qu'inversement tous les complexes obtenus vérifient (2).

IV.C.5) On choisit $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$.

a) Déterminer la valeur du produit scalaire $\langle \overrightarrow{M_1M_4}, \overrightarrow{M_2M_3} \rangle$. [*On pourra introduit le produit $(\overline{z_4 - z_1})(z_3 - z_2)$.*]

b) Que représente M_4 pour le triangle $M_1M_2M_3$?

IV.D - Généraliser les résultats de IV.C.5-b) au cas où l'on ne fait plus l'hypothèse du IV.C.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Partie I -

On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

où n désigne un entier naturel.

I.A -

I.A.1) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

I.A.2) En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

I.B -

I.B.1) Montrer l'équivalence : $I_n \sim I_{n+1}$.

I.B.2) Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $J_n = (n+1) I_n I_{n+1}$ est constante et en déduire l'équivalence : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I.B.3) **Application 1**

Montrer, lorsque t, réel, tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^t dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

I.B.4) **Application 2**

À l'aide de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x dx$, montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} |\sin x|^x dx$ est divergente.

I.C - On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln n!$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

I.C.1) Montrer l'équivalence :

$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}.$$

I.C.2) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On notera S sa limite.

Filière TSI

I.D - Établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

I.E - En utilisant la question I.B.2, en déduire l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Partie II -

On considère les séries entières :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

II.A - Montrer que la première série entière définit une fonction continue sur $[-1, 1[$ et calculer sa somme f.

II.B - On considère la seconde série entière.

II.B.1) Déterminer son rayon de convergence. On note g sa somme, là où elle converge.

II.B.2) Montrer que cette série entière converge pour $x = -1$ et calculer $g(-1)$.

II.C - Déterminer la limite à gauche de g en 1.

II.D -

II.D.1) Montrer l'existence d'une limite l à gauche en 1 de $g(x) + \ln(1-x)$.

II.D.2) On pose, pour n entier strictement positif,

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

II.D.3) Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel γ strictement positif.

II.E - Établir que $l = -\gamma$.

II.F - Une expression intégrale de γ .

On pose $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right) \mathrm{d}t$.

II.F.1) Montrer l'existence de I .

II.F.2) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx$ et que l'application $\Phi : x \mapsto \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

II.F.3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$I = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \Phi(x) dx .$$

II.F.4) Montrer que pour $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx = \int_\varepsilon^{(n+1)\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx .$$

II.F.5) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{x} dx .$$

II.F.6) En déduire $I = \gamma$.

Partie III -

On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$. On fait les hypothèses suivantes :

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.
- La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.
- $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 .
- $b_n = o(a_n)$

On note u et v les sommes respectives de ces deux séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.

III.A -

III.A.1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 .

III.A.2) On fixe un réel ε strictement positif.
Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout x tel que $0 \leq x < 1$,

$$|v(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} |b_n| + \frac{\varepsilon}{2} u(x) .$$

III.A.3) En déduire qu'au voisinage de 1

$$v(x) = o(u(x)) .$$

III.B - Montrer que si l'on remplace l'hypothèse $b_n = o(a_n)$ par $a_n \sim b_n$, alors au voisinage de 1 on a l'équivalence : $u(x) \sim v(x)$.

III.C - Application 1 :

III.C.1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} n^3 \ln\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right) x^n .$$

III.C.2) Déterminer un équivalent simple en 1 de sa somme.

III.D - Application 2 :

On considère les séries entières

$$\sum_{n \geq 1} H_n x^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} (\ln n) x^n \text{, où l'on a posé pour } n \geq 1$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

III.D.1) Vérifier que leur rayon de convergence est 1 et montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[\ , \ (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\ln(1-x) .$$

III.D.2) En déduire un équivalent au voisinage de 1 de

$$\sum_{n \geq 1} (\ln n) x^n .$$

On pourra utiliser II.D.3.

III.E - Application 3 :

On pose pour $x \in]-1, 1[$,

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}} dt .$$

III.E.1) Développer en série entière, au voisinage de 0, la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}}$. avec $a > 0$ et préciser son rayon de convergence.

III.E.2) Montrer pour tout $x \in\ ]-1, 1[$ la relation

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{2n} x^{2n},$$

avec I_{2n} les intégrales étudiées en partie I et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite que l'on explicitera.

III.E.3) Montrer qu'il existe une constante K réelle tel qu'au voisinage de 1 on ait l'équivalence : $J(x) \sim K\ln(1-x)$ et préciser la valeur de K.

Partie IV -

On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$. On fait les hypothèses suivantes :

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs non tous nuls.
- $A_n \sim B_n$, où l'on a posé

$$A_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \text{ et } B_n = \sum_{p=0}^{n} b_p$$

- Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est égal à 1 et la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

On note u et v les sommes respectives de ces deux séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence.

IV.A - Vérifier l'égalité, pour tout x réel

$$(1-x)\sum_{p=0}^{n} A_p x^p = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p - A_n x^{n+1}.$$

et en déduire que le rayon de convergence de

$\sum_{n \geq 0} A_n x^n$ est égal à 1.

IV.B - Établir les relations, pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

puis en déduire qu'au voisinage de 1, on a : $u(x) \sim v(x)$.

IV.C - Application 1 :

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} x^{a^n}$, où a est un entier supérieur ou égal à 2.

Vérifier que son rayon de convergence est 1 et montrer qu'au voisinage de 1, on a l'équivalence $\sum_{n=0}^{\infty} x^{a^n} \sim L \ln(1-x)$, où L est une constante réelle que l'on précisera.

IV.D - Application 2 :

IV.D.1) Montrer que les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$

sont de rayons de convergence 1 et que l'on a, au voisinage de 1,l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n .$$

IV.D.2) En déduire que l'on a, au voisinage de 1, l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n ,$$

où $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite étudiée dans la première partie.

IV.D.3) Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos t} .$$

IV.D.4) Calculer l'intégrale ci-dessus et en déduire qu'au voisinage de 1, on a l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{D}{\sqrt{1-x}} ,$$

où D est une constante réelle strictement positive que l'on précisera.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, Π est un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle que les déplacements de Π sont les rotations et les translations de ce plan. On notera Id_π l'identité de Π.

Les matrices utilisées dans le problème sont réelles. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes.

On désigne par ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

Si A est une matrice carrée, on désigne par $\det(A)$ son déterminant et si $A \in M_3(\mathbb{R})$, on convient d'appeler écriture de A par blocs l'écriture

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix},$$

où $P \in M_2(\mathbb{R})$, Q est de la forme $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, R est de la forme $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}$, et S est de la forme $[s]$, avec q_1, q_2, r_1, r_2, s réels.

La matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$ est notée I.

Partie I - Questions préliminaires

I.A - Les matrices A, A' et leur produit AA' appartiennent à $M_3(\mathbb{R})$; on les écrit par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{bmatrix} \qquad AA' = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$$

I.A.1) En prélevant dans les matrices A et A' les termes utiles, calculer les deux termes de la matrice Y et montrer que $Y = PQ' + QS'$.

Des calculs analogues prouveraient que

$$AA' = \begin{bmatrix} PP' + QR' & PQ' + QS' \\ RP' + SR' & RQ' + SS' \end{bmatrix}, \text{ ce que l'on admettra.}$$

I.A.2) Donner sans justification l'écriture par blocs de la transposée de A.

Filière TSI

I.B -

I.B.1) On suppose que le couple (X_1, X_2) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et que X_1 et X_2 sont des vecteurs propres pour une certaine matrice B appartenant à $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que le couple $(-X_1, X_2)$ a les mêmes propriétés.

I.B.2) Soit $S \in M_2(\mathbb{R})$, qu'on suppose symétrique. Justifier l'existence dans $M_2(\mathbb{R})$ de trois matrices, N, L, D, avec N et L orthogonales et D diagonale, telles que $S = ND\,{}^tN = LD\,{}^tL$, où L est obtenue en remplaçant dans N la première colonne par son opposée.

I.B.3) En comparant $\det(N)$ et $\det(L)$, montrer que l'une des deux matrices N ou L est de la forme

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

I.C - Soit R une matrice de la forme $R(\theta)$ précédente, différente de I. Montrer que $R - I$ est inversible.

Partie II - Le Groupe $\mathscr{G}$

À tout triplet (θ, p, q) de nombres réels, on associe la matrice

$$M(\theta, p, q) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p \\ \sin\theta & \cos\theta & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et son écriture par blocs, notée

$$\begin{bmatrix} R(\theta) & T(p,q) \\ 0 & [1] \end{bmatrix}, \text{ abrégée en } \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où les deux termes de la sous-matrice uniligne 0 sont nuls.

On appelle $\mathscr{G}$ l'ensemble des matrices de la forme $M(\theta, p, q)$.

II.A -

II.A.1) Calculer le déterminant de $M(\theta, p, q)$.

II.A.2) La matrice $M(\theta, p, q)$ est-elle orthogonale ?

II.B -

II.B.1) Calculer le produit $M(\theta, p, q) \cdot M(\theta', p', q')$ de deux matrices de $\mathscr{G}$. Montrer que ce produit appartient à $\mathscr{G}$.

II.B.2) Le triplet (θ, p, q) étant donné, comment choisir (θ', p', q') pour que le produit précédent soit la matrice identité I_3 ?

II.B.3) Montrer que, lorsqu'on le munit de la multiplication, l'ensemble $\mathscr{G}$ est un groupe.

II.C -

II.C.1) Montrer que le polynôme caractéristique de $M(\theta, p, q)$ est le produit de deux polynômes à coefficients réels, que l'on précisera.

II.C.2) On suppose que $R \neq I$.

a) Déterminer, selon les valeurs de θ, les valeurs propres réelles de $M(\theta, p, q)$.

b) Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ?

Trouver un vecteur propre de la forme $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre 1. On donnera de $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ une expression matricielle utilisant T et $(I - R)^{-1}$.

II.D - Chaque point P de Π est repéré par ses coordonnées (x,y) dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

II.D.1) Quelles sont les coordonnées (x',y') de l'image P' de P par la translation de vecteur $\vec{T} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j}$?

II.D.2) Le point P_0 de Π et le réel θ sont fixés. On désigne par r la rotation de centre P_0 et d'angle θ. Soit P' l'image de P par r.

Exprimer les coordonnées (x',y') de P' en fonction de x, y, θ, et des coordonnées (x_0, y_0) de P_0.

II.D.3) Montrer que, dans II.D.2) comme dans II.D.1), on peut trouver dans $\mathscr{G}$ une matrice M, que l'on précisera dans chacun des deux cas, telle que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

II.D.4)

a) Réciproquement, les réels θ, p, q, x, y étant donnés, calculer le produit matriciel $M(\theta, p, q) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Ce produit est de la forme $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$.

Montrer que le point P' de Π, de coordonnées (x', y'), est l'image du point P, de coordonnées (x, y), par un déplacement.

c) Lorsque ce déplacement est une rotation de centre $P_0(x_0, y_0)$ différente de l'identité de Π, on pose

$$V_{P_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \text{ Montrer que } V_{P_0} = (I - R)^{-1} T.$$

Partie III - Le groupe $\mathscr{G}$ et les matrices symétriques

Dans cette partie, on introduit l'ensemble $\mathscr{S}$ des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$, donc de la forme générale

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Une telle matrice sera notée $Q(a, b, c, d, e, f)$, ou Q de façon abrégée.

Soit Q une matrice appartenant à $\mathscr{S}$. On appelle transformée de Q toute matrice de la forme ${}^tMQM$, où M est une matrice appartenant à l'ensemble $\mathscr{G}$ défini dans la partie II.

III.A - Soit Q une matrice appartenant à $\mathscr{S}$.

III.A.1) Montrer que toutes les transformées de Q appartiennent à $\mathscr{S}$.

III.A.2) Montrer que Q est une transformée de Q.

III.A.3) Montrer que si Q' est une transformée de Q, alors Q est une transformée de Q'.

III.A.4) Montrer que si Q' est une transformée de Q et Q'' une transformée de Q', alors Q'' est une transformée de Q.

Pour les questions qui suivent, on pourra utiliser les résultats de la partie I.A.

III.B - À toute matrice $Q(a,b,c,d,e,f)$, on associe les réels :

$$p_1(Q) = a+c \ ; \ p_2(Q) = ac-b^2 \ ; \ p_3(Q) = \det(Q)$$

et la matrice :

$$S(Q) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

III.B.1) Pour $M \in \mathscr{G}$, associée à θ, p, q, écrire $S({}^tMQM)$ comme un produit de trois matrices.

III.B.2) En déduire que, pour toute transformée Q' de Q, on a $p_1(Q) = p_1(Q')$ et $p_2(Q) = p_2(Q')$.

III.B.3) Montrer que, pour toute transformée Q' de Q, on a $p_3(Q) = p_3(Q')$.

Les nombres réels $p_1(Q), p_2(Q), p_3(Q)$ sont appelés les invariants de Q.

Dans la suite de cette section, on se propose, en considérant divers cas pour les invariants de Q, de trouver, dans chaque cas, une transformée simple de Q.

III.C -

III.C.1) Montrer que, parmi les transformées de $Q(a,b,c,d,e,f)$, il y a une matrice de la forme $Q(\lambda, 0, \mu, d', e', f')$, qu'on notera Q' dans la suite, (on pourra utiliser I.B.3) et III.B.1)).

III.C.2) Calculer $p_1(Q)$ et $p_2(Q)$ en fonction de λ et μ.

III.C.3) Montrer que, si $p_2(Q)$ est nul, on peut, en précisant le choix de Q', faire en sorte que μ soit nul.

III.D - Pour $M \in \mathscr{G}$, de la forme $M(0,p,q)$, calculer les termes non diagonaux de ${}^tMQ'M$.

III.E - Étude des différents cas

III.E.1) *Premier cas* : $p_2(Q)$ est non nul.

Montrer que, parmi les transformées de Q', il y a une matrice Q'' diagonale dont le troisième terme diagonal est nécessairement $p_3(Q)/p_2(Q)$.

III.E.2) *Deuxième cas* : $p_2(Q)$ est nul.

a) *Premier sous-cas* : $p_1(Q)$ et $p_3(Q)$ sont non nuls.

Montrer que, parmi les transformées de Q', il y a la matrice $Q(\lambda, 0, 0, 0, e', 0)$.

b) *Deuxième sous-cas* : $p_1(Q)$ est non nul et $p_3(Q)$ est nul.

Montrer que, parmi les transformées de Q', il y a une matrice de la forme $Q(\lambda, 0, 0, 0, 0, f'')$.

c) *Troisième sous-cas* : $p_1(Q)$ est nul.

Montrer que a, b et c sont nuls.

Partie IV - Application aux coniques

Les coefficients réels (a, b, c, d, e, f) étant fixés, on considère la courbe du plan Π, qui admet, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'équation cartésienne :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

Cette courbe est notée $\mathscr{C}(a, b, c, d, e, f)$, ou $\mathscr{C}$, de façon abrégée.

L'ensemble des courbes $\mathscr{C}$ est noté $\mathscr{F}$.

IV.A - *Étude d'un exemple*

On pose $\mathscr{H}_1 = \mathscr{C}(0, 1/2, 0, 0, -1/2, -1)$ et $\mathscr{H}_2 = \mathscr{C}(1, 0, -1, 0, 0, -2)$.

Représenter sur un même dessin les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ ainsi que leurs asymptotes.

Dans la suite, on associe au point P de coordonnées (x, y) la matrice

$$P_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

et à la matrice $Q(a, b, c, d, e, f)$ définie dans la partie III la courbe $\mathscr{C}(a, b, c, d, e, f)$.

IV.B - Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur le produit matriciel ${}^tP_1QP_1$, pour que le point P soit sur la courbe $\mathscr{C}$ associée à la matrice Q.

IV.C - Soit d un déplacement du plan, $d(P)$ l'image par d du point P et M la matrice, appartenant à $\mathscr{G}$, définie dans II.D.3), qui est associée à d.

IV.C.1) Trouver une condition nécessaire et suffisante, liant les matrices P_1, M et Q et leurs transposées, pour que le point $d(P)$ soit sur la courbe $\mathscr{C}$ associée à la matrice Q.

IV.C.2) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ de $\mathscr{F}$, associée à Q de $\mathscr{S}$, est l'image par d d'une courbe $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{F}$, associée à une matrice Q' de $\mathscr{S}$, que l'on précisera.

IV.C.3) Montrer que Q' est, suivant la définition donnée dans la partie II, une transformée de Q.

IV.D - En utilisant III.E, montrer que toute courbe $\mathscr{C}$ de $\mathscr{F}$ est l'image, par un certain déplacement, d'une courbe $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{F}$ d'équation simple.

IV.E - Montrer que si $\mathscr{C}$ est associée à la matrice Q, elle est aussi associée à αQ, pour tout α non nul.

Exemple : montrer, en utilisant III.E.1), que $\mathscr{H}_1$ est l'image de $\mathscr{H}_2$ par un déplacement que l'on ne cherchera pas à expliciter.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

On étudie certaines classes de fonctions appartenant à l'ensemble $\mathscr{B}$ des fonctions bornées et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est muni de la norme uniforme définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$$

Pour tout ω appartenant à $\mathbb{R}$, on note e_ω la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule : $e_\omega(t) = e^{i\omega t}$.

On note U la fonction définie par $U(t) = 1$ si $t > 0$, $= 0$ sinon. Tous les sous-espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On notera x^* la conjuguée complexe de x, c'est-à-dire la fonction : $t \mapsto \overline{x(t)}$.

Partie I -

Soit x une fonction appartenant à $\mathscr{B}$. On appelle moyenne de x, s'il existe, le nombre

$$M(x) = \lim_{T\to\infty} M_T(x) \text{ avec } M_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad (1)$$

On dira alors que la fonction x est *moyennable*.

I.A -

I.A.1) Montrer que M_T est une forme linéaire sur $\mathscr{B}$, que l'ensemble des fonctions moyennables $\mathscr{M}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$, et que M est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_1$. On notera de façon équivalente Mx ou $M(x)$ cette moyenne.

I.A.2) Vérifier que M_T et M sont lipchitziennes pour $\|.\|_\infty$.

I.B - Montrer que la moyenne est invariante par translation : si $\tau\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathscr{M}_1$ on pose $x_\tau(t) = x(t-\tau)$, alors x_τ est moyennable et $Mx = Mx_\tau$.

I.C -

I.C.1) Soit x une fonction de $\mathscr{B}$ de période P ($P > 0$). Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\int_a^{a+P} x(t)dt = \int_0^P x(t)dt$. En déduire que x est moyennable, et que $M(x)$ est égale à la moyenne sur n'importe quel intervalle de longueur P.

Filière MP

I.C.2) En particulier montrer que $M(e_\omega) = 0$ pour ω réel non nul, et $M(e_0) = 1$.

I.C.3) Montrer que si $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$, alors x est moyennable et $M(x) = c$.

I.C.4) Soit x_0 la fonction définie par $x_0(t) = U(t)e^{i\ln(t+1)}$. Vérifier que $x_0 \in \mathscr{B}$, calculer $M_T(x_0)$. Examiner le comportement de $M_T(x_0)$ lorsque $T \to \infty$, et en déduire que x_0 n'est pas moyennable.

I.D - La fonction x est dite *de carré moyennable* si $T \mapsto M_T|x|^2$ admet une limite lorsque T tend vers $+\infty$. Cette limite est appelée moyenne quadratique de x :

$$M|x|^2 = \lim_{T\to\infty} M_T(|x|^2) \tag{2}$$

On notera $\mathscr{M}_2$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{B}$ de carré moyennable.

I.D.1) Montrer que toute fonction qui tend vers 0 à l'infini est aussi de moyenne quadratique nulle.

I.D.2) Pour $x, y \in \mathscr{M}_2$, donner une majoration de $\left|M_T(|x|^2) - M_T(|y|^2)\right|$ et $\left|M|x|^2 - M|y|^2\right|$ en fonction de $\|x\|_\infty$, $\|y\|_\infty$, $\|x-y\|_\infty$.

I.D.3) Montrer, à l'aide de x_0 et U, que $\mathscr{M}_2$ n'est pas un espace vectoriel.

I.E - On dira que deux fonctions, x, y de $\mathscr{M}_2$ sont *comparables* si existe

$$<x, y> = M(xy^*) = \lim_{T\to\infty} M_T(xy^*) \tag{3}$$

I.E.1) Si E est un espace vectoriel inclus dans $\mathscr{M}_2$, montrer que deux fonctions $x, y \in E$ sont comparables (développer $|x+y|^2$ et $|x+iy|^2$). Il en résulte que sur E, $(x, y) \mapsto <x, y>$ est un « pseudo-produit scalaire » (il est linéaire à gauche, semi-linéaire à droite, positif, mais pas strictement). On a en particulier

$$M|x+y|^2 = M|x|^2 + M|y|^2 + 2Re\ <x, y> \tag{4}$$

I.E.2) On dira que deux fonctions $x, y \in \mathscr{M}_2$, sont *orthogonales* si $<x, y> = 0$. Que vaut alors $M|x+y|^2$?

I.E.3) Écrire l'inégalité de Schwarz (on ne demande pas de la démontrer).

I.F - Soit P un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble des fonctions P-périodiques de $\mathscr{B}$ est un espace vectoriel de fonctions de carré moyennable et comparables.

I.G - Soit

$$\mathscr{P} = \{x : x(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\omega_k t} \quad N \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, \omega_k \in \mathbb{R} \text{ distincts}\}$$

l'ensemble des polynômes trigonométriques (élargi par rapport à celui utilisé dans les séries de Fourier : ici les fréquences sont quelconques).

Montrer que $\mathscr{P}$ est stable par produit de fonctions, et que l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{P}$.

En particulier, pour $x = \sum_{k=1}^{N} c_k e_{\omega_k}$, établir que $M|x|^2 = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2$.

I.H - Soit une suite $x_n \in \mathscr{M}_1$ qui converge uniformément vers $x \in \mathscr{B}$.

I.H.1) Montrer l'existence de $m = \lim_{n \to \infty} M(x_n)$ (utiliser I.A.2).

I.H.2) En déduire que $x \in \mathscr{M}_1$ et $M(x) = m$ (pour $\epsilon > 0$, on choisira n tel que $\|x - x_n\|_\infty < \epsilon$ et $|m - M(x_n)| < \epsilon$).

I.I - Soit une suite $x_n \in \mathscr{M}_2$ qui converge uniformément vers $x \in \mathscr{B}$.

I.I.1) Montrer que $K = \sup\{\|x_n\|_\infty, \|x\|_\infty (n \in \mathbb{N})\} < +\infty$.

I.I.2) Montrer que $\lim_{n \to \infty} M|x_n|^2 = m_2$ existe.

I.I.3) En suivant la méthode du I.H.2), en déduire que $x \in \mathscr{M}_2$ et $M|x|^2 = m_2$.

Partie II -

On appelle $\mathscr{Q}$ l'ensemble des limites uniformes sur $\mathbb{R}$ de suites de fonctions appartenant à $\mathscr{P}$.

II.A - Montrer les propriétés suivantes :

II.A.1) $\mathscr{Q}$ est un espace vectoriel inclus dans $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2$, et fermé pour $\|.\|_\infty$.

II.A.2) Toutes les fonctions de $\mathscr{Q}$ sont comparables, et continues.

II.A.3) Si $x \in \mathscr{Q}$, alors $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad x_\tau \in \mathscr{Q}$.

II.A.4) Si $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < +\infty$ et $\omega_k \in \mathbb{R}$, la série de fonctions

$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_{\omega_k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $x \in \mathscr{C}$.

II.A.5) $\mathscr{C}$ est stable par produit des fonctions.

II.A.6) Soit $x, x \in \mathscr{C}$, à valeurs réelles, et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que $y \circ x \in \mathscr{C}$ (le montrer d'abord lorsque y est une fonction polynomiale à coefficients complexes).

II.B - Les *coefficients de Fourier-Bohr* de $x \in \mathscr{C}$ sont définis, pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}$, par $c(\omega) = \langle x, e_\omega \rangle$.
Si P_n est une suite de $\mathscr{P}$ convergeant uniformément vers x, la réunion Ω des fréquences présentes dans chacun des P_n est un ensemble fini ou dénombrable que l'on énumère donc selon le cas $\Omega = \{\omega_k,\ 0 \le k \le m\}$ ou $\Omega = \{\omega_k, k \in \mathbb{N}\}$. On pose

$$P_n = \sum_k c_{n,k}\, e_{\omega_k} \text{ et } d(n) = \max\{k : c_{n,k} \neq 0\}, \text{ « degré » de } P_n.$$

Montrer que pour tout réel $\omega, c(\omega)$ existe et vaut $c(\omega) = \lim_{n \to \infty} \langle P_n, e_\omega \rangle$. En déduire que :

si $\omega \notin \Omega$ alors $c(\omega) = 0$, et pour tout k, $c(\omega_k) = c_k = \lim_{n \to \infty} c_{n,k}$.

II.C - Si Ω est fini, montrer que

$x(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k e^{i\omega_k t}$. En déduire la formule de Parseval : $M|x|^2 = \sum_{k=0}^{m} |c_k|^2$.

II.D - On se propose d'établir la formule de Parseval dans le cas où Ω est infini. On construit la suite n_j définie par $n_0 = 0$, $n_k = \min(n : d(n) > d(n_{k-1}))$. Soit $q_k(t) = P_{n_k}(t)$, on a donc $d_k = d(n_k)$ suite strictement croissante vers $+\infty$ (le fait que la suite n_j existe est admis).

II.D.1) On pose

$S_N = \sum_{k=0}^{N} c_k e_{\omega_k}$. Calculer $M|x - S_N|^2$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \le M|x|^2$.

II.D.2) Pour tout $k \geq 0$, montrer que $x - S_{d_k}$ est orthogonal au sous-espace vectoriel E_k engendré par les e_{ω_j} où $0 \leq j \leq d_k$. En déduire que

$$M|x - q_k|^2 \geq M|x - S_{d_k}|^2 = M|x|^2 - \sum_{j=0}^{d_k} |c_j|^2$$

II.D.3) Déduire alors de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de P_n vers x que

$$\lim_{k \to \infty} M|x - q_k|^2 = 0$$

En conclure que

$$\lim_{n \to \infty} M|x - S_n|^2 = 0, \; M|x|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \tag{5}$$

Partie III -

Pour une fonction $x \in \mathscr{B}$, la *fonction de corrélation* de x est définie (si cela existe) par

$$\tau \in \mathbb{R} \quad \gamma_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle = \lim_{T \to \infty} M_T(x x^*_\tau) \tag{6}$$

où $*$ est la conjugaison complexe.

On appellera *fonction stationnaire* une fonction x pour laquelle $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\gamma_x(\tau)$ existe.

III.A - Montrer qu'une fonction stationnaire appartient à $\mathscr{M}_2$.

III.B - Montrer que $|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0)$, et que $\gamma_x(-\tau) = \gamma_x(\tau)^*$.

III.C - Si x est stationnaire, montrer qu'il en est de même de $y = e_\omega x$ et que, pour tout τ appartenant à $\mathbb{R}$, on a $\gamma_y(\tau) = \gamma_x(\tau) e^{i\omega\tau}$.

III.D -

III.D.1) Si x appartient à $\mathscr{C}$, montrer que x est stationnaire. On note $\{\omega_k, c_k\}$ ses fréquences et coefficients de Fourier-Bohr, et S_n le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k e_{\omega_k}$$

III.D.2) Pour tout $\tau, \tau \in \mathbb{R}$, calculer $\gamma_{S_n}(\tau)$.

III.D.3) Montrer que γ_x est la somme de la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 e_{\omega_k}$$

normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et que γ_x appartient à $\mathscr{C}$ (on majorera $|\gamma_x(\tau) - \gamma_{S_n}(\tau)|$ en fonction de $M|x - S_n|^2$).

III.E - Soit x une fonction $1-$périodique de $\mathscr{B}$.

III.E.1) Montrer qu'elle est stationnaire, et que γ_x est aussi $1-$périodique.

III.E.2) On note

$$a_k = \int_0^1 x(t) e^{-2i\pi kt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

les coefficients de Fourier complexes de x. Montrer que les coefficients de Fourier de γ_x sont $c_k = |a_k|^2$.

III.F - Soit $E(t)$ la partie entière de t et $F(t) = t - E(t)$ sa partie fractionnaire. La fonction x_1 définie par $x_1(t) = e^{-2i\pi a F(t)}$ où a est un réel irrationnel, est une fonction $1-$périodique de $\mathscr{B}$, de coefficients de Fourier complexes a_k.

III.F.1) Calculer les a_k. Que vaut

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \ ?$$

III.F.2) Calculer $\gamma_{x_1}(\tau)$ pour $\tau \in [0, 1[$ et vérifier que γ_{x_1} est continue sur $\mathbb{R}$.

III.F.3) En déduire que $\gamma_{x_1} \in \mathscr{C}$. Calculer

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 (a+k)^2}.$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Notations : on désigne par K le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$. Lorsque $K = \mathbb{C}$ et $z \in K$, $|z|$ est le module de z et $i^2 = -1$. Pour les entiers n et $p \geq 1$, on note :

- K^n le $K-$espace vectoriel des vecteurs $(z_1, z_2, ..., z_n)$ avec $z_j \in K$ pour $j = 1, 2, \ldots n$.
- $M_{n,p}(K)$ les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K ; et $M_n(K) = M_{n,n}(K)$.

On identifie K^n et $M_{n,1}(K)$ donc, en calcul matriciel un vecteur s'identifie avec la matrice colonne ayant les mêmes éléments. Pour $A \in M_{n,p}(K)$, on note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq p}$ lorsqu'on veut préciser les éléments de A ; quand le contexte est clair, on écrit simplement $A = (a_{ij})$ ou $A = (A_{ij})$. Pour $x \in K^n$, D_x est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de x. Pour $A \in M_n(K)$, σ_A désigne le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A et $\rho(A) = \max\{|\lambda|;\, \lambda \in \sigma_A\}$. Pour $A \in M_n(K)$, ${}^tA$ est la transposée de A ; et pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^* = {}^t\overline{A}$ (c'est-à-dire $A^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$). $S_n(K)$ désigne le sous-ensemble des matrice symétriques de $M_n(K)$. Pour $K = \mathbb{R}$, $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont respectivement les sous-ensembles des matrices symétriques positives et définies positives de $S_n(\mathbb{R})$. On rappelle qu'une matrice symétrique A est positive (resp. définie positive) lorsque la forme quadratique qu'elle définit ne prend que des valeurs positives (resp. strictement positives) sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Partie I -

I.A - Dans cette partie, on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $(\|\ \|_\infty)$ soit $\|z\|_\infty = \max_{j=1,\ldots n} |z_j|$.

On définit l'application $A \in M_n(\mathbb{C}) \to N_\infty(A) = \max_{i=1,\ldots n} \sum_{j \in [1,2,\ldots n]} |a_{ij}|$.

I.A.1) Montrer que $A \to N_\infty(A)$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

I.A.2)

a) Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$: $\|A(z)\|_\infty \leq N_\infty(A)\|z\|_\infty$.

Filière MP

b) Montrer l'égalité

$$N_\infty(A) = \max_{z \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})} \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}.$$

c) Montrer que $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.

I.A.3) Montrer que N_∞ est une norme matricielle c'est-à-dire qu'elle vérifie : $\forall A$ et $B \in M_n(\mathbb{C})$, $N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B)$.

I.A.4) Soit $Q \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. On définit

$$A \in M_n(\mathbb{C}) \to N_Q(A) = N_\infty(Q^{-1}AQ).$$

a) Vérifier que N_Q est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer qu'il existe une constante C_Q telle que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \qquad \frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq C_Q N_\infty(A).$$

I.B -

Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et $\varepsilon > 0$ donné.

Montrer que l'on peut choisir une matrice diagonale $D_S \in M_n(\mathbb{C})$ avec $S = (s, s^2, s^3, \ldots s^n) \in \mathbb{C}^n$ où s est un réel strictement positif telle que :

$$N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon.$$

Étant donnés $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que

$$N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon.$$

I.C - En déduire l'équivalence $\lim_{k \to \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Partie II -

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ fixée ; pour $i \in [1, 2, \ldots n]$ on pose : $L_i = \sum_{j \in [1, 2, \ldots n] j \neq i} |a_{ij}|$
$C_i = \sum_{j \in [1, 2, \ldots n] j \neq i} |a_{ji}|$.

On définit les sous-ensembles du plan complexe :

$G_L(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$ et $D_i(A) = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z - a_{ii}| \leq L_i\}$.

$G_C(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D'_i(A)$ et $D'_i(A) = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z - a_{ii}| \leq C_i\}$.

On désigne par $C_i(A)$ le cercle bordant le disque $D_i(A)$.

II.A -

II.A.1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4+3i & i & 2 & -1 \\ i & -1+i & 0 & 0 \\ 1+i & -i & 5+6i & 2i \\ 1 & -2i & 2i & -5-5i \end{pmatrix}.$$

Représenter dans le plan complexe $G_L(A)$ et $G_C(A)$.

II.A.2) On se propose de montrer l'inclusion $\sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)$.

a) Soit $M = (m)_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que le système linéaire $MZ = 0$ a une solution non nulle.

Montrer que

$\exists p \in [1, 2, \ldots n] \qquad |m_{pp}| \leq L_p$.

b) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \sigma_A$. Utiliser II.A.2-a) et montrer que $\lambda \in G_L(A)$.

c) Conclure en justifiant l'inclusion $\sigma_A \subset G_C(A)$.

II.A.3) On suppose que $A \in M_n(\mathbb{C})$ a une valeur propre μ sur le bord de $G_L(A)$ [1] et soit x un vecteur propre associé à μ.

a) Montrer que si pour $k \in [1, 2, \ldots n]$ on a $|x_k| = \|x\|_\infty$, alors $\mu \in C_k(A)$.

b) On suppose de plus que $a_{ij} \neq 0 \forall (i, j)$. Montrer que $\mu \in \bigcap_{j=1}^{n} C_j(A)$.

---

1. Un point z appartient au bord de $G_L(A)$ si et seulement si $z \in G_L(A)$ et $|z - a_{ii}| \geq L_i$ $i = 1, 2, \ldots n$.

II.A.4) Soit $p \in \mathbb{R}^n$. On note $p > 0$ lorsque $p = (p_1, p_2, \dots p_n)$ et $p_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots n$. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et D_p matrice diagonale avec $p > 0$. Déterminer $G_L(D^{-1}AD)$.

II.A.5)

a) Déduire de II.A.2) et II.A.4) l'inégalité

$$\rho(A) \leq inf_{p>0}\left(\max_{i=1,2,\dots n}\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{ij}|\right).$$

b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ donné par II.A.5)-a est supérieur ou égal à $\frac{83}{3}$.

ii) Donner une valeur approchée de $\rho(A)$ (on pourra utiliser la calculatrice).

II.B - Applications

II.B.1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$\forall i \in [1, 2, \dots n] \qquad |a_{ii}| > L_i$.

On dit que A est strictement diagonale dominante (SDD).

a) Montrer que si A est SDD alors A est inversible.

b) Si A est SDD et si de plus $\forall i \ a_{ii}$ est réel et strictement négatif, montrer que pour tout $\lambda \in \sigma_A$, $Re(\lambda) < 0$.

c) Si A est une matrice réelle symétrique et SDD, énoncer une condition suffisante pour qu'elle soit définie, positive.

II.B.2) Soit B diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante $\kappa_\infty(B)$ telle que

$$\forall E \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E}, \exists \lambda_i \in \sigma_B \ \left|\hat{\lambda} - \lambda_i\right| \leq \kappa_\infty(B) N_\infty(E).$$

Partie III -

Cette partie est indépendante de la Partie II, à l'exception de III.B.3.

III.A - Préliminaire

$\mathbb{C}_n[X]$ est le $\mathbb{C}$- espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients complexes. Soit $t \to P_t$ une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$:

$$P_t(X) = X^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) X^{n-j}$$

où les n applications $t \to c_j(t)$ sont des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$.

On note Z_t l'ensemble des racines de P_t qui est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

III.A.1) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, 1] \qquad Z_t \subset D(0,R).$$

III.A.2) Soit t_0 fixé et $X_0 \in Z_{t_0}$. Montrer que la proposition (P) suivante est vraie

$$(P) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \left| t - t_0 \right| < \eta, \exists X_t \in Z_t, \left| X_t - X_0 \right| < \varepsilon .$$

On pourra raisonner par l'absurde et écrire la proposition (non (P)).

III.B -

III.B.1) Exhiber une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ pour laquelle $D_1(A)$ (notation Partie II) ne contient pas de valeurs propres de A.

III.B.2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $G_L(A)$ défini dans II. On se propose de prouver la propriété suivante :

si $\forall j = 2, 3, \ldots n$, $D_1(A) \cap D_j(A) = \varnothing$, le disque $D_1(A)$ contient au moins une valeur propre de A.

On suppose donc que, $\forall j = 2, 3, \ldots, n$, $D_1(A) \cap D_j(A) = \varnothing$.

On écrit $A = D + B$ où D est diagonale et $B = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ij}$ pour $i \neq j$ et $b_{ii} = 0$.

On définit l'application : $t \in [0,1] \to A(t) = D + tB \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $G_L(A(t)) \subset G_L(A)$.

b) Soit $E = \{t \in [0,1] | \exists \lambda_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)\}$.

i) Montrer que $E \neq \varnothing$.

ii) Montrer la propriété $\forall t \in E$, $\exists \eta > 0$, $]t - \eta, t + \eta[\cap [0, 1] \subset E$.

iii) Soit $k \to (t_k)_{k = 1, 2, \ldots}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $a \in [0,1]$; montrer que $a \in E$.

On admettra que les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans $[0, 1]$ sont $\varnothing$ et $[0, 1]$.

iv) En déduire que $E = [0,1]$. Conclure.

III.B.3) Déduire de la Partie II et de la Partie III des propriétés du spectre de la matrice A définie dans la question II.A.1)

Partie IV - (indépendante de II et III)

Rappels : sur $M_n(\mathbb{C})$ on définit le produit hermitien et la norme associée ou norme de Frobenius N_2 :

Pour A et $B \in M_n(\mathbb{C})$, $<A, B> = Tr(AB^*)$ et

$$N_2(A) = \sqrt{<A, A>} = \sqrt{\sum_{i, j = 1, 2, \ldots n} |a_{ij}|^2} .$$

IV.A -

IV.A.1) Vérifier que N_2 est bien une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$.

Étant donnés A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, on définit leur H– produit noté $A \times_H B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$ par $(A \times_H B)_{ij} = a_{ij} b_{ij} (i = 1, 2, \ldots n \quad j = 1, 2, \ldots p)$.

IV.A.2)

a) Si A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, et si $D \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Delta \in M_p(\mathbb{C})$ sont des matrices diagonales, établir les égalités :

$$D(A \times_H B)\Delta = (DA\Delta) \times_H B = (DA) \times_H (B\Delta) .$$

Donner deux égalités semblables pour $D(A \times_H B)\Delta$.

b) Soient A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}^p$, établir l'égalité : $(AD_x {}^t B)_{ii} = [(A \times_H B)x]_i$

c) Si A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, $y \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^p$ montrer que

$$y^* (A \times_H B)x = Tr(D_y^* A D_x {}^t B) .$$

On pourra introduire la matrice colonne $e = {}^t(1, 1, \ldots 1)$, utiliser les questions a) et b) en remarquant que $D_y e = y$

d) En déduire que $x^* (A \times_H \overline{B})x = <D_x^* A D_x, B>$.

IV.B - Dans la suite on suppose $K = \mathbb{R}$, toutes les matrices sont à coefficients réels.

IV.B.1) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $T \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$. Que peut-on dire de T si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

IV.B.2) Soient A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $A \times_H B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Que peut-on dire si A et $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

IV.B.3) On se propose d'obtenir un encadrement des valeurs propres de $A \times_H B$ quand A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

a) On désigne par $\lambda_{\min}(A)$ (resp. $\lambda_{\min}(B)$) la plus petite valeur propre de A (resp. B) et par $\lambda_{\max}(A)$ (resp. $\lambda_{\max}(B)$) la plus grande.

Montrer que les matrices $B - \lambda_{\min}(B)I_n$ et $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b) Soit $\lambda(A \times_H B)$ une valeur propre de $(A \times_H B)$ et x un vecteur propre pour cette valeur propre ($\|x\|_2 = 1$). Évaluer ${}^tx(A \times_H B - \lambda(A \times_H B)I_n)x$ et en déduire

$$\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) \,.\, (\min_i \; a_{ii})$$

c) Montrer que $a_{ii} \geq \lambda_{\min}(A)$ et en déduire la minoration

$$\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \,.$$

d) Établir de même la majoration

$$\lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B) \,.$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème on identifie les polynômes et les fonctions polynômes correspondantes.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On pose

$$I_p(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} t^p \, dt .$$

On ne cherchera pas à calculer I_0.

Partie I -

I.A - Déterminer le développement en série entière de x de la fonction

$$x \mapsto (1 + x^2)\, e^{x^2} .$$

I.B - On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' - xy = (1 + x^2)\, e^{x^2/2} .$$

I.B.1) Donner la solution générale de l'équation (E).

On désigne par f la solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

I.B.2) Donner l'expression de f. Montrer que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur réelle de x, notée α.

I.B.3) On se propose de calculer une valeur approchée de α par la méthode de Newton.

a) Déterminer préalablement un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ de longueur $0{,}1$ contenant α. Rappeler le principe de la méthode de Newton et expliquer comment on peut l'appliquer à partir de l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$.

b) Écrire un algorithme, mettant en œuvre la méthode de Newton, permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-6} près. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé.

c) Déterminer par l'algorithme mis en place une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Filière PSI

Partie II -

II.A -

II.A.1) Calculer I_1.

II.A.2) Trouver une relation entre I_p et I_{p-2}, pour $p \geq 2$.

II.B -

II.B.1) Montrer que pour tout entier naturel k, il existe une constante λ_k et un polynôme A_k tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{2k+1}(x) = \lambda_k + e^{-x^2/2} A_k(x).$$

II.B.2) Déterminer λ_k et A_k.

II.C -

II.C.1) Montrer que pour tout entier naturel k, il existe une constante μ_k et un polynôme B_k tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{2k}(x) = \mu_k I_0(x) + e^{-x^2/2} B_k(x).$$

II.C.2) Déterminer μ_k et le degré de B_k.

II.D -

II.D.1) Si le degré de P est égal à n, que peut-on dire du degré du polynôme : $1 + P'(X) - xP(X)$?

II.D.2) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $I_0(x) + P(x)\, e^{-x^2/2}$ soit une constante.

Partie III -

Soit ϕ l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(f)(x) = f'(x) - xf(x).$$

III.A -

III.A.1) Montrer que ϕ est une application linéaire sur E.

III.A.2) Déterminer le noyau de ϕ.

III.A.3) L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

III.A.4) Expliciter $\phi^{-1}(g) = \{f \in E \mid \phi(f) = g\}$ à l'aide d'une constante C et de $\int_0^x e^{-t^2/2} g(t)dt$.

III.B -

III.B.1) Quelle est l'image de f par $\phi \circ \phi$?

III.B.2) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

III.C - On pose par convention $\phi^1 = \phi$ et, plus généralement, on définit, pour tout n entier, $n \geq 2$, ϕ^n par :

$$\phi^n = \phi^{n-1} \circ \phi = \phi \circ \phi^{n-1}.$$

III.C.1) Résoudre $\phi^2(f) = 0$.

III.C.2) Résoudre $\phi^n(f) = 0$.

Partie IV -

Soit ϕ_0 l'application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\phi_0(P) = \phi(P)$.

IV.A - ϕ_0 est-elle injective ? surjective ?

IV.B -

IV.B.1) Montrer que pour tout n entier naturel, $X^{2n+1} \in \phi_0(\mathbb{R}[X])$.

IV.B.2) En déduire que tout polynôme impair appartient à $\phi_0(\mathbb{R}[X])$.

IV.C - Pour tout q, entier strictement positif, on définit le polynôme Q_q :

$$Q_q(X) = X^{2q} - (2q-1)X^{2q-2}.$$

IV.C.1) Déterminer un polynôme P tel que $Q_q = \phi_0(P)$.

On désigne par $\mathscr{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $\{Q_q \mid q \in \mathbb{N}^*\}$.

IV.C.2) Montrer que pour tout entier naturel non nul q, le polynôme $X^{2q} - \mu_q$ est élément de $\mathscr{P}$.

On pourra remarquer que : $\dfrac{Q_k(X)}{\mu_k} = \dfrac{X^{2k}}{\mu_k} - \dfrac{X^{2k-2}}{\mu_{k-1}}$.

IV.C.3) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(X, X^3, ..., X^{2n+1}, ...)$ et $\mathscr{P}$ sont en somme directe.

IV.C.4) Montrer que $\text{Im}(\phi_0) = \text{Vect}(X, X^3, ..., X^{2n+1}, ...) \oplus \mathscr{P}$.

Partie V -

On considère l'équation différentielle :

$$(1) \quad y' - xy = (1 + x^2)\, e^{x^2}$$

et on définit la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt .$$

V.A - Donner la solution générale de l'équation (1) (l'expression de cette solution utilise la fonction H).

V.B - Déterminer une fonction g, impaire, développable en série entière et solution de l'équation (1). Quel est le rayon de convergence de son développement en série entière ?

V.C - À l'aide des questions précédentes calculer :

$$\int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt .$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Rappels, notations et objectifs du problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n. De plus :

- $\mathcal{M}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n ;
- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $A_{i,j}$ le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j ;
- pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $M(\alpha, \beta)$ est la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$;
- si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ sont dans $\mathbb{R}^p$, on désigne par $\operatorname{diag}(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \ldots, M(\alpha_p, \beta_p))$ la matrice de $\mathcal{M}_{2p}$ définie par blocs carrés d'ordre 2 dont les seuls blocs éventuellement non nuls sont les blocs diagonaux $M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \ldots, M(\alpha_p, \beta_p)$;
- I_n est la matrice unité $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ élément de $\mathcal{M}_n$;
- On rappelle les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice et leur codage :

opérations	codage
échange des lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$
multiplication de la ligne i par $\alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
ajout de la ligne j, multipliée par le scalaire λ, à la ligne i $(i \neq j)$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit de même trois types d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Si $A \in \mathcal{M}_n$ et si E est la matrice obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, alors EA (resp. AE) est la matrice obtenue à partir de A en effectuant la même opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) de A (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

Filière PSI

On confond respectivement :

- matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) canoniquement associé,
- vecteur de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) et matrice colonne de ses coordonnées,
- matrice de taille 1 et scalaire la constituant.

On rappelle qu'une symétrie s de $\mathbb{R}^n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$; il existe alors deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tel que s soit la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, définie par :

$$s|_{E_1} = \mathrm{Id}_{E_1} \text{ et } s|_{E_2} = -\mathrm{Id}_{E_2}.$$

Préciser la symétrie s, c'est déterminer les sous-espaces E_1 et E_2 associés.

On note (P_A) la propriété :

(P_A)	A ne possède pas de valeur propre réelle

Le but de ce problème est d'étudier des matrices de $\mathcal{M}_n$ vérifiant la propriété (P_A).

Après avoir établi quelques résultats préliminaires, on étudie des cas particuliers dans les parties I et II et un cas plus général dans la partie III.

Résultats préliminaires

1) On se propose de démontrer le résultat suivant :

« deux matrices de $\mathcal{M}_n$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n$ ».

Soit donc A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P un élément de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

a) Montrer qu'il existe $R, J \in \mathcal{M}_n$ tels que $P = R + iJ$ avec $i^2 = -1$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A(R + tJ) = (R + tJ)B$.

c) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + t_0 J) \neq 0$.

d) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n$.

2)

a) Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

b) En déduire que s'il existe une matrice A de $\mathscr{M}_n$ vérifiant (P_A), alors n est pair.

Dans toute la suite du problème, on suppose n pair et on note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Partie I -

I.A - Dans cette section I.A.1, on se place dans $\mathbb{R}^2$ et on désigne par (e_1, e_2) la base canonique, avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

I.A.1) On considère la matrice $M(0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et on désigne par u l'endomorphisme associé.

a) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de s_1, symétrie par rapport à la droite $\mathbb{R}e_1$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}e_2$.

b) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de l'application $u \circ s_1$.

En déduire qu'il existe une symétrie s_2, qu'on précisera, telle que $u = s_2 \circ s_1$.

I.A.2) On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Montrer que A est semblable à $M(0, 1)$ et donner une matrice P de $\mathscr{M}_2$ à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que $M(0, 1) = P^{-1}AP$.

b) Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Soit α et β des nombres réels tels que $\beta^2 - \alpha^2 = 1$ et $B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$.

c) Montrer que B est semblable à $M(0, 1)$ et donner une matrice Q de $\mathscr{M}_2$ telle que $M(0, 1) = Q^{-1}BQ$.

Indication : on pourra calculer $Be_1 = B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

d) Montrer que B est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

I.A.3) On considère la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ où α et β sont des nombres réels tel que $\alpha^2+\beta^2 = 1$.

Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

I.A.4) On considère à présent la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ où α et β sont des nombres réels tels que $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.A.5) Soit $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ appartenant à $\mathscr{M}_2$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients de A pour que (P_A) soit réalisée.

b) En supposant que A vérifie (P_A), et en étudiant la diagonalisation dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de A, montrer qu'il existe une unique matrice, semblable à A, du type $M(\alpha,\beta)$ avec α réel et β réel strictement positif. Expliciter α et β en fonction de a, b, c et d.

c) Que peut-on dire de $\det(A)$ si A vérifie (P_A) et est dans $\mathscr{M}_2$?

d) Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.A.6) On suppose que $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique (i.e. (e_1,e_2) est orthonormée directe). Que sont alors les endomorphismes de matrice $M(\alpha,\beta)$ (avec α et β réels tels que $\alpha^2+\beta^2\neq 0$) dans la base canonique ?

I.B - Soit B une matrice de $\mathscr{M}_p$ vérifiant $B^2 = I_p$. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n$ définie par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix}2B & -5B\\ B & -2B\end{bmatrix}$.

I.B.1) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_p$ et qu'il existe une matrice Q de $\mathscr{M}_p$ inversible, des entiers naturels q et r tels que $Q^{-1}BQ$ soit sous la forme d'une matrice par blocs $\begin{bmatrix}I_q & 0\\ 0 & -I_r\end{bmatrix}$

On convient que cette matrice vaut I_p lorsque $r = 0$ et $q = p$ et qu'elle vaut $-I_p$ lorsque $q = 0$ et $r = p$.

I.B.2) Déterminer une matrice par blocs P de $\mathscr{M}_n$ inversible et constituée de multiples de I_p telle que : $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{bmatrix}$.

I.B.3) En déduire que A est semblable dans $\mathscr{M}_n$ à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}.$$

I.B.4) Montrer alors que A est semblable dans $\mathscr{M}_n$ à une matrice du type $\text{diag}(M(0, 1), M(0, 1), \ldots, M(0, 1))$.

I.B.5) *Exemple* : on considère dans $\mathscr{M}_4$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -10 & -15 \\ -2 & -4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer une matrice inversible M de $\mathscr{M}_4$ telle que

$M^{-1}AM = \text{diag}(M(0, 1), M(0, 1))$.

b) En utilisant la technique vue à la question I.A.1, montrer que A est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Partie II -

II.A - Dans cette question, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n$ telle que $A^2 = -I_n$.

II.A.1) Montrer que (P_A) est réalisée.

II.A.2) Si E est obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, comment déduit-on EAE^{-1} de A ?

On distinguera les trois opérations élémentaires codées sous la forme :

a) $L_i \leftrightarrow L_j$,

b) $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

c) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.A.3)

a) En utilisant II.A.1, montrer qu'il existe $i \geq 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.

b) En utilisant des opérations élémentaires, en déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n$ inversible telle que si $A' = PAP^{-1}$ alors $A'_{i,1} = 0$ si $i \neq 2$ et $A'_{2,1} = 1$.

c) Montrer alors que $A'_{i,2} = 0$ si $i \neq 1$ et $A'_{1,2} = -1$.

II.A.4) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n$ inversible telle que $QA'Q^{-1}$ soit de la forme par blocs $\begin{bmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-2}$.

II.A.5) Montrer que A est semblable à une matrice du type

$\operatorname{diag}(M(0,1), M(0,1), \ldots, M(0,1))$.

II.A.6) *Exemple* : en utilisant la méthode décrite dans cette partie, trouver une matrice M inversible de $\mathcal{M}_4$ telle que $MAM^{-1} = \operatorname{diag}(M(0,1), M(0,1))$ où A est la matrice de la question I.B.5). On fera apparaître clairement les opérations élémentaires utilisées.

II.B - Dans cette question A est une matrice

de $\mathcal{M}_n$ vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n = 0$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

II.B.1) Montrer que A vérifie (P_A).

II.B.2) Montrer que A est semblable à la matrice d'ordre n

$\operatorname{diag}(M(\alpha, \beta), M(\alpha, \beta), \ldots, M(\alpha, \beta))$.

Que peut-on dire de $\det(A)$?

II.C - Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $u(P)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ u(P)(x) = x^{n-1} P\left(\frac{-1}{x}\right).$$

II.C.1) Déterminer pour quelles valeurs de i et j dans $\{0, \ldots, n-1\}$, le plan $vect(X^i, X^j)$ est stable par u.

II.C.2) En déduire que la matrice A de $\mathcal{M}_n$ telle que $A_{n+1-i,i} = (-1)^{i-1}$ si $1 \leq i \leq n$, les autres coefficients de A étant nuls, est semblable à $\operatorname{diag}(M(0,1), M(0,1), \ldots, M(0,1))$.

Partie III -

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n$ vérifiant (P_A).

On se propose de montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

i) A est semblable à une matrice du type

$$\mathrm{diag}(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \ldots, M(\alpha_p, \beta_p)) \text{ avec } (\alpha_k,\beta_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \text{ pour } 1 \leq k \leq p .$$

ii) Il existe un polynôme réel à racines simples complexes non réelles annulé par A.

iii) Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 stable par A possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A.

III.A - Dans cette section III.A, on montre que (i) $\Rightarrow$ (ii).

III.A.1) Montrer que si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, le polynôme $(X-\alpha)^2 + \beta^2$ ne possède que des racines simples complexes non réelles.

III.A.2) En déduire que (i) $\Rightarrow$ (ii).

III.B - Dans cette section III.B, on montre que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

On suppose donc que A vérifie (ii). Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 et stable par A. Soit (f_1, f_2) une base E que l'on complète en une base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

III.B.1) Montrer que dans la base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a une matrice s'écrivant par blocs :

$$\begin{bmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{ avec } A' \in \mathscr{M}_2 .$$

III.B.2) Vérifier que A' ne possède pas de valeur propre réelle et en déduire que A' est semblable à une matrice du type $M(\alpha, \beta)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

III.B.3) Montrer que E est inclus dans $\mathrm{Ker}((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$.

III.B.4) Montrer que $\mathrm{Ker}((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$ possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A dans $\mathbb{R}^n$.

III.B.5) En utilisant une technique analogue à celle vue dans les parties II.A.3 et II.A.4, montrer que E possède un supplémentaire stable par A dans $\mathrm{Ker}((A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$, puis conclure que iii) est réalisé.

III.C - En raisonnant par récurrence, montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i).

III.D - *Exemple* :

Soit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

En admettant que A annule $(X^2+1)(X^2-4X+5)$, déterminer une matrice inversible M de $\mathscr{M}_4$ et des réels α, β, α' et β' tels que

$$A = M \begin{bmatrix} M(\alpha,\beta) & 0 \\ 0 & M(\alpha',\beta') \end{bmatrix} M^{-1}.$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

On dit qu'une suite réelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **ultimement périodique** lorsqu'elle est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(\mathscr{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+p} = a_n \quad .$$

(L'entier p est une période de la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$).

On note UP l'ensemble des suites ultimement périodiques de réels.

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés élémentaires de ces suites et le caractère ultimement périodique éventuel de suites simples.

Partie I -

I.A - Montrer que UP est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. Est-il de dimension finie ?

I.B - Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de UP et $\mathscr{P}(a)$ l'ensemble des entiers $p \geq 1$ tels que la suite a admette p pour période à partir d'un certain rang.

I.B.1) Montrer qu'il existe un entier $T \geq 1$ (que l'on appellera la période de a) tel que :

$$\mathscr{P}(a) = \mathbb{N}^* T = \{kT, k \in \mathbb{N}^*\} \quad .$$

Que peut-on dire de la suite lorsque $T = 1$?

I.B.2) Montrer qu'il existe un plus petit entier n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+T} = a_n$$

Montrer que, pour tout $p \in \mathscr{P}(a)$, n_0 est le plus petit entier à partir duquel la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ devient p-périodique. Combien de paramètres réels suffisent à définir parfaitement a ?

I.C - Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de UP.

I.C.1) Montrer que a est bornée et que le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif. À quelle condition nécessaire et suffisante R_a est-il égal à $+\infty$? Que vaut-il sinon ?

I.C.2) Montrer que la somme de cette série est une fraction rationnelle. Dans quel cas est-ce un polynôme ?

Filière PC

I.D - Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme est la restriction à $]-R, R[$ d'une fraction rationnelle.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?

Partie II -

II.A - Exemple 1

On définit la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_n = 0$ si F_n est pair et $a_n = 1$ sinon. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

II.B - Exemple 2

On définit maintenant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a_n \text{ et } a_{2n+1} = -a_n\ .$$

II.B.1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

On note S sa somme.

II.B.2) Trouver une relation liant $S(x)$ et $S(x^2)$.

En déduire que, pour tout x, $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 - x^{(2^k)})\ .$$

II.B.3) Étudier, pour n donné dans $\mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{S(x)}{(1-x)^n} \right)$$

et en déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas ultimement périodique.

II.C - Exemple 3

Soit $x = a/b$ un rationnel strictement positif, donné sous forme irréductible. On définit deux suites d'entiers $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

- $d_0 = E(x)$ (partie entière) et r_0 est le reste de la division euclidienne de a par b.
- pour tout $n \geq 1$, r_n (resp. d_n) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de $10 \cdot r_{n-1}$ par b.

II.C.1) Dans cette question (uniquement), $x = 22/7$.
Déterminer $d_0, d_1, \ldots, d_{10}$.

II.C.2) Montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ultimement périodique. Qu'en est-il de $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

II.C.3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d_n \leq 9$.

II.C.4) Établir l'égalité :

$$x = E(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}$$

Partie III -

Le but de cette partie est de montrer que le réel π n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$.

$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Pour tout élément f de E, on note F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x t f(t) dt\ .$$

III.A - L'application de E qui à tout élément f associe F est notée L. Vérifier que L est une application linéaire de E dans E.

III.B - On considère dans cette question un élément f de E supposé borné sur $\mathbb{R}$ et on note $M = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

III.B.1) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$|F(x)| \leq M \frac{x^2}{2}$$

III.B.2) On définit une suite d'éléments de E par $f_0 = f$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_{n+1} = L(f_n)$.
Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2.4\ldots 2n} M\ .$$

III.B.3) Soit I un segment quelconque de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout n, f_n est bornée sur I et $\lim_{n \to +\infty} (\sup_{x \in I} |f_n(x)|) = 0$.

III.C - On prend maintenant dans cette question et dans les suivantes $f = \sin$, et on considère la suite de fonctions définie comme dans la question précédente.

III.C.1) Déterminer les fonctions f_1 et f_2.

III.C.2) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = (2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x) \quad .$$

III.D - Pour $p \in \mathbb{N}$, on note F_p le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes de degré au plus p.

III.D.1) On définit :

$$H : F_p \times F_p \to F_p \times F_p$$
$$(P,Q) \mapsto (P' - Q, P + Q')$$

Vérifier que H est un automorphisme de $F_p \times F_p$.

III.D.2) On désigne par S l'ensemble des fonctions paires de F_p, par A celui des fonctions impaires.

Montrer que $H(S \times A) = A \times S$.

III.D.3) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la question III.C. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un couple unique de fonctions P_n et Q_n de F_n, P_n paire et Q_n impaire, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x \quad .$$

Déterminer P_n et Q_n pour $n = 0, 1, 2$.

III.D.4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - x^2 P_{n-1}(x) \quad .$$

En déduire que les fonctions P_n sont des polynômes à coefficients entiers.

III.E - On suppose ici que le réel π est élément de ℚ, ensemble des nombres rationnels.

Soit donc p élément de $\mathbb{Z}$ et q élément de $\mathbb{N}^*$ tels que $\pi = p/q$.

III.E.1) Montrer que la suite

$$\left((2q)^n P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?

III.E.2) En déduire que π n'est pas rationnel.

Partie IV -

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = 1$ si $\sin n > 0$, $a_n = 0$ sinon.

Le but de cette partie est d'étudier si cette suite à valeurs entières est élément de UP.

IV.A - On suppose que cette suite est ultimement périodique.

IV.A.1) Montrer qu'il existe un entier N et un entier strictement positif T tels que, pour tout entier k supérieur ou égal à N, le signe de $\sin(kT)$ soit constant.

IV.A.2) En déduire que la suite $(\cos(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est composée de réels strictement positifs à partir d'un certain rang.

IV.B - Soit $G = \mathbb{Z}T + 2\pi\mathbb{Z} = \{nT + 2k\pi,\ (n,k)\in\mathbb{Z}^2\}$.

IV.B.1) Montrer que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Existe-t-il $a\in\mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$?

IV.B.2) On pose $G^+ = G\cap\mathbb{R}^{+*}$ (ensemble des éléments strictement positifs de G). Montrer que G^+ possède une borne inférieure a.

IV.B.3) On suppose $a\in G^+$. Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.

IV.B.4) a n'est donc pas élément de G^+. Supposant $a > 0$, montrer que l'on peut trouver deux éléments g et g' de G^+ tels que $a < g' < g < 2a$. En déduire $a = 0$.

IV.C -

IV.C.1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $g_n\in G$ tel que $0 < g_n < 10^{-n}$.

IV.C.2) Soit x un réel.

Construire une suite d'éléments de G convergeant vers x.

IV.D -

IV.D.1) Montrer l'existence d'une suite d'entiers positifs $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\cos(k_nT))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-(1/2)$.

Montrer que l'ensemble $\{\cos(k_nT), n\in\mathbb{N}\}$ des termes de cette suite n'est pas de cardinal fini.

IV.D.2) Construire alors une suite strictement croissante $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la limite de $(\cos(y_nT))_{n\in\mathbb{N}}$ soit $-(1/2)$.

IV.D.3) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?'

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit A une matrice carrée d'ordre n, dont les coefficients sont des entiers naturels. On note a_{ij} le coefficient de A appartenant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne de A.

On suppose que A est *symétrique* et que les coefficients de la diagonale principale de A sont égaux à 1.

On désigne par M la matrice réelle, carrée, d'ordre n, de coefficient m_{ij}, définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} -\cos\left(\dfrac{\pi}{a_{ij}}\right) & \text{si} \quad a_{ij} \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad a_{ij} = 0 \end{cases}$$

On remarque que M est symétrique et que les coefficients de sa diagonale principale valent 1.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base donnée de E.

Pour chaque entier i compris entre 1 et n, on désigne par σ_i l'endomorphisme de E caractérisé par :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \sigma_i(e_j) = e_j - 2m_{ij}e_i .$$

On note τ l'endomorphisme de E donné par :

$$\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \circ \sigma_n .$$

où $\circ$ désigne la composition des applications.

On désigne par S_i et T les matrices associées aux endomorphismes σ_i et τ dans la base $\mathscr{B}$ et par I la matrice unité d'ordre n associé à l'identité (notée Id).

Partie I - Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie I, on suppose $n = 2$ et on pose :

$$a = a_{12} = a_{21} \text{ et } m = m_{12} = m_{21} .$$

I.A -

I.A.1) Expliciter M en fonction de m puis en fonction de a.

I.A.2) Donner en fonction de m les matrices S_1, S_2 et T.

Filière PC

I.B - On suppose dans cette question I.B que $a \in \{0,1\}$ et donc que $|m| = 1$.

I.B.1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de τ

I.B.2) La matrice T est-elle diagonalisable ? (Justifier la réponse).

I.B.3) Diagonaliser ou trigonaliser, si possible, la matrice T.

I.B.4) Montrer que τ est d'ordre infini (c'est à dire qu'il n'existe pas d'entier naturel strictement positif k tel que $\tau^k = Id$, où $\tau^k = \tau \circ \tau \circ \ldots \tau$ désigne la puissance k-ième de τ pour la loi de composition).

I.C - On suppose dans cette question I.C, que a est supérieur ou égal à 2, et donc que $|m| < 1$.

On définit la forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ par :

$\phi(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = xx' + yy' + m(xy' + yx')$, pour tous x, x', y, y' réels.

I.C.1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

Muni de ce produit scalaire, E est un plan euclidien, que nous noterons aussi E.

I.C.2) Pour quelle valeur de a la base $\mathscr{B}$ est-elle orthonormale ?

I.C.3) Montrer que les sous-espaces propres de σ_1 sont orthogonaux.

I.C.4) Montrer que σ_1 et σ_2 sont des symétries orthogonales en précisant par rapport à quelles droites vectorielles.

I.C.5) Montrer que τ est une rotation et déterminer une mesure en radians de l'angle de cette rotation, en supposant la base $\mathscr{B}$ directe.

I.C.6) En déduire que τ est d'ordre a, c'est-à-dire que a est le plus petit entier strictement positif k tel que $\tau^k = Id$.

I.D - On suppose dans cette question que $a \in \{2, 3, 4, 6\}$.

I.D.1) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, déterminer un réel μ_a, $1 \leq \mu_a < 2$, tel que les matrices associées à σ_1 et σ_2 relativement à la base $(e_1, \mu_a e_2)$, aient tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

I.D.2) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, faire une figure soignée où l'on indiquera e_1 et $f_2 = \mu_a e_2$, ainsi que leurs images par σ_1 et σ_2. On représentera le plan euclidien E de façon usuelle, c'est-à-dire que des vecteurs orthogonaux seront représentés par des flèches perpendiculaires et des vecteurs de même norme par des flèches de même longueur.

Partie II - Étude du cas général

Dans cette partie n désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

II.A -

II.A.1)

a) Pour i compris entre 1 et n, calculer $\sigma_i(e_i)$.

b) Exprimer $\sigma_i^2 = \sigma_i \circ \sigma_i$ en fonction de l'identité.

c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(\sigma_i - Id) \oplus \mathrm{Ker}\,(\sigma_i + Id)$.

II.A.2) On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, $\varepsilon_k = \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \sigma_{k-1}(e_k)$.

a) Montrer par récurrence sur $i < k$, que, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, on a :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \sigma_i(e_k) = e_k - 2 \sum_{1 \le j \le i} m_{jk} \varepsilon_j .$$

b) Vérifier que la famille $\mathscr{F} = (\varepsilon_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de E.

II.A.3)

a) Exprimer $\tau(e_n)$ en fonction de ε_n.

b) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ on a :

$$\tau(e_k) = -\varepsilon_k - 2 \sum_{j=k+1}^{n} m_{jk} \varepsilon_j .$$

II.A.4) Soit C la matrice carrée d'ordre n, triangulaire supérieure, dont les coefficients c_{ij} sont donnés par :

$$c_{ij} = \begin{cases} 2m_{ij} & \text{si} \quad i < j \\ 0 & \text{si} \quad i \ge j \end{cases}$$

On notera ${}^tC$ la matrice transposée de la matrice C.

On désigne par P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{F}$.

a) Exprimer P^{-1} en fonction de C.

b) Montrer que :

$$T = -(I + C)^{-1}(I + {}^tC) .$$

c) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\det(\lambda I - T) = \det((\lambda + 1)I + \lambda C + {}^tC) .$$

II.B - Soient i, j vérifiant : $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$; on note E_{ij} le sous-espace vectoriel de E engendré par e_i et e_j.

II.B.1)

a) Montrer que $\dim E_{ij} = 2$.

b) Montrer que E_{ij} est stable par σ_i, σ_j, $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$.

On note π_{ij} et π_{ji} les restrictions de $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$ à E_{ij}.

c) Donner les matrices Π_{ij} et Π_{ji} associées à π_{ij} et π_{ji} relativement à la base (e_i, e_j) de E_{ij}.

d) Vérifier que Π_{ij} et Π_{ji} sont inverses l'une de l'autre. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

II.B.2)

a) Montrer que, si pour tous i et j on a $a_{ij} \in \{0,1\}$, alors π_{ij} et π_{ji} sont d'ordre infini.

b) Quels sont les ordres de π_{ij} et π_{ji} lorsque $a_{ij} \geq 2$?

II.C - On suppose dans cette section que :

i) $n \geq 3$

ii) $a_{ij} = 2$ pour $1 < |i - j| < n - 1$

iii) $\{a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{(n-1)n}, a_{n1}\} \subset \{3, 4, 6\}$.

On pose $\beta_n = 2m_{1n}$ et $\beta_i = 2m_{i(i+1)}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

On désigne par p (resp. q) le nombre de couples (i,j), $i < j$, tels que $a_{ij} = 4$ (resp. $a_{ij} = 6$).

II.C.1) Montrer que si p et q sont pairs, alors il existe un n-uplet de réels $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ tel que les matrices de tous les σ_k, pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, relativement à la base $(\nu_1 e_1, \nu_2 e_2, \ldots, \nu_n e_n)$, ont leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

II.C.2) $\det(\lambda I - T)$ est un polynôme réel en λ, de degré n, que l'on écrira $\det(\lambda I - T) = \sum \alpha_k \lambda^k$.

a) Justifier que $\alpha_n = 1$ et $\alpha_{n-1} = -\operatorname{tr} T$, où $\operatorname{tr} T$ désigne la trace de T.

b) Calculer, pour $n = 3$, $\det(\lambda I - T)$ en fonction de λ, β_1, β_2 et β_3.

c) Montrer que

$$\alpha_{n-1} = n - \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i^2 + (-1)^{n+1} \beta_1 \ldots \beta_n$$

(on pourra utiliser la question II.A.4 et démontrer la relation par récurrence sur n).

II.C.3)

a) Montrer que, s'il existe une base de E dans laquelle toutes les matrices des σ_k ont tous leurs coefficients entiers, alors la trace de τ est un entier.

b) Montrer que si p est impair ou q est impair, alors la trace de τ est irrationnelle.

c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de tous les σ_k ont tous leurs coefficients entiers si et seulement si p et q sont pairs.

Partie III - Un exemple dans le cas de $n = 3$

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

III.A - Peut-on trouver une base de E dans laquelle les matrices de σ_1 , σ_2 et σ_3 ont tous leurs coefficients entiers ?

III.B - On définit la forme bilinéaire Φ sur $E \times E$ par :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_{ij} x_i y_j$$

pour tous x_1 , x_2 , x_3 , y_1 , y_2 , y_3 réels.

III.B.1) Vérifier que Φ est un produit scalaire.

On considérera donc E comme un espace vectoriel euclidien muni de ce produit scalaire.

III.B.2) Donner une équation cartésienne de l'orthogonal, pour Φ , du vecteur $ae_1 + be_2 + ce_3$ en fonction de a , b , c .

III.C -

III.C.1) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer les sous-espaces $F_i = \text{Ker}\,(\sigma_i - Id)$ et $G_i = \text{Ker}\,(\sigma_i + Id)$.

III.C.2) En déduire que les σ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, sont des symétries orthogonales par rapport à des plans (ou réflexions) de E.

III.D - Montrer que les $\sigma_i \circ \sigma_j$, pour $1 \leq i$, $j \leq 3$, sont des rotations et les caractériser.

III.E -

III.E.1) Que peut-on dire de $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$?

III.E.2) Déterminer la matrice T.

Déterminer un vecteur non nul u de norme 1 tel que $\tau(u) = -u$, puis une base directe de E, de premier vecteur u, orthonormale pour Φ, $\mathscr{D} = (u, v, w)$.

III.E.3) Montrer que τ est la composée d'une rotation d'axe $\mathbb{R}u$, dont on précisera l'angle et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathbb{R}u)^{\perp}$.

Donner l'ordre de la matrice T, c'est-à-dire le plus petit entier $k > 0$ tel que $T^k = I$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Les polynômes intervenant dans ce problème sont des polynômes à une indéterminée X sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un polynôme pourra être indifféremment noté P ou $P(X)$. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ sur $\mathbb{R}$, par F_n le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel), et par $[n]$ la partie entière d'un entier n.

Partie I -

I.A - ch désignant la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique, on rappelle que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^{n\alpha} = (\mathrm{ch}\alpha + \mathrm{sh}\alpha)^n$.

I.A.1) Montrer que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{ch}n\alpha = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (\mathrm{ch}\alpha)^{n-2k} (\mathrm{ch}^2\alpha - 1)^k$.

I.A.2) En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un polynôme P_n tel que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}(n\alpha) = P_n(\mathrm{ch}\alpha)$.

Expliciter P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

I.B -

I.B.1) Démontrer que pour tout $n \geq 2$:

$$P_n(X) + P_{n-2}(X) = 2XP_{n-1}(X)$$

En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique.

I.B.2) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

I.B.3) Calculer le terme de plus haut degré de P_n. Déterminer la parité de P_n.

I.B.4) Démontrer que, si $|x| > 1$ et $n \geq 1$, alors $|P_n(x)| > 1$.

I.C - Dans cette question n est un entier naturel non nul fixé.

Démontrer que les racines de P_n sont toutes réelles, distinctes, et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1, 1]$. Elles seront notées x_i, $0 \leq i \leq n-1$ de telle sorte que la suite des x_i soit strictement décroissante. On déterminera la valeur de x_i.

Filière TSI

Partie II -

II.A -

II.A.1) Pour f élément de E, justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

II.A.2) Montrer que l'application Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi : (f,g) \mapsto (f|g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

définit un produit scalaire sur E. On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

II.B - Pour un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}, pour $n \geq 2$. En déduire la valeur de I_n.

II.C -

II.C.1) Calculer, pour m et n entiers naturels :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Que peut-on en déduire ?

II.C.2) Démontrer que

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^n P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0$$

lorsque n et m sont deux entiers naturels tels que $n < m$.

II.D - Soit h la fonction de E définie par $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculer la distance de h au sous-espace F_4, c'est-à-dire le nombre $d(h, F_4) = \inf_{P \in F_4} \|h - P\|$.

Partie III -

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul fixé. L'espace F_n est muni du produit scalaire défini au II.B.

III.A -

III.A.1) Soit $P \in F_n$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n, dont le polynôme dérivé est noté P'.

Calculer la dérivée de la fonction $x \to \sqrt{1-x^2}\,P'(x)$ et en déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in F_n$, que l'on exprimera en fonction de P' et P'', tel que

$$\forall x \in]-1, 1[\ ,\ Q(x) = \sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}\,P'(x)] \qquad (1)$$

Montrer de plus que l'application φ définie dans la relation (1) par $\varphi(P) = Q$ est un endomorphisme de F_n.

III.A.2) Dans cette question seulement, on suppose $n \geq 2$. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots X^n)$ de F_n.

III.A.3) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

III.B -

III.B.1) Démontrer que φ est un endomorphisme symétrique de F_n. On pourra utiliser l'expression (1) de Q obtenue à la question III.A.1).

III.B.2) En utilisant la question II.C.2), démontrer que pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, il existe un réel λ_k tel que $\varphi(P_k) = \lambda_k P_k$. En utilisant le terme de plus haut degré de P_k, déterminer λ_k.

III.B.3) Retrouver et préciser le résultat obtenu à la question III.A.3).

III.C - Dans cette question, $n = 2$.

On pose, pour tout polynôme $P \in F_2$ et tout réel λ, $q_\lambda(P) = \lambda\|P\|^2 + (\varphi(P)|\ P)$.

III.C.1) Montrer que q_λ est une forme quadratique sur F_2.

III.C.2) Discuter selon la valeur de λ la nature de la quadrique définie par l'équation $q_\lambda(P) = 1$.

Partie IV -

IV.A - On désigne par x_0, x_1, x_2 les racines du polynôme P_3 et par A_0, A_1, A_2 trois nombres réels. Pour tout élément f de E, on définit le nombre $R(f)$ par :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)\,.$$

IV.A.1) Déterminer A_0, A_1, A_2 pour que $R(P) = 0$ pour toute fonction polynôme P élément de F_2.

IV.A.2) Démontrer qu'alors $R(P) = 0$ pour toute fonction polynôme P de F_5 : on pourra utiliser une division euclidienne par le polynôme P_3.

IV.B - Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{x^5}{\sqrt{-x^2 - 2x}} dx$$

et déduire de IV.A) sa valeur.

IV.C - Pour n fixé non nul, on désigne par $(x_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ les racines de P_n (définies dans la partie I).

IV.C.1) Soit x un réel tel que $\sin x \neq 0$.

Exprimer la somme $\sum_{j=0}^{n-1} \cos((2j+1)x)$ à l'aide de $\sin(2nx)$ et de $\sin x$.

IV.C.2) En déduire pour un entier naturel k donné, $k \leq 2n-1$, la valeur de

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} P_k(x_j).$$

IV.C.3) Démontrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que, pour toute fonction polynôme P de F_{2n-1}, on ait

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} P(x_j).$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Soit $\mathbb{P}$ le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique $(\vec{i},\vec{j})$.

On notera $o = (0,0)$ l'origine du plan. Tout élément (x,y) de $\mathbb{P}$ peut s'interpréter comme un point p de coordonnées (x,y) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, ou comme un vecteur $\vec{p}$ de coordonnées (x,y) dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
Pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathbb{P}$, on note alors $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$ leur produit scalaire et $det(\vec{u},\vec{v})$ leur déterminant dans toute base orthonormale directe ; on désigne par U l'ensemble des vecteurs de norme 1, et pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on note $(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ le repère polaire, défini par :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\ ,\ \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\ .$$

On rappelle qu'étant donnés $m\in\mathbb{P}$ et $\vec{w}\in\mathbb{P}\backslash\{\vec{0}\}$, la droite affine passant par m et de vecteur directeur $\vec{w}$ est l'ensemble d des éléments de $\mathbb{P}$ pouvant s'écrire $m+\lambda\vec{w}$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$d = m + \mathbb{R}\,\vec{w} = \{p\in\mathbb{P}\,|\,\exists\lambda\in\mathbb{R}, p = m+\lambda\vec{w}\}\,.$$

On appelle alors *axe* du plan $\mathbb{P}$ tout couple $\delta = (d,\vec{w})$ formé d'une droite affine d, appelée support de δ, et d'un vecteur $\vec{w}$, vecteur directeur de d de norme 1. Un axe est ainsi une droite affine orientée. Réciproquement, chaque droite affine d définit deux axes d'orientations opposées : $(d,\vec{w})$ et $(d,-\vec{w})$.

En notant Δ l'ensemble des axes du plan $\mathbb{P}$, on va successivement :

- construire un modèle cylindrique de Δ et y analyser quelques situations de géométrie élémentaire,
- étudier sur le cylindre représentant Δ les transformations correspondant aux isométries du plan $\mathbb{P}$.

Filière TSI

Partie I - Modèle cylindrique de l'ensemble des axes du plan

On note $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$. Dans tout le problème, les lettres minuscules désigneront les objets relatifs à $\mathbb{P}$ (points, vecteurs, droites, coordonnées), tandis que les majuscules concerneront les objets relatifs à $\mathbb{E}$; on notera ainsi (x,y) les coordonnées des éléments de $\mathbb{P}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ et (X,Y,Z) celles des éléments de $\mathbb{E}$ dans la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$.

I.A - Caractériser l'ensemble $\mathscr{C} = U \times \mathbb{R}$ par une équation cartésienne en (X,Y,Z), puis montrer que $\mathscr{C}$ est un cylindre de révolution de $\mathbb{E}$ dont on précisera l'axe de révolution, les génératrices et les parallèles.

I.B -

I.B.1) On considère un axe $\delta = (d,\vec{w})$ défini par $m \in \mathbb{P}$ et $\vec{w} \in U$, en posant :

$$d = m + \mathbb{R}\,\vec{w}\,.$$

Montrer que lorsque p décrit la droite d, le réel $\det(p,\vec{w})$ reste constant ; on notera h_δ sa valeur.

Interpréter géométriquement ce réel h_δ à l'aide du projeté orthogonal m_0 de l'origine o sur d.

Montrer que $m_0 = -h_\delta r_{\pi/2}(\vec{w})$ où $r_{\pi/2}$ est la rotation vectorielle d'angle $+\pi/2$.

I.B.2) Soient $\vec{w} = \vec{u}(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$; considérant l'axe $\delta = (d,\vec{u}(\theta))$ avec :

$$d = -k\vec{v}(\theta) + \mathbb{R}\,\vec{u}(\theta)\,,$$

calculer h_δ et caractériser d par une équation cartésienne en (x,y).

I.B.3) Montrer que l'application $H : \delta = (d,\vec{w}) \mapsto (\vec{w},h_\delta)$ définit une bijection entre Δ et le cylindre $\mathscr{C}$.

Soit $M = (\vec{w},k) \in \mathscr{C}$; indiquer par un schéma la construction de $\delta = H^{-1}(M)$ à partir de $\vec{w}$ et k dans le cas $k > 0$.

À chaque axe δ de Δ est ainsi associé bijectivement un point de $\mathscr{C}$. Le cylindre $\mathscr{C}$, image de Δ par H, devient ainsi une représentation de l'ensemble des axes. On se propose dans le reste de cette partie de déchiffrer sur cette représentation quelques propriétés géométriques relatives aux axes du plan $\mathbb{P}$.

I.C - Chaque partie du cylindre $\mathscr{C}$ est l'image par la bijection H d'une partie de Δ. Caractériser précisément en termes géométriques les ensembles des axes du plan $\mathbb{P}$ correspondant respectivement :

- à une génératrice de $\mathscr{C}$;
- à l'ensemble $U \times \{0\}$;
- à un parallèle de $\mathscr{C}$.

I.D -

I.D.1) Soit, dans le plan $\mathbb{P}$, la rotation r de centre o et d'angle $\omega \in \mathbb{R}$ qui se confond avec la rotation vectorielle d'angle ω. Pour tout axe $\delta = (d,\vec{w})$, on considère alors l'axe $(r(d), r(\vec{w}))$, que l'on note $\bar{r}(\delta)$. On définit ainsi une application $\bar{r}$ de Δ dans Δ et il en résulte une application $\overline{R}$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui à $M = H(\delta)$ associe $\overline{R}(M) = H(\bar{r}(\delta))$.

Montrer que $h_{\bar{r}(\delta)} = h_\delta$.
En déduire que $\overline{R}$ correspond à la restriction à $\mathscr{C}$ d'un endomorphisme R de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$. On précisera cet endomorphisme et on en donnera la matrice dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

I.D.2) On condidère l'application de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ obtenue par restriction à $\mathscr{C}$ de la symétrie S de centre $O = (0, 0, 0)$ (confondue avec l'endomorphisme $\vec{U} \mapsto -\vec{U}$ de $\mathbb{E}$). Par l'intermédiaire de H^{-1}, il lui correspond une application σ de Δ dans Δ. Déterminer cette application ; provient-elle d'une isométrie de $\mathbb{P}$, comme c'était le cas pour l'application $\bar{r}$ de la question I.D.1 ?

I.E - Pour $\alpha > 0$, on considère le point $a = (\alpha,0)$ de $\mathbb{P}$ et on appelle *faisceau* des axes passant par a l'ensemble Δ_a des axes dont le support passe par a ; on veut déterminer l'ensemble $H(\Delta_a)$.

I.E.1) Caractériser par une relation entre k et θ les éléments $(\vec{u}(\theta), k)$ de $\mathscr{C}$ appartenant à $H(\Delta_a)$.

I.E.2) Montrer que $H(\Delta_a)$ est l'intersection de $\mathscr{C}$ et d'un plan vectoriel de E.

I.E.3) Établir que l'ensemble $H(\Delta_a)$ est une ellipse dont on précisera le centre, l'axe focal, le demi-grand axe, le demi-petit axe, la distance focale et l'excentricité.

I.E.4) Représenter sur un même schéma cette ellipse ainsi que l'intersection de $\mathscr{C}$ avec le plan XOY.

I.F -

I.F.1) Soit maintenant m un point quelconque de $\mathbb{P}$ et Δ_m le faisceau des axes passant par m ; déduire des questions précédentes la nature et la position de l'ensemble $H(\Delta_m)$.

I.F.2) Réciproquement, étant donné un plan vectoriel P de $\mathbb{E}$, préciser selon la direction de P la nature de l'ensemble $H^{-1}(P \cap \mathscr{C})$.

I.F.3) Soient δ_1, δ_2, δ_3 trois axes caractérisés respectivement par les relations $H(\delta_i) = (\vec{u}(\theta_i), k_i)$.

Démontrer que leurs supports sont tous concourants ou tous parallèles si et seulement si :

$$k_1 \sin(\theta_3 - \theta_2) + k_2 \sin(\theta_1 - \theta_3) + k_3 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \ .$$

I.G - On appelle *cycle* γ de $\mathbb{P}$ tout cercle de $\mathbb{P}$ orienté par une paramétrisation ; un axe δ est *tangent* à ce cycle si son support est tangent au cercle correspondant, avec des orientations de δ et γ concordantes.

I.G.1) Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; on considère le plan affine $Q = P + \lambda\vec{K}$ obtenu par translation du plan P, de vecteur $\lambda\vec{K}$.

Montrer que ce procédé fournit tous les plans affines de $\mathbb{E}$ à l'exception d'un ensemble de plans que l'on précisera.

I.G.2) On considère un tel plan affine $Q = P + \lambda\vec{K}$, non vectoriel c'est-à-dire ne contenant pas l'origine $O = (0, 0, 0)$.

Démontrer que $Q \cap \mathscr{C}$ est l'image par H de l'ensemble des axes tangents à un cycle que l'on précisera.

Si Q coupe la droite OZ en Ω, que représente la distance $O\Omega$?

Préciser la nature géométrique de l'ensemble $Q \cap \mathscr{C}$.

I.G.3) Montrer que réciproquement, tout cycle de $\mathbb{P}$ peut être associé à un plan affine de $\mathbb{E}$.

I.G.4) Soit (a, b, c) un triangle du plan $\mathbb{P}$; en orientant les droites (ab), (bc) et (ca) par les vecteurs $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{bc}$ et $\overrightarrow{ca}$, on obtient trois axes représentés par trois points du cylindre $\mathscr{C}$.

Montrer que ces trois points de $\mathscr{C}$ définissent un plan affine Q de $\mathbb{E}$, associé à un cycle γ de $\mathbb{P}$ comme en I.G.2 et I.G.3. Quelle est la particularité de ce cycle relativement au triangle (a, b, c) ?

Partie II - Transformations de l'ensemble des axes du plan

II.A - On considère dans cette question la translation t de $\mathbb{P}$, de vecteur $\vec{\tau} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ non nul. À tout axe $\delta = (d,\vec{w})$, on associe l'axe $\delta' = (t(d),\vec{w})$ que l'on note $\bar{t}(\delta)$. On définit ainsi une application $\bar{t}$ de Δ dans Δ dont on déduit une application $\bar{T}$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui à $M = H(\delta)$ associe $\bar{T}(M) = H(\bar{t}(\delta))$.

II.A.1) En reprenant les notations de la question I.B, exprimer $h_{\delta'}$ en fonction de h_δ, $\vec{w}$ et $\vec{\tau}$.

II.A.2) Montrer que $\bar{T}$ correspond à la restriction à $\mathscr{C}$ d'un endomorphisme T de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ dont on donnera la matrice dans la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$.

II.A.3) Montrer que l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ invariants par T est un plan vectoriel P que l'on précisera. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

II.A.4) Déterminer l'ensemble $H^{-1}(P \cap \mathscr{C})$ et indiquer ce qu'il représente vis-à-vis de la translation t.

II.B - Soit φ un automorphisme orthogonal de $\mathbb{P}$. À tout $\delta = (d,\vec{w})$, on associe $\bar{\varphi}(\delta) = (\varphi(d),\varphi(\vec{w}))$, ce qui définit une application $\bar{\varphi}$ de Δ dans Δ, puis l'application $\bar{\Phi}$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui à $M = H(\delta)$ associe $\bar{\Phi}(M) = H(\bar{\varphi}(\delta))$.

II.B.1) Montrer que $\bar{\Phi}$ correspond à la restriction à $\mathscr{C}$ d'un endomorphisme Φ dont on exprimera la matrice dans la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ à l'aide de la matrice N de φ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

II.B.2) Soit maintenant φ une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle d_0 de $\mathbb{P}$. L'endomorphisme Φ de $\mathbb{E}$ est-il diagonalisable ?

Caractériser Φ en termes géométriques. Pour chaque sous-espace propre $\mathbb{E}_i$ de Φ, interpréter $H^{-1}(\mathbb{E}_i \cap \mathscr{C})$ vis-à-vis de la symétrie φ.

II.C - On rappelle que toute isométrie f de $\mathbb{P}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = t \circ \varphi$ où t et φ sont respectivement une translation et un automorphisme orthogonal de $\mathbb{P}$; avec les notations des questions II.A et II.B, on pose alors : $\bar{f} = \bar{t} \circ \bar{\varphi}$, $\bar{F} = \bar{T} \circ \bar{\Phi}$ et $F = T \circ \Phi$.

II.C.1) Montrer que l'endomorphisme F ainsi obtenu a dans la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} & N & & 0 \\ & & & 0 \\ \lambda & \mu & \det & N \end{bmatrix},$$

où N désigne une matrice réelle orthogonale d'ordre 2 et (λ,μ) un couple de réels.

Exprimer le vecteur $\lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$ à l'aide de α, β, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et φ.

II.C.2) À quelle condition, portant sur N, λ et μ, F est-il diagonalisable ?

Déterminer les isométries f correspondantes.

II.D - On veut maintenant étudier si d'autres endomorphismes F de $\mathbb{E}$ pourraient correspondre, par restriction à $\mathscr{C}$ et par l'intermédiaire de H^{-1}, à d'autres transformations de $\mathbb{P}$.

II.D.1) Démontrer que toute homothétie de $\mathbb{P}$, de centre o et de rapport $k > 0$ correspond bien par les procédés utilisés précédemment à un endomorphisme de $\mathbb{E}$ dont on donnera la matrice.

II.D.2) Soit F un automorphisme de $\mathbb{E}$ tel que $F(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$.

Montrer que les projections orthogonales de $F(\vec{I})$ et $F(\vec{J})$ sur le plan XOY sont orthonormées.

En déduire que F a dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} & & 0 \\ & N & 0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{bmatrix},$$

où N désigne une matrice réelle orthogonale d'ordre 2 et (λ, μ, ν) un triplet de réels.

II.D.3) Établir que les endomorphismes F de $\mathbb{E}$, tels que $F(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$ et de déterminant strictement positif, correspondent aux similitudes de $\mathbb{P}$.

II.D.4) Que faut-il penser de ce point de vue des endomorphismes de $\mathbb{E}$ tels que $F(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$ et de déterminant strictement négatif ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations et objectifs du problème

- On rappelle qu'une ellipse d'un plan affine euclidien, de demi-axes a et b $(a > b > 0)$, notée $(E_{a,b})$ admet, dans un certain repère orthonormé, une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (1)$$

(t décrit un segment de longueur 2π).

- $\mathscr{C}_{2\pi}$ désigne le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On munit cet espace du produit scalaire défini par :

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)dt\,.$$

- Pour $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathscr{C}_{2\pi}$ on rappelle les expressions des coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques de f, utiles dans le problème :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-kit}dt\,,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\,.$$

- **Dans tout le problème** r désignera un nombre réel **appartenant à l'intervalle ouvert** $]0,1[$ et f_r l'élément de $\mathscr{C}_{2\pi}$ défini par : $t\mapsto\left|1-re^{it}\right|$

On désignera aussi par $\mathscr{S}_r$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0$$

et $\mathscr{B}_r$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}_r$ constitué des suites (a_n) telles que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$ soit au moins égal à 1.

- Dans tout le problème $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ sera la suite réelle définie par :

$$\alpha_n = \frac{-\binom{2n}{n}}{4^n(2n-1)} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}\,.$$

(Les candidats qui le préfèrent pourront aussi noter C_{2n}^n le coefficient binomial).

- La partie entière du réel x est notée $[x]$.

Filière MP

- L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation $\sqrt{z}$ ne sera prise en considération que lorsque z est un nombre réel positif.
- L'objectif du problème est l'étude de quelques problèmes asymptotiques relatifs à la longueur, notée $L(a,b)$, de l'ellipse $(E_{a,b})$.

Partie I - Préliminaires

I.A - Préciser sur un dessin la signification géométrique du paramètre t intervenant dans le paramétrage (1).

I.B - Prouver rapidement que $\mathscr{S}_r$ et $\mathscr{B}_r$ sont des $\boldsymbol{R}$- espaces vectoriels et préciser la dimension de $\mathscr{S}_r$.

I.C - Donner **sans démonstration** l'énoncé précis du théorème de Parseval relatif à un élément $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ (les coefficients de Fourier intervenant dans la formule seront les coefficients exponentiels).

Si f et g sont deux éléments de $\mathscr{C}_{2\pi}$, prouver, en justifiant d'abord la convergence absolue de la série, la formule :

$$(f|g) = \overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)).$$

I.D - Soit n un entier naturel. Exprimer $a_n(f_r)$ à l'aide de $c_n(f_r)$.

I.E - Soient a et b deux réels vérifiant $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}$.

Exprimer, en fonction de a, b et de constantes, le réel $\dfrac{L(a,b)}{a_0(f_r)}$.

Partie II - .Comportement asymptotique de la suite $(a_n(f_r))$

II.A - Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\alpha_n z^n$. On notera $f(z)$ sa somme dans le disque ouvert complexe de centre 0 et de rayon R.

II.B - Soit x un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]-R,R[$. Donner une relation entre $(1-x)f'(x)$ et $f(x)$. En déduire une expression simple de la restriction de f à l'intervalle ouvert $]-R,R[$.

II.C - On choisit maintenant un complexe z tel que $|z| < R$. Déterminer une expression très simple de $f(z)^2$.

II.D - Prouver, pour $r \in]0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, la relation : $\left|f(re^{it})\right|^2 = f_r(t)$.

II.E - Soit n un entier naturel. En utilisant la question I.C et la précédente, prouver l'égalité :

$$\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{+\infty} \alpha_{[x]} \frac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} r^{2[x]} dx .$$

En déduire la limite de cette suite quand l'entier n tend vers l'infini.

II.F - Prouver que, quand $n \to \infty$:

$$a_n(f_r) \sim \frac{\sqrt{1-r^2}\, r^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}} .$$

En quoi ce résultat corrobore-t-il votre cours sur les séries de Fourier ?

Partie III - Approximation de $L(a, b)$

III.A - Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_r. En déduire que la suite $(a_n(f_r))$ appartient à $\mathscr{B}_r$.

III.B - Pour tout réel $r \in]0,1[$, on définit deux suites $(A_n(r))_{n \geq 0}$ et $(B_n(r))_{n \geq 0}$ par :

$$A_0(r) = 1 , B_0(r) = 0 , A_1(r) = -\frac{2}{r}(1+r^2) , B_1(r) = 1$$

et les relations de récurrence, valables pour $n \geq 2$:

$$A_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} A_{n-1}(r) - \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right) A_{n-2}(r)$$

$$B_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} B_{n-1}(r) - \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right) B_{n-2}(r)$$

on définit également, pour $n \geq 1$, la matrice $M_n(r)$ par :

$$M_n(r) = \begin{pmatrix} A_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3} A_{n-1}(r) \\ B_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3} B_{n-1}(r) \end{pmatrix} .$$

Pour alléger la rédaction, les candidats pourront remplacer, chaque fois que cela leur paraîtra utile, les expressions $A_n(r)$, $B_n(r)$, $M_n(r)$, par A_n, B_n, M_n .

Pour $n \geq 1$, déterminer une matrice T_n, dont les coefficients dépendent de n et r, telle que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ appartenant à $\mathscr{S}_r$ on ait :

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Écrire, dans le langage de calcul formel de votre choix, des fonctions prenant en argument l'entier n et retournant a_n, A_n, B_n ; a_0, a_1 et r seront considérés comme des variables globales. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $M_n = M_{n-1} T_n$.

En déduire le produit matriciel $M_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ indépendamment de n

III.C - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'existent une suite (ε_n) tendant vers 0, un réel l, un réel $k \in]0, 1[$ et un entier N vérifiant :

$$\forall n > N, |u_n - l| \leq k|u_{n-1} - l| + \varepsilon_n$$

Montrer que $\lim_{n \to \infty} u_n = l$.

III.D - Prouver que :

$$\lim_{n \to \infty} A_n a_n(f_r) = \frac{a_0(f_r)}{1 - r^2}$$

Que dire de la suite de terme général $B_n a_n(f_r)$ lorsque n tend vers l'infini ?

III.E - Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}$.
À l'aide des questions II.E et III.D, démontrer que la suite (l_n) définie par :

$$\begin{cases} l_0 = (a+b)\pi(1-r^2)^{3/2} \\ l_1 = l_0(1+r^2) \\ l_n = (1+r^2)l_{n-1} - \dfrac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)} l_{n-2} \end{cases}$$

converge vers $L(a, b)$.

Partie IV - Étude de $\mathscr{S}_r$ et de $\mathscr{B}_r$

IV.A - Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathscr{S}_r$. Prouver l'égalité :

$$a_1 A_n - a_0 B_n = a_{n+1} \det M_n$$

IV.B - Calculer $\det T_n$ puis $\det M_n$. Donner un équivalent de $\det M_n$.

IV.C - Préciser la dimension et une base de $\mathscr{B}_r$. Soit (a_n) un élément de $\mathscr{S}_r$ qui n'appartient pas à $\mathscr{B}_r$. Déterminer un équivalent simple de a_n lorsque $n \to \infty$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et, de manière usuelle, tout polynôme est identifié à sa fonction polynôme associée.

Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour un P de $\mathbb{R}[X]$, on considère, de manière usuelle, les dérivées successives de P : $P^{(0)} = P$, et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = [P^{(n)}]'$.

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, un entier naturel n et un réel a, on définit le polynôme de Taylor d'ordre n de P en a par :

$$T_{n,a}(P)(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i .$$

Soit une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et de classe C^n. On rappelle qu'elle admet, en tout point a de cet intervalle, un unique développement limité à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + o[(x-a)^n] .$$

La fonction polynôme

$$\left[x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \right]$$

est appelée partie régulière de ce développement limité.

Dans la troisième partie, on note $\mathscr{E}_2$ le plan affine euclidien usuel muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et dans la dernière partie, on note $\mathscr{E}_3$ l'espace affine euclidien usuel de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, encore noté $\mathscr{R}_0$, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les éléments de $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ seront indifféremment appelés vecteurs ou points selon l'interprétation que l'on en a.

Filière MP

Si M est barycentre du système pondéré $(A_i,\alpha_i)_{1 \le i \le n}$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ non nul, on a :

$$M = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i\right).$$

Chaque point M de $\mathscr{E}_2$ (ou de $\mathscr{E}_3$) est identifié à la famille de ses coordonnées (x,y) (ou (x, y, z)) dans le repère $\mathscr{R}_0$, ce qui est contenu dans la notation $M(x, y)$ (ou $M(x, y, z)$). De même chaque vecteur $\vec{u}$ est identifié à la famille de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}_0$ du repère $\mathscr{R}_0$.

Dans la première partie, on étudie une famille de polynômes.

Ces polynômes interviennent ensuite dans les trois parties qui suivent dans trois situations différentes.

Si la troisième partie utilise un résultat de la deuxième, pour le reste les trois dernières parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie I - Une fonction polynomiale

Un calcul simple qui n'est pas demandé ici (intégrations par parties successives par exemple) donne pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$I_m = \int_0^1 t^m (1-t)^m dt = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Pour tout m entier naturel *non nul*, on considère la fonction polynomiale L_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_m(x) = \frac{1}{I_m}\int_0^x t^m (1-t)^m dt.$$

I.A -

I.A.1) Donner une expression développée de $L_m(x)$ pour $m = 1$ et pour $m = 2$.

I.A.2) Calculer $L_m(x) + L_m(1-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Préciser $L_m(\frac{1}{2})$.

On vérifie que L_m est à coefficients entiers. Nous l'admettrons.

I.B -

I.B.1) Étudier suivant m l'existence ainsi que l'ordre de multiplicité des éventuelles racines de L_m et de L'_m dans l'intervalle $[0,1]$.

I.B.2) En considérant le signe de $L''_m(x)$, étudier la monotonie de l'application

$$\left[x \mapsto \frac{L_m(x)}{x}\right] \text{ sur l'intervalle }]0, \frac{1}{2}[.$$

I.B.3) Donner une allure de la courbe représentative de L_m sur $[0,1]$. On précisera les points à tangente horizontale, on montrera l'existence d'un centre de symétrie et on précisera la convexité.

I.C - Les résultats de cette question seront utilisés dans la dernière partie.

I.C.1) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x,y) \in [0,1]^2 \\ L'_m(x) = L'_m(y) \end{cases}$$

I.C.2) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \in [0,1]^3 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ L'_m(\alpha) = L'_m(\beta) = L'_m(\gamma) \end{cases}$$

I.C.3) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in [0,1]^4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ L'_m(\alpha_1) = L'_m(\alpha_2) = L'_m(\alpha_3) = L'_m(\alpha_4) \end{cases}$$

Partie II - Les polynômes de Taylor

Dans cette partie, m est un entier naturel non nul et n est un entier tel que $n > 3m$.

II.A -

On rappelle et on admet que, pour tout a de $\mathbb{R}$, la famille $((X-a)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Vérifier que l'application $[P \mapsto T_{n,a}(P)]$ définit un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

Préciser son image, vérifier que son noyau est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ et en donner un générateur.

II.B - Pour (R,S) de $(\mathbb{R}_m[X])^2$, déterminer les polynômes de Taylor d'ordre m en 0 et en 1 du polynôme :

$$U(X) = R(X)L_m(1-X) + S(X)L_m(X).$$

II.C - Pour P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note respectivement P_0 et P_1 ses polynômes de Taylor d'ordre m en 0 et en 1 et on pose :

$$[\Phi(P)](X) = P_0(X)L_m(1-X) + P_1(X)L_m(X).$$

II.C.1) Montrer que l'application $[P \mapsto \Phi(P)]$ est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.C.2) Préciser les dimensions des sous-espaces propres de cette application et donner pour chacun une base.

Partie III - Un raccord

III.A -

III.A.1)

À l'aide de la première partie, déterminer un polynôme Q_1 tel que :

$$\deg(Q_1) \leq 3,\ Q_1(-1) = 0,\ Q_1(1) = 1, \text{ et } Q_1'(-1) = Q_1'(1) = 0.$$

Existe-t-il d'autres polynômes remplissant ces cinq conditions ?

III.A.2) Déterminer de même, sans en donner la forme développée, un polynôme Q_2 tel que :

$$\begin{cases} \deg(Q_2) \leq 5 \\ Q_2(-1) = 0, Q_2(1) = 1 \\ Q'_2(-1) = Q'_2(1) = Q''_2(-1) = Q''_2(1) = 0 \end{cases}$$

III.B - Soient $g_1 : t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ de classe C^1 sur $]-\infty, -1]$, paramétrage d'un arc γ_1 et $g_2 : t \mapsto (x_2(t), y_2(t))$ de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, paramétrage d'un arc γ_2.

Si h_1 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de x_1 en -1 et h_2 la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de x_2 en 1, on pose :

$$x_3(t) = Q_1(-t)h_1(t) + Q_1(t)h_2(t).$$

De même, si k_1 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de y_1 en -1 et si k_2 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de y_2 en 1, on pose :

$$y_3(t) = Q_1(-t)k_1(t) + Q_1(t)k_2(t).$$

On obtient ainsi une fonction vectorielle $g_3 = (x_3, y_3)$ et on considère γ, raccord de γ_1 et γ_2, l'arc paramétré par g avec :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si } t \in]-\infty, -1[\\ g_3(t) & \text{si } t \in [-1, 1] \\ g_2(t) & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Montrer brièvement en s'appuyant sur une étude faite dans la deuxième partie que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.C - Étude d'un exemple

Ici a est un réel strictement positif et on prend :

$$\begin{cases} g_1(t) = (-1 + a(t+1), 1 - a(t+1)) \\ g_2(t) = (1 + a(t-1), 1 + a(t-1)) \end{cases}$$

III.C.1) Représenter sur un même dessin les arcs γ_1 et γ_2.

III.C.2) Donner l'expression développée de la fonction g_3 (on ne demande pas sa représentation graphique).

III.C.3) Montrer que pour $a > 3$, le raccord coupe l'axe des ordonnées en deux points distincts que l'on précisera.

Partie IV - Une animation

On note $I = \{1, 2, 3, 4\}$.

On considère un ensemble de quatre points $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de $\mathscr{E}_3$ non coplanaires, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plan affine qui les contienne tous les quatre. On a ainsi un tétraèdre non aplati $A_1A_2A_3A_4$.

On note (x_i, y_i, z_i) le triplet des coordonnées du point A_i pour $i \in I$.

IV.A -

IV.A.1) Soit i dans I. Justifier l'existence d'un (u_i, v_i, w_i, h_i) de $\mathbb{R}^4$ avec $(u_i, v_i, w_i) \neq (0, 0, 0)$ tel que si l'on pose pour $M(x, y, z)$ de $\mathscr{E}_3$,

$g_i(M) = u_i x + v_i y + w_i z + h_i$, on ait : $\forall j \in I$, $g_i(A_j) = \delta_{i,j}$.

(où de manière usuelle, $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et vaut 0 sinon).

On admet l'unicité du quadruplet (u_i, v_i, w_i, h_i) pour tout i dans I.

IV.A.2) Pour i dans I on considère φ_i la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi_i(x, y, z) = u_i x + v_i y + w_i z$.

Quel est le rang de la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq 4}$?

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout i dans I et tout $M(x, y, z)$ de $\mathscr{E}_3$, on pose : $G_i(M) = L_m(g_i(M))$.

On considère alors :

$g = \sum_{i=1}^{4} g_i$ et $G = \sum_{i=1}^{4} G_i$.

On appelle Ω l'isobarycentre de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

On note $\Delta = \{M(x, y, z) \in \mathscr{E}_3 \,|\, \forall i \in I, 0 \leq g_i(M) \leq 1\}$

IV.B -

IV.B.1) Préciser $g(A_i)$ pour i dans I et en déduire g.

IV.B.2) Vérifier que tout point M de $\mathscr{E}_3$ est le barycentre du système pondéré $(A_i, g_i(M))_{1 \leq i \leq 4}$.

IV.B.3) Déterminer α de $\mathbb{R}$ tel que pour tout point M de toute arête $[A_i, A_j]$ avec $(i,j) \in I^2$, $i \neq j$ on ait $G(M) = \alpha$.

IV.C -

IV.C.1) Montrer que Δ est un compact de $\mathscr{E}_3$.

IV.C.2) Montrer que sur chaque face du tétraèdre, G admet un maximum et un minimum. On précisera la valeur de ces extremums, ainsi que les points où ils sont atteints.

On pourra partir du fait que le compact triangulaire limité par trois points non alignés d'un plan est l'ensemble des barycentres à poids positifs des sommets du triangle et que l'on peut toujours supposer que la somme des poids est égal à 1.

IV.C.3) Calculer $G(\Omega)$ et déterminer la différentielle de G en Ω.

IV.C.4) Déterminer les points M de Δ en lesquels la différentielle de G est nulle.

On pourra montrer que la nullité de la différentielle de G en un point M *implique une relation linéaire portant sur les* φ_i *et on utilisera dans ce cas le résultat de IV.A.2.*

IV.C.5) Montrer que la fonction G admet sur Δ un maximum et un minimum et déterminer ces extremums $G_{\min}$ et $G_{\max}$ de G sur Δ ainsi que les points où ils sont atteints.

IV.D - On prend $A_1(1, -1, -1)$, $A_2(-1, 1, -1)$, $A_3(-1, -1, 1)$ et $A_4(1, 1, 1)$.

Pour $m = 1$, on obtient, après un calcul qui n'est pas demandé :

$$G(x, y, z) = \frac{1}{8}[3(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz) + 5].$$

On appelle Σ la surface d'équation $G(x, y, z) = 1$.

On considère $\bar{B}(O, \sqrt{3})$ la boule fermée de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ et l'on note $S(O, \sqrt{3})$ sa frontière, la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

On admet que pour tout point $M(x, y, z)$ de $S(O, \sqrt{3})$, on a $|xyz| \leq 1$. (Ceci peut se démontrer en utilisant les coordonnées sphériques de M).

IV.D.1) Déterminer les points non réguliers de Σ.

IV.D.2) Montrer que pour tout $P(a, b, c)$ de $S(O, \sqrt{3})$, il existe un et un seul point du segment $[OP]$ qui appartienne à Σ.

On pourra étudier la fonction $h(t) = G(ta, tb, tc)$ *sur* $[0,1]$.

IV.D.3) Qu'en déduit-on pour l'intersection Σ' de Σ avec $\bar{B}(O, \sqrt{3})$? On précisera les points de contact de cette intersection avec le tétraèdre ainsi qu'avec la sphère $S(O, \sqrt{3})$.

IV.D.4) Préciser les sections de Σ et de $\bar{B}(O, \sqrt{3})$ par le plan médiateur de $[A_3, A_4]$, d'équation $x + y = 0$. Les représenter sur une même figure.

IV.D.5) Décrire l'animation que donne la vue des surfaces de niveau :

$S_\alpha = \{(M \in \Delta) / G(M) = \alpha\}$ lorsque α varie de $G_{\min}$ à $G_{\max}$.

On précisera la position de ces surfaces par rapport au tétraèdre.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations et définitions

$\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

On note $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et L^1 l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$ intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in L^1$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$.

On note B l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$ bornées sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in B$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^+} |f|$.

Si $\alpha \in [1,+\infty[$, on convient que $0^\alpha = 0$; ainsi $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^\alpha$ est continue.

On pose, lorsque cela a un sens, $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Si $\alpha \in [1,+\infty[$ et h est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, on note $E_{\alpha,h}$ l'équation différentielle linéaire :

$$(E_{\alpha,h}) \ : \ y'' - \frac{1}{1+t^\alpha}\,y' + y = h$$

Par définition, une solution de $(E_{\alpha,h})$ est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de la variable t de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E_{\alpha,h})$.

Pour une équation différentielle linéaire du second ordre (E), de second membre h, on définit les propriétés de stabilité suivantes :

- on dira que (E) est **stable par rapport aux conditions initiales** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si f est une solution de (E) vérifiant $\|\big(f(0),f'(0)\big)\| \leqslant \eta$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens 1** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in L^1$ est tel que $\|h\|_1 \leqslant \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $\big(f(0),f'(0)\big) = (0,0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens ∞** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in B$ est tel que $\|h\|_\infty \leqslant \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $\big(f(0),f'(0)\big) = (0,0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Filière PSI

De plus, dans le cas de l'équation $(E_{\alpha,0})$:

- on dira que $(E_{\alpha,0})$ est **stable par rapport au paramètre** si et seulement si pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
  si $\beta \in [1,+\infty[$ vérifie $|\alpha - \beta| \leqslant \eta$, f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et g est solution de $(E_{\beta,0})$ avec $\big(f(0),f'(0)\big) = (g(0),g'(0)) = (a,b)$, alors $f-g \in B$ et $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Objectifs et dépendance des parties

L'objectif du problème est d'étudier le comportement des solutions de $(E_{\alpha,0})$ vers $+\infty$, ainsi que les différentes notions de stabilité.

La partie **I** étudie le cas de l'équation « limite à l'infini » $y''+y=h$.

La partie **II**, indépendante de **I**, étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

La partie **III**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha > 1$, utilise des résultats de **II.A**, **II.C** et **I.5**.

La partie **IV**, qui étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{1,0})$, utilise **II.B**.

La partie **V**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha = 1$, utilise les parties **IV** et **II**.

Partie I - Étude de l'équation $y''+y=h$

Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\big)$, on note (F_h) l'équation différentielle $y''+y=h$. Par définition, une solution de (F_h) est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (F_h).

I.A -

I.A.1) Donner l'ensemble des solutions de (F_0).

I.A.2) Dans cette question uniquement, on prend pour $h : x \mapsto \cos(x)$.

Donner l'ensemble des solutions de (F_h) dans ce cas.

I.A.3) Dans cette question uniquement, on prend pour h la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}^+$, définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Démontrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer l'ensemble des solutions de (F_h).

I.B - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et f est la solution de (F_0) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (a,b)$, montrer que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \|(a,b)\|$.

I.C - Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, montrer que $f_0 : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left(\displaystyle\int_0^t h(u)\sin(t-u)\,\mathrm{d}u\right)$ est solution de (F_h), et en déduire l'ensemble des solutions de (F_h).

I.D - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

On donne $h \in L^1$.
Déterminer la solution f de (F_h) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$, montrer que $f \in B$, et $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|h\|_1$.
En déduire que (F_h) est stable par rapport au second membre au sens 1.

I.E - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.
Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \delta\cos(t)$, et montrer que ses solutions sont non bornées, et plus précisement, ne sont pas en $o(t)$ quand $t \to +\infty$.

En déduire la non stabilité de (F_0) par rapport au second membre au sens ∞.

Partie II - Comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$

II.A - Démontrer l'existence de $I(\alpha)$, pour $\alpha > 1$, et sa continuité par rapport à α.

II.B - Relèvement angulaire

On donne $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$.

II.B.1) Justifier l'existence d'une primitive A de $\dfrac{g'}{g}$, et montrer que $g\mathrm{e}^{-A}$ est constante.

II.B.2) En écrivant la fonction A sous la forme $A = B + \mathrm{i}C$, où B et C sont des fonctions à valeurs réelles, justifier qu'existent $r \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^k\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ tels que $g = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

II.C - Comportement à l'infini pour $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$ et f une solution non nulle de $(E_{\alpha,0})$. On note $q : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$.

II.C.1) En appliquant II.B, montrer qu'existent $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$

telles que $f = r\cos(\theta)$ et $f' = r\sin(\theta)$.
Exprimer r en fonction de f et f'.

Les fonctions r et θ sont fixées ainsi pour la suite de la partie.

II.C.2) Démontrer que $\theta' = -1 + q\sin(\theta)\cos(\theta)$. (1)

II.C.3) Démontrer que $r' = qr\sin^2(\theta)$. (2)

II.C.4) Démontrer que r a une limite strictement positive en $+\infty$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty} r \leqslant r(0)\exp(I(\alpha))$.
Démontrer que f et f' sont bornées par $\|\big(f(0), f'(0)\big)\|\exp(I(\alpha))$.

II.C.5) Démontrer que $\theta(t) + t$ tend vers une limite réelle quand $t \to +\infty$.

II.C.6) Démontrer qu'existent $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) - a\cos(t+b) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

II.C.7) Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie III - Étude de la stabilité pour $\alpha > 1$

Dans toute la partie, $\alpha > 1$, *et* (f_1, f_2) *est un système fondamental de solutions de* $(E_{\alpha,0})$.
$w = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ *est le wronskien associé.*
On pensera à utiliser les résultats de **II**.

III.A - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport aux conditions initiales.

III.B - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

III.B.1) Déterminer une équation différentielle vérifiée par w, et montrer qu'existent a, b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < a \leqslant |w(x)| \leqslant b$.

III.B.2) Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, montrer que les solutions de $(E_{\alpha,h})$ sont les fonctions du type $f = -C_1 f_1 + C_2 f_2$, où C_1 est une primitive de $\dfrac{hf_2}{w}$ et C_2 une primitive de $\dfrac{hf_1}{w}$.

III.B.3) Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes requises sur C_1 et C_2 dans la question précédente pour avoir $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$?

III.B.4) Démontrer l'existence de $C \in \mathbb{R}^+$ telle que : pour tout $h \in L^1$, la solution f de $(E_{\alpha,h})$ vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$ est dans B, et $\|f\|_\infty \leqslant C\|h\|_1$. En déduire que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au second membre au sens 1.

III.C - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit g une solution de $y'' + y = \lambda\cos(t)$.
Soit f la solution sur $\mathbb{R}^+$ de $y'' - \dfrac{1}{1+t^\alpha}y' + y = \lambda\cos(t)$ telle que $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$. On pose $\Phi = f - g$.

III.C.1) Démontrer que Φ est solution de $(E_{\alpha,h})$, pour une fonction $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ vérifiant $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

III.C.2) Démontrer que $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ implique que $\displaystyle\int_0^t |h| \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$.

III.C.3) Utilisant la résolution de $(E_{\alpha,h})$ vue en III.B, montrer que $\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$.

III.C.4) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ n'est pas stable par rapport au second membre au sens ∞.

III.D - Stabilité par rapport au paramètre

On fixe pour la suite de la question $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $\beta \in]1, +\infty[$.
Soit f la solution de $(E_{\alpha,0})$ vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (a,b)$, g la solution de $(E_{\beta,0})$ vérifiant $(g(0), g'(0)) = (a,b)$.
On pose $\Phi = f - g$.

Si $\lambda > 1$, on pose $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\lambda}\,\mathrm{d}t$ et $K(\lambda) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\lambda}\,\mathrm{d}t$.

Comme pour I, les fonctions J et K sont bien définies et continues sur $]1, +\infty[$ (on ne demande pas de le montrer).

III.D.1) Démontrer que Φ est une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,h})$ avec

$$h : t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha}\right) g'(t)$$

III.D.2) Démontrer que $h \in L^1$ et

$$\|h\|_1 \leqslant \|(a,b)\| \ \mathrm{e}^{I(\beta)} \Big(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \Big).$$

III.D.3) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV - Étude du comportement vers $+\infty$ pour $\alpha = 1$

f est une solution non nulle de $(E_{1,0})$.

On pose $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t+1}}$.

IV.A - Établir que pour tout $t \geqslant 0$, $g''(t) + \left(1 - \dfrac{3}{4(t+1)^2}\right) g(t) = 0$.

IV.B - Démontrer qu'existent $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ telles que $g = \rho\cos(\beta)$ et $g' = \rho\sin(\beta)$.

IV.C - Déterminer une équation différentielle vérifiée par β et montrer que $\beta(x) + x$ tend vers une limite réelle lorsque $x \to +\infty$.

IV.D - Déterminer une équation différentielle vérifiée par ρ, et démontrer que ρ tend vers une limite réelle $a > 0$ en $+\infty$.

IV.E - Démontrer qu'il existe un réel b tel que $f(t) - a\sqrt{t}\cos(t+b) \underset{t\to+\infty}{=} o(\sqrt{t})$, où a est le réel défini ci-dessus.

IV.F - Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie V - Étude de la stabilité pour $\alpha = 1$

V.A - Démontrer que $(E_{1,0})$ n'est pas stable par rapport aux conditions initiales et au paramètre.

V.B - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f_\lambda : x \mapsto \lambda x \sin(x)$, calculer $f_\lambda''(x) - \dfrac{1}{1+x} f_\lambda'(x) + f_\lambda(x)$.

Qu'en déduire concernant la stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens ∞ ?

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES II

Notations. Dans tout le problème, on ne considère que des matrices carrées réelles. On désigne par **E** l'espace vectoriel réel des matrices carrées (réelles) d'ordre 2, c'est-à-dire à 2 lignes et 2 colonnes. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$, on rappelle la définition de sa *trace* $\mathrm{Tr}(M) = a + d$ et de son *polynôme caractéristique*

$$\chi_M \ : \ x \in \mathbb{R} \longmapsto \det(x\mathbb{I}_2 - M),$$

où $\mathbb{I}_2$ désigne la matrice identité et det le déterminant d'ordre 2.
En outre, on identifie les espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^2$ et $\mathfrak{M}_{2,\,1}(\mathbb{R})$ et on munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.
On pose donc, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

On rappelle enfin qu'une matrice carrée réelle A d'ordre 2 est *orthogonale* si, et seulement si, ${}^tA\,A = \mathbb{I}_2$. L'ensemble des matrices orthogonales réelles d'ordre 2 est noté O_2.

On désigne par S_2 l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

Partie I - Généralités

I.A -

I.A.1) Démontrer que si deux matrices de **E** sont semblables, elles ont même trace et même polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.

I.A.2) Démontrer que $\Phi : (M_1,\, M_2) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tM_1\, M_2)$ définit un produit scalaire sur **E**. Pour la suite du problème, **E** pourra être muni de la norme associée à ce produit scalaire.

I.A.3) Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathbf{E}$, on a $|\det(M)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}({}^tMM)$. Quand y a-t-il égalité ?

Filière PSI

I.A.4) Pour $M \in \mathbf{E}$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\chi_M(x)$ en fonction de x, $\mathrm{Tr}(M)$ et $\det(M)$. En conclure que 1 est une valeur propre de M si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(M) = 1 + \det(M)$.

I.B - La décomposition UDV

On donne dans cette question $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ élément de $\mathbf{E}$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

I.B.1) Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\varphi(\theta) = \mathrm{Tr}(MP(\theta))$.

Démontrer que φ est une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ en lequel φ atteint son maximum. En choisissant alors un tel θ_1 et en considérant $\varphi'(\theta_1)$, démontrer que $MP(\theta_1)$ est une matrice symétrique.

I.B.2) En déduire que $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où D est une matrice diagonale de $\mathbf{E}$.

Remarque : *on a établi que toute matrice $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $M = UDV$, où D est diagonale et U, V orthogonales.*

I.B.3) **Exemple :** décomposer la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

I.C - Soit $A \in \mathbf{E}$, U et V des matrices orthogonales d'ordre 2 et $B = UAV$. Démontrer que ${}^tA\,A$ et ${}^tB\,B$ sont semblables.

On ne demande pas de démontrer le résultat suivant, qui est admis : toute matrice $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$ vérifie en outre $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \geqslant 0$.

Partie II - Les ensembles $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$

On désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{E}$ telles que $\|MX\| \leqslant \|X\|$ pour tout vecteur-colonne $X \in \mathbb{R}^2$.

II.A - Reformuler la définition de $\mathscr{R}$ en utilisant la notion de *norme subordonnée*.

II.B -

II.B.1) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{R}$, démontrer que (a, b, c, d) appartient $[-1, 1]^4$.

Démontrer que $\mathscr{R}$ est un compact de $\mathbf{E}$.

Si $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}^2$, on définit le segment $[M_1M_2]$ *comme l'ensemble des matrices de la forme $(1-t)M_1 + tM_2$, où t décrit* $[0, 1]$.

II.B.2) Démontrer que $\mathscr{R}$ est aussi un *convexe* de $\mathbf{E}$, c'est-à-dire que, si M_1 et M_2 sont deux matrices de $\mathscr{R}$, le segment $[M_1M_2]$ est inclus dans $\mathscr{R}$.

II.C -

II.C.1) Démontrer que $M \in \mathscr{R} \iff \forall\, X \in \mathbb{R}^2, \quad {}^tX\, {}^tM\, MX \leqslant {}^tX\, X$.

II.C.2)

a) Si $M \in \mathbf{E}$, justifier le fait que le polynôme caractéristique de ${}^tM\, M$ est de la forme $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, avec λ_1 et λ_2 réels.
Démontrer ensuite que ces réels sont positifs ou nuls.

On pourra considérer des expressions de la forme ${}^tX\, {}^tM\, MX$.

b) Démontrer que $M \in \mathscr{R}$ si, et seulement si, les valeurs propres de ${}^tM\, M$ appartiennent à $[0, 1]$.

II.D - Déduire en particulier de **II.C.2.a** que

$$M \in \mathscr{R} \iff \begin{cases} \mathrm{Tr}({}^tM\, M) & \leqslant & 1 + (\det(M))^2 \\ \mathrm{Tr}({}^tM\, M) & \leqslant & 2 \end{cases}$$

II.E - On définit $\mathscr{S}$ comme :

$$\mathscr{S} = \left\{ M \in \mathscr{R} \;\middle|\; \exists\, X_0 \in \mathbb{R}^2,\ X_0 \neq 0,\ ||MX_0|| = ||X_0|| \right\}.$$

II.E.1) En reprenant les calculs de **II.C.2.a**, démontrer que M appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si, le polynôme caractéristique de ${}^tM\,M$ est de la forme $(x-\lambda)(x-1)$, où $\lambda \in [0,1]$.

II.E.2) Si $M \in \mathbf{E}$, on l'écrit sous la forme $M = P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \geqslant 0$.

a) Déterminer les valeurs propres de ${}^tM\,M$ en fonction de α et β.

b) Démontrer que $M \in \mathscr{S}$ si, et seulement si, il existe U et V, matrices orthogonales d'ordre 2 et $\gamma \in [-1,1]$ tels que $M = U \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V$.

II.E.3) En déduire que, si M est une matrice *non orthogonale* de $\mathscr{S}$, il existe des matrices orthogonales W et W' d'ordre 2 telles que M appartienne au segment $[WW']$.

On pourra montrer d'abord que si M est de la forme $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\gamma \in]-1,1[$, on peut choisir W et W' orthogonales et diagonales telles que M appartienne au segment $[WW']$.

II.F - On désigne par $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et par $\mathbf{E}_2$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$, avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$.

II.F.1) Démontrer que $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{E}$ orthogonaux au sens du produit scalaire Φ défini en **I.A.2.**

II.F.2) Démontrer que $\mathbf{E}_1$ contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant $+1$ et que $\mathbf{E}_2$ contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant -1.

II.F.3) Lorsque M est une matrice *non orthogonale* de $\mathscr{S}$, déduire de ce qui précède le nombre de segments $[WW']$ – où W et W' sont orthogonales – contenant M.

Partie III - Définition de l'ensemble $\mathscr{H}$

III.A -

III.A.1) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, démontrer que que $M \in \mathscr{S}$ *implique*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + (ad - bc)^2$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{E}$ vérifiant cette dernière relation.

III.A.2)

a) Réciproquement, à quelle condition, vérifiée par son déterminant, une matrice $M \in \mathscr{H}$ appartient-elle à $\mathscr{S}$?

b) Démontrer qu'une matrice $M \in \mathscr{H}$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si $\mathrm{Tr}({}^tM\,M) \leqslant 2$.

III.B -

III.B.1) Si $(A, B) \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$, calculer $\det(A + B)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\det(B)$.

Si $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}^2$, avec $M_1 \neq M_2$ on définit la *droite affine* (M_1M_2) comme l'ensemble des matrices de la forme $(1 - t)M_1 + tM_2$, où t décrit $\mathbb{R}$. Dans la suite, on l'appellera *droite* (M_1M_2).

III.B.2) Démontrer que, si W et W' sont des matrices orthogonales éléments de $\mathbf{E}$, telles que $\det(W) = +1$ et $\det(W') = -1$, la droite (WW') est incluse dans $\mathscr{H}$. Réciproquement, $\mathscr{H}$ est-elle réunion de droites de cette forme ?

Partie IV - Représentation graphique de $\mathscr{H}$

IV.A - Si $M \in \mathbf{E}$, on rappelle que le polynôme caractéristique de ${}^tM\,M$ est de la forme $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_2 \geqslant 0$. Pour fixer les idées, on suppose $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

On suppose $M \neq 0$. Déterminer en fonction de λ_1 et λ_2 le nombre de réels t **positifs** tels que $tM \in \mathscr{H}$. **On en trouvera « en général » deux, et on interprétera les cas particuliers.**

On étudie à partir de cette question l'intersection de $\mathscr{H}$ avec certains sous-espaces vectoriels de E. On commence par des exemples de plans vectoriels.

IV.B - Soit $\mathbf{P}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\mathscr{M}_1(x,\,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{2}} & y \\ 0 & \dfrac{x}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

IV.B.1) Déterminer les matrices orthogonales qui sont dans $\mathbf{P}_1$.

IV.B.2) **Dans cette question, on identifie $\mathscr{M}_1(x,\,y)$ avec le point $(x,\,y)$ de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et de son repère orthonormal canonique. On procédera à des identifications analogues dans les questions suivantes.**

a) Démontrer que $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_1$ est la réunion de deux coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
Déterminer $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$.

b) Représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_1$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{P}_1$ dans le plan $\mathbf{P}_1$.

IV.C - Soit $\mathbf{P}_2$ l'ensemble des matrices de la forme $\mathscr{M}_2(x,\,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{2}} & \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Soit $(u,\,v) \in \mathbb{R}^2$; on ne demande pas de vérifier que la relation du **III.A.1** implique

$$\mathscr{M}_2(x,\,y) \in \mathscr{H} \cap \mathbf{P}_2 \iff x^2y^2 - 2(x^2+y^2-1) = 0$$

Étudier et représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_2$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{P}_2$ dans le plan $\mathbf{P}_2$ (*on pourra discuter et résoudre l'équation par rapport à la variable y*).

IV.D - Exemple d'intersection de $\mathscr{H}$ avec un sous-espace de dimension 3

On désigne par $\mathbf{S}_2$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

IV.D.1) Démontrer qu'une matrice $M \in \mathbf{S}_2$ appartient à $\mathscr{H}$ si, et seulement si, elle admet une valeur propre égale à $+1$ ou à -1.

On admet qu'une base orthonormale de $\mathbf{S}_2$ est $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3)$, avec

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

IV.D.2) En écrivant une matrice de $\mathbf{S}_2$ sous la forme $xM_1 + yM_2 + zM_3$, décrire l'ensemble C_a des matrices de $\mathbf{S}_2$ admettant le réel donné a comme valeur propre. En déduire une description de $\mathscr{H} \cap \mathbf{S}_2$.

IV.D.3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $N = P(\theta)M(x, y, z)P(\theta)^{-1}$; démontrer que c'est une matrice de la forme $M(u, v, w)$ et exprimer (u, v, w) en fonction de (x, y, z). Interpréter certains des résultats de la question **IV.D.2**.

IV.D.4) Représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{S}_2$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{S}_2$.

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES I

Notations

On note I le segment $[-1,1]$ de $\mathbb{R}$ et E l'espace préhilbertien complexe des fonctions continues sur I à valeurs complexes muni du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto (f\,|\,g) = \int_I \overline{f(t)}g(t)dt \ .$$

Pour tout nombre complexe z n'appartenant pas à l'intervalle $]-\infty, 0]$, on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'unique nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi[$ tel que $z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}(z)}$.

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $p \leq n$, $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Questions préliminaires

a) Déterminer le développement en série entière au point 0 de la fonction :

$$]-\infty, 1[\to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

et préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\,.$$

Montrer que la fonction :

$$\varphi\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ est définie sur } \Delta = \{z \in \mathbb{C}\,|\,|z| < 1\}\,.$$

c) Montrer que φ est une racine carrée de la fonction

$$\Delta \to \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \frac{1}{1-z} \text{ autrement dit, pour tout } z \in \Delta\,,\ (\varphi(z))^2 = \frac{1}{1-z}\,.$$

d) Montrer que :

$$\forall z \in \Delta\,,\ \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{|1-z|}} e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(1-z)}\,.$$ Que vaut $\varphi(x)$ lorsque $x \in]-1, 1[$?

On pourra dorénavant noter

$$\varphi(z) = (1-z)^{-1/2} \text{ pour } z \in \Delta\,.$$

Filière PC

e) *Cette question est indépendante des précédentes.*

Pour tout entier naturel n, prouver l'existence d'une fonction polynomiale H_n telle que, pour tout réel θ, on a $H_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

Partie I -

I.A - Montrer que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$\psi_t :]-1, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(t,x) \text{ définie par : } \psi_t(x) = (1 - 2xt + x^2)^{-1/2}$$

est l'unique solution sur $]-1, 1[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux prenant la valeur 1 en 0. On donnera cette équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : a(t,x)y' + b(t,x)y = 0 \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des polynômes unitaires en } x.$$

I.B -

I.B.1) Vérifier que pour $x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\Psi_{\cos\theta}(x) = \varphi(xe^{i\theta})\varphi(xe^{-i\theta}), \text{ puis } \Psi_{\cos\theta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\theta)x^n$$

où G_n est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'applications de la forme $\theta \mapsto e^{ik\theta}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Préciser la valeur de $G_n(0)$.

I.B.2) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $G_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$ où P_n est un polynôme à coefficients réels.

I.B.3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|G_n(\theta)| \leq G_n(0)$, puis que pour

$$t \in [-1, 1] \text{ et } x \in]-1,1[,\ f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n \qquad (1)$$

avec convergence normale sur $[-1, 1] \times [-a, a]$ où $a \in]0, 1[$.

I.B.4) Montrer que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ vérifie $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ et pour

$$n \geq 1,\ (2n+1)tP_n(t) = (n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t) \qquad (2)$$

I.B.5) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré et la parité de P_n. Déterminer le coefficient dominant de P_n, ainsi que $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

I.C -

I.C.1) Soit a et b deux éléments distincts de $]1,+\infty[$. Calculer et simplifier la dérivée de la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$h\ :\ t\mapsto \ln\left[\frac{(a-t)+(b-t)}{2}-\sqrt{(a-t)(b-t)}\right]$$

après avoir vérifié qu'elle est bien définie.
En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)}}\ \text{pour tout couple } (a,b) \text{ d'éléments de }]1,+\infty[\,.$$

I.C.2) Montrer que :

$$\int_{-1}^{1}f(t,x)f(t,y)dt\ =\ \frac{1}{\sqrt{xy}}\ln\left[\frac{1+\sqrt{xy}}{1-\sqrt{xy}}\right]\ \text{pour tout couple } (x,y) \text{ d'éléments de }]0,1[\,.$$

On admettra sans démonstration l'identité suivante :

$$2\sqrt{xy}(1-x)(1-y)-(x+y)(1+xy)+4xy\ =\ (1+\sqrt{xy})^2(2\sqrt{xy}-(x+y))$$

I.C.3)

a) Pour tout couple (x,y) d'éléments de $]0,1[$ établir que :

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}\ln\left[\frac{1+\sqrt{xy}}{1-\sqrt{xy}}\right]\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^n y^n\,.$$

b) On fixe y dans l'intervalle $]0,1[$. Montrer que, pour tout couple (t,x) appartenant à $I\times]0,1[$:

$$f(t,x)f(t,y)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)f(t,y)x^n$$

la série convergeant normalement sur tout l'ensemble de la forme $I\times]0,a\,]$ avec $a\in]0,1[$. Conclure que :

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)f(t,y)dt\ =\ \frac{2}{2n+1}y^n\,.$$

c) En écrivant que, pour tout $(t,y)\in I\times]0,1[$, $f(t,y)\ =\ \sum_{m=0}^{\infty}P_m(t)y^m$, prouver que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}P_n(t)P_m(t)dt\right)y^m\ =\ \frac{2}{2n+1}y^n\,.$$

d) Conclure que

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)P_m(t)dt\ =\ \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$$

où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{n,m} = 1$ si $m = n$ et $\delta_{n,m} = 0$ sinon. Interpréter le résultat obtenu.

I.D - Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et z un zéro de P_n (*a priori* dans $\mathbb{C}$). On note R_n la fonction polynôme telle que, pour $t \neq z$, $R_n(t) = \dfrac{P_n(t)}{t-z}$.

I.D.1) Calculer $(R_n|P_n)$.

I.D.2) En déduire que z est réel et que $|z| < 1$.

I.D.3) Montrer que z est une racine simple de P_n.

I.E -

I.E.1) En utilisant (2), établir que, pour tout entier naturel n et tout couple (x,y) de nombres complexes distincts :

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)]}{x-y}. \qquad (3)$$

I.E.2) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)(P_k(x))^2 = (n+1)[P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)] \qquad (4)$$

I.E.3) Déduire de cette dernière formule que tout zéro de P_n est strictement compris entre deux zéros consécutifs de P_{n+1}.

I.F - Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, on note Af la fonction de I dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$Af(t) = \frac{d}{dt}[(1-t^2)f'(t)]$$

Prouver que, pour tout couple (f,g) de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, $(Af|g) = (f|Ag)$.

En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et tout entier k, $0 \leq k \leq n-1$, $(P_k|AP_n) = 0$.

En déduire que P_n est solution de l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0. \qquad (5)$$

Partie II -

II.A -

II.A.1) On associe à $n \in \mathbb{N}$ et à $f \in E$ le coefficient $c_n(f) = (P_n|f)$.
Montrer que la série de terme général

$\left(n + \dfrac{1}{2}\right)|c_n(f)|^2$ est convergente.

II.A.2) Montrer, à l'aide de I.F - que si $f \in E$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors la série $\sum n^5 |c_n(f)|^2$ est convergente.

En déduire que la série $\sum n|c_n(f)|$ est convergente.

II.B -

II.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n dans E par $f_n : t \mapsto t^n$.

Montrer que si $f \in E$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_n|f) = 0$ alors f est nulle.

II.B.2) Supposant $f \in E$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, montrer que l'expression :

$$g(t) = f(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) c_n(f) P_n(t)$$ définit sur I une fonction continue g.

II.B.3) Montrer que g est nulle.

II.B.4) Déduire de ce qui précède une condition suffisante pour que la série de fonctions

$\sum \left(n + \frac{1}{2}\right) c_n(f) P_n$ converge normalement sur I et ait pour somme f.

II.C - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, vérifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}$ est intégrable sur le segment I.

Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto Q_n(x)$ définie par :

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}\, dt$$

est une fonction polynôme de degré $(n-1)$ et que la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions initiales $Q_0 = 0$, $Q_1 = 2$ et la même relation de récurrence que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir du rang $n = 1$.

II.D - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de P_n écrits dans l'ordre croissant, *i.e.* $-1 < a_1 < \ldots < a_n < 1$.

II.D.1) Montrer que $\mathscr{B} = (L_1, \ldots, L_n)$ où

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$ est une base de $R_{n-1}[X]$.

II.D.2) Soit $\mathscr{C} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ où $\varphi_i : R_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a_i)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $R_{n-1}[X]$.

II.D.3) En déduire qu'il existe une suite $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de nombres réels et une seule telle que :

$$\forall P \in R_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i).$$

II.D.4) Montrer, en utilisant éventuellement une division euclidienne par P_n :

$$\forall P \in R_{2n-1}[X], \int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i). \quad (6)$$

II.D.5) Montrer que les λ_i sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$ et que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2$

II.E -

II.E.1) Montrer que si Q_n est le polynôme défini en II.C alors, avec les notations de II.D, on a :

$$Q_n(x) = P_n(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$

On pourra commencer par examiner le cas où $x > 1$.

II.E.2) En déduire que les $(n-1)$ zéros de Q_n sont situés strictement entre les zéros de P_n.

II.F -

II.F.1) Montrer, pour $x > 1$, que :

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i}\left(\frac{a_i}{x}\right)^{2n} - \frac{1}{x^{2n}}\int_{-1}^{1} \frac{t^{2n}}{x-t}dt.$$

II.F.2) En déduire que, pour tout $\alpha > 0$, la suite de fonctions

$$\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

approche uniformément la fonction

$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ sur l'intervalle $[1 + \alpha, +\infty[$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans ce problème, les figures ou les commentaires, même non demandés, qui éclaireraient les situations ou les hypothèses rencontrées seront les bienvenus.

Dans tout le problème, on désigne par $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, par (C) le cercle centré en O et de rayon donné R, $R>0$, et par A_1, A_2 et A_3 les points de coordonnées respectives $(R,0)$, $(0,R)$ et $(-R,0)$.

Partie I - Un exemple pratique

Dans cette partie, on désigne par (E) la courbe d'équation $4x^2+5y^2-4Ry=0$.

I.A - Montrer que (E) est une ellipse. En déterminer deux axes de symétrie et un centre de symétrie.

I.B - Étudier le signe de l'expression $(4x^2+5y^2-4Ry)-4(x^2+y^2-R^2)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En déduire les positions relatives de (E) et (C).

I.C -

I.C.1) Soit $(\mathscr{E})$ l'ellipse de représentation paramétrique $(x=a\cos\theta, y=b\sin\theta)$, où a et b sont deux réels non nuls et où le paramètre θ décrit $\mathbb{R}$. Montrer que la droite (D) d'équation $y=mx+m'$ rencontre $(\mathscr{E})$ en un point unique si et seulement si il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+m')^2}{b^2}=1\\[2ex]\dfrac{x}{a^2}+m\dfrac{mx+m'}{b^2}=0\end{cases}$$

En déduire que, dans ce cas, (D) est tangente à $(\mathscr{E})$.

I.C.2) En se ramenant à la question précédente, montrer que, si dans $\mathscr{P}$ une droite coupe une ellipse en un seul point, elle lui est tangente. Est-ce encore le cas pour une parabole ? Pour une hyperbole ?

I.C.3) Montrer que les droites d'équation $x+y=R$ et $-x+y=R$ sont tangentes à (E) en des points que l'on précisera. Tracer soigneusement (C) et (E), ainsi que ces deux droites.

Filière PC

I.D - On considère l'arc paramétré défini par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\,\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}\,\vec{j}\right), \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que l'on définit ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ sur une partie (γ) de (C) que l'on précisera. Si t est réel, on dira que t est le *paramètre* du point $M(t)$.

I.E - Soit t et u deux réels. Montrer que $(1-p)x + sy - R(1+p) = 0$ est une équation de la droite $(M(t)M(u))$, si l'on a posé $s = t+u$ et $p = tu$.

Si $t = u$, la notation $(M(t)M(u))$ désignera cette fois la tangente en $M(t)$ à (γ). On admettra sans le vérifier que l'équation trouvée convient encore dans ce cas.

I.F -

I.F.1) Soit M un point de (γ), de paramètre t. Montrer que, sauf dans un cas particulier à préciser, son symétrique orthogonal $\widehat{M}$ par rapport à $(O;\vec{j})$ est un point de (γ) ; en exprimer le paramètre, noté $\widehat{t}$.

Si A_0 désigne le point de coordonnées $(R, 2R)$, montrer que, lorsque $t \neq 1$, la droite $(A_0\widehat{M})$ recoupe (γ) au point de paramètre $\frac{1}{1-t}$ (*on pourra utiliser les résultats* de I.E.).

I.F.2)

Dans le cas particulier où $t \neq 1$ et $u = \frac{1}{1-t}$, on pose toujours $s = t+u$ et $p = tu$.

Montrer que la droite $(M(t)M(u))$ est tangente à (E) (*on pourra exprimer* $(p+1)s$ *en fonction de* p *seulement et utiliser les résultats de* I.C.2.).

I.F.3) En utilisant les questions qui précèdent, montrer que, si un point A de (C) est distinct des points A_1, A_2 et A_3 définis dans le préambule, alors une construction géométrique simple, que l'on détaillera, permet de construire deux autres points A' et A'' de (C) tels que les côtés du triangle $AA'A''$ soient tangents à (E). Étudier le cas des points A_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

I.G - Récapituler les résultats de cette partie à l'aide d'une figure.

Partie II - Correspondances algébriques

Soit P une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$(x, y) \mapsto P(x, y) = u_{1,1}x^2 + 2u_{1,2}xy + u_{2,2}y^2 + v_1x + v_2y + w$$

où les coefficients $u_{i,j}$, v_i et w sont des réels.
On lui associe la relation $\mathscr{R}$ définie sur $(\gamma) \times (\gamma)$ par

$$M(t)\mathscr{R}M(u) \Leftrightarrow P(s, p) = 0$$

où l'on a posé $s = t + u$ et $p = tu$. On dira que $\mathscr{R}$ est une 2-*correspondance* si $u_{1,1}$, $u_{1,2}$ et $u_{2,2}$ ne sont pas tous les trois nuls, et une 1-*correspondance* si $u_{1,1} = u_{1,2} = u_{2,2} = 0$, mais v_1 et v_2 non tous nuls.

II.A - Exemple de 1-correspondance

Soit A un point donné de $\mathscr{P}$, différent de A_3. Montrer que la relation sur $(\gamma) \times (\gamma)$ définie par $M(t)\mathscr{R}M(u) \Leftrightarrow A \in (M(t)M(u))$ est une 1-correspondance. Donner un exemple simple de 1-correspondance qui ne soit pas de cette forme.

II.B - Exemple de 2-correspondance

Soit (Γ) le cercle de centre Ω de coordonnées $(\alpha, 0)$ et de rayon r, $r > 0$ donnés.

II.B.1) Si (D) est la droite d'équation $ax + by = c$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, donner une expression du carré de la distance de Ω à (D), noté $d^2(\Omega, D)$.

II.B.2) En déduire que, si t et u sont des réels, la droite $(M(t)M(u))$ est tangente à (Γ) si et seulement si

$$((R + \alpha)^2 - r^2)p^2 - r^2s^2 + 2(R^2 + r^2 - \alpha^2)p + (R - \alpha)^2 - r^2 = 0$$

puis que cela définit ici une 2-correspondance.

II.C - Si $\mathscr{R}$ est une 1-correspondance, montrer que l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $M(t)\mathscr{R}M(t)$ est fini (ou vide). Montrer que cette propriété tombe en défaut pour une 2-correspondance et une seule.

Pour fournir certains des exemples demandés dans la partie qui suit, les candidats *pourront* mettre à profit l'exemple II.B en choisissant de façon adéquate le cercle (Γ).

Partie III - L'alternative de Poncelet

Le but de cette partie est l'étude de l'existence, étant donné une 2- **correspondance** $\mathscr{R}$ **vérifiant quelques propriétés supplémentaires, de paramètres réels (distincts ou non)** t_1, t_2, t_3 **et** t_4 **formant un** 4- ***cycle*** **pour** $\mathscr{R}$, **c'est-à-dire tels que** $M(t_i)\mathscr{R}M(t_{i+1})$ **pour** $1 \leq i \leq 3$ **et** $M(t_4)\mathscr{R}M(t_1)$.

III.A - Comment interpréter géométriquement un 4- cycle dans le cas où $\mathscr{R}$ est la 2- correspondance définie à la question II.B.2 ? Montrer par un choix de (Γ) qu'il peut y avoir une infinité de solutions, et qu'il peut n'y avoir aucune solution.

III.B -

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$V(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

III.B.1) t et u étant réels, à quelle condition la famille $\{V(t), V(u)\}$ est-elle liée dans $\mathbb{R}^3$?

III.B.2) Soit P, Q, $R \in \mathbb{R}_2[X]$; on pose :

$$W(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \\ R(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Montrer qu'il existe $\mathscr{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ unique telle que $W(t) = \mathscr{A}V(t)$ pour tout réel t.

III.B.3) Caractériser à l'aide de $\mathscr{A}$ la liberté de la famille $\{P, Q, R\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. En déduire que si $\{P, Q, R\}$ est libre, alors la famille $\{W(t), W(u)\}$ est libre si et seulement si $t \neq u$.

III.B.4)

a) On suppose, jusqu'à la fin de ce III.B, que $\{P, Q, R\}$ est de rang 2.

Montrer que $\mathscr{A}$ admet 0 comme valeur propre et en déduire qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\{W(t), W(u)\} \text{ liée } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & t^2 & u^2 \\ b & t & u \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

b) Montrer que ce déterminant est égal à $(t-u)(a-bs+cp)$, avec $s = t+u$ et $p = tu$.

Établir alors le résultat suivant, vrai sauf pour des valeurs particulières de (a,b,c) que l'on mettra en évidence :

> Il existe une 1- correspondance $\mathscr{R}_0$ telle que, chaque fois que les réels t et u vérifient $M(t)\mathscr{R}_0 M(u)$, la famille $\{W(t), W(u)\}$ est liée.

III.C - On considère une 2- correspondance de la forme

$$M(t)\mathscr{R}M(u) \Leftrightarrow P(s,p) = Ap^2 + 2Bps + Cs^2 + 2Dp + 2Es + F = 0$$

où A, B et C sont des réels non tous nuls, D, E et F des réels, et où p et s désignent encore tu et $t+u$.

III.C.1) Écrire $P(s,p)$ sous la forme $P_1(t)u^2 + 2P_2(t)u + P_3(t)$, où P_1, P_2 et P_3 sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exemple 1. Lorsque $P(s,p) = s^2 - 4p$, déterminer P_1, P_2 et P_3 ainsi que le rang de la famille $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$.

Exemple 2. On considère, pour ce seul exemple, deux réels α et β strictement positifs tels que $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$ et on pose $P(s,p) = \alpha^2(1-p)^2 + \beta^2 s^2 - R^2(1+p)^2 = 0$. Montrer que $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$ vérifie les hypothèses du III.B.4-a) puis déterminer la 1- correspondance définie comme dans le III.B.4-b).

III.C.2)

Montrer que si, pour $u_2 \in \mathbb{R}$, l'équation en u : $P_1(u_2)u^2 + 2P_2(u_2)u + P_3(u_2) = 0$ possède deux solutions réelles (distinctes ou non) u_1 et u_3, alors on a $M(u_1)\mathscr{R}M(u_2)$ et $M(u_2)\mathscr{R}M(u_3)$.

III.C.3)

a) On pose $\Delta(t) = P_2^2(t) - P_1(t)P_3(t)$.

Montrer, par un exemple, qu'il est possible que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) < 0$, ou que $\Delta(t) < 0$ sauf en un point. Que penser dans chacun de ces cas de l'existence de 4- cycles ?

On suppose maintenant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$, supposé choisi, tel que $\Delta(t_0) > 0$. On suppose en outre que $P_1(t_0) \neq 0$ (ce qui, en fait, ne restreint nullement la généralité recherchée).

b) Montrer qu'il existe alors un intervalle ouvert non vide $\mathscr{I}_0$ en tout point duquel $\Delta(t) > 0$ et $P_1(t) \neq 0$.

c) En conclure que si la famille $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$ est libre, il n'existe aucun 4- cycle formé de paramètres distincts.

d) Si la famille $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$ est de rang 2, montrer qu'il existe une 1- correspondance $\mathscr{R}_0$ telle que, chaque fois que l'on a $t_1 \in \mathscr{I}_0$ et $M(t_1)\mathscr{R}_0 M(t_2)$, il existe u_1 et u_2 tels que t_1, u_1, t_2, u_2 soit un 4- cycle. Peut-on alors faire en sorte que ces quatre paramètres soient distincts ?

III.C.4)

a) Dans le cas de l'exemple de II.B, montrer que l'hypothèse du III.B.4-a) quant au rang de $\{P, Q, R\}$ équivaut à

$$(R^2 - \alpha^2)((R^2 - \alpha^2)^2 - 2r^2(R^2 + \alpha^2)) = 0\,.$$

b) Que signifie la condition $R^2 - \alpha^2 = 0$? Indiquer une construction géométrique de 4- cycles dans le cas où elle est vérifiée. Prouver géométriquement que cette construction convient.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

L'épreuve est constituée de deux parties totalement indépendantes.

Partie I -

Dans cette partie, H est un réel fixé dans l'intervalle $]0, 2]$.
On désigne par I l'intervalle $]-1/2, 1/2[$ et par I^* cet intervalle privé de 0.
Pour tout $t \in I^*$, on pose $N(t) = E\left[-\dfrac{\ln|t|}{\ln 2}\right]$ où $E[x]$ désigne la partie entière de x.

I.A -

I.A.1) Rappeler, sans démonstration, ce que sont :

- l'ensemble J des réels r pour lesquels la série de terme général r^n converge ;
- la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ pour $r \in J$ et celle de $\sum_{n=k}^{+\infty} r^n$ pour $r \in J$ et $k \in \mathbb{N}$;
- pour $r \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sum_{n=0}^{p} r^n$.

I.A.2) Montrer que la série de terme général $2^{-nH}\cos(2^n x)$ est absolument convergente quel que soit le réel x.

Le but de cette partie est d'étudier, suivant les valeurs de H, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-nH}\cos(2^n x).$$

Pour k entier, avec $k \geq 1$, on notera

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} 2^{-nH}\cos(2^n x) \quad \text{et} \quad T_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} 2^{-nH}\cos(2^n x).$$

I.A.3) Montrer que f est de période 2π. Déterminer un majorant $M_1(H)$ de la fonction $|f|$.

Filière TSI

I.A.4) Montrer que, pour tout $t \in I^*$, on a :

$$N(t) \geq 1 \quad ; \quad 2^{-N(t)-1} \leq |t| \leq 2^{-N(t)} \quad \text{et} \quad 2^{-N(t)} \leq 2|t| .$$

I.A.5) Soit a et h deux réels. On pose $z = e^{ia}(e^{ih} - 1 - ih)$ où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

a) Montrer que $|z| \leq h^2 e^{|h|}$ (on pourra utiliser l'expression de e^{ih} comme somme d'une série entière).

b) En considérant la partie réelle de z, montrer que

$$|\cos(a+h) - \cos a + h \sin a| \leq h^2 e^{|h|} .$$

I.A.6) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in I^*$, on a :

$$\left| S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right| \leq e \cdot t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)}$$

(on pourra utiliser la question précédente et l'inégalité $e^{|2^n t|} \leq e$, que l'on justifiera).

Lorsque $H < 2$, trouver une constante $C_1(H)$ telle que, pour tout $t \in I^*$, on ait

$$e \cdot t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \leq C_1(H) |t^H| .$$

Lorsque $H = 2$, trouver une constante K telle que, pour tout $t \in I^*$, on ait

$$e \cdot t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \leq K t^2 \ln \frac{1}{|t|} .$$

I.A.7) Montrer qu'il existe une constante $C_2(H)$ telle que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t \in I^*$, $|T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)| \leq C_2(H)|t|^H$ (on pourra utiliser l'inégalité $|\cos a - \cos b| \leq 2$, vraie pour tous réels a et b).

On considère maintenant la fonction g définie pour x réel par :

$$g(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) .$$

I.B - On prend $H \in]1, 2]$.

I.B.1) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer un majorant $M_2(H)$ de la fonction $|g|$.

I.B.2) Pour x fixé dans $\mathbb{R}$ et $t \in I^*$, on pose

$$l(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x).$$

Montrer que $l(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 (on pourra utiliser I.A.6 et I.A.7).

I.B.3) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f' = g$. Par la suite, on admet que g est continue sur $\mathbb{R}$.

I.B.4)

a) Calculer les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la série de Fourier de la fonction f. On admettra que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-pH} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x)\cos nx \, \mathrm{d}x .$$

b) Pour un réel x fixé, écrire la somme de Fourier de f de rang 2^n et montrer qu'elle coïncide avec une somme partielle de la série numérique qui définit $f(x)$.

c) Les propriétés de f permettent-elles de prévoir que $f(x)$ est la limite, quand n tend vers $+\infty$, des sommes de Fourier de f de rang 2^n ?

I.B.5)

a) Utiliser I.B.4 pour calculer $\int_0^{2\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t$ en fonction de H.

b) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| \mathrm{d}t \geq \frac{\pi}{1 + 2^{-H}}$$

I.C - On prend $H = 2$.

I.C.1) Trouver la valeur exacte de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x = \pi/4$ et $3\pi/4$.

I.C.2) On pose

$$\varphi(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{8}\sin(8x) .$$

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur minimale de $\varphi(x)$ pour

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

b) En revenant à la définition de g, donner une majoration de $|g(x)+\varphi(x)|$.

c) En déduire que g est strictement négative sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

I.C.3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

I.D - On prend $H \in]0, 1[$. On veut montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Soit $t \in]0, \frac{1}{2}[$.

I.D.1) Vérifier, que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{4}$.

I.D.2) Montrer qu'il existe une constante $C_3(H) > 0$ telle que $|S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t)| \geq C_3(H)(t^H - t^2 \cdot 2^{2-H})$.

I.D.3) Vérifier que $T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t) \geq 0$.

I.D.4) En déduire que $\frac{f(0)-f(t)}{t}$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 0, t > 0$.

Partie II -

II.A -

Soit Q un polynôme du second degré en x, y, défini par $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + a'x + b'y + c'$, à coefficients réels tels que $b^2 - 4ac \neq 0$. On définit une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = \exp\{Q(x, y)\}$.

II.A.1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f. Montrer qu'elles s'annulent aux mêmes points que celles de Q.

II.A.2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f. Comparer ces dérivées partielles d'ordre 2 de Q en un point où les dérivées partielles d'ordre 1 de Q sont nulles.

II.A.3) Utiliser le développement de Taylor-Young pour montrer que les extremums locaux de f sont situés aux mêmes points et sont de même nature que ceux de Q.

II.B -

Soit Q_1 et Q_2 deux polynômes du second degré en x, y, définis par $Q_1(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}y - \frac{7}{2}$ et $Q_2(x, y) = x^2 + \frac{1}{10}y^2 - \frac{19}{10}x + \frac{1}{10}y + \frac{3}{10}$.

On définit deux fonctions f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f_1(x, y) = \exp\{Q_1(x, y)\}$ et $f_2(x, y) = 2\exp\{Q_2(x, y)\}$.

II.B.1) f_1 admet-elle des extremums ? Si oui, quelle en est la nature ?

II.B.2) Même question pour f_2.

II.B.3) Montrer que, sur la droite $y = 2x$ les fonctions Q_1 et Q_2 prennent des valeurs égales en deux points que l'on déterminera.

II.C - On considère la transformation du plan définie par

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

II.C.1) Montrer que F admet un point fixe en $(1, 2)$, c'est-à-dire que

$$F(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

II.C.2) Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f_1(x, y)$ au point $(1, 2)$. Même question pour f_2.

II.C.3) Déterminer la matrice jacobienne J de la transformation F en $(1, 2)$. Cette matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un repère orthonormal

$\mathscr{R} = (o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Les autres repères qu'on utilise ne sont pas nécessairement orthonormaux. **Ils ont tous ont la même origine** o**.** Les points sont désignés par des lettres minuscules. On note, avec une majuscule, M (ou M'), la matrice colonne des coordonnées du point m dans le repère $\mathscr{R}$ (ou $\mathscr{R}'$).

On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et ${}^tP$ la transposée de la matrice P. Si P est carrée, son déterminant est noté $det(P)$. Si P ne comporte qu'un seul élément, cet unique élément est noté $\{P\}$.

Si S est une matrice symétrique appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, on appelle surface associée à S dans le repère $\mathscr{R}$ l'ensemble des points m tels que ${}^tMSM$ soit la matrice nulle.

Partie I - Quelques préliminaires

I.A - Exemple.

La matrice S est diagonale. Ses termes diagonaux sont $1, 1$ et -1.

On note x, y, z les coordonnées du point m dans $\mathscr{R}$.

I.A.1) Calculer le produit matriciel ${}^tMSM$.

I.A.2) En déduire que $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$ associée à S dans le repère $\mathscr{R}$.

I.A.3) Quelle est la nature de $\mathscr{S}$? Représenter la partie de $\mathscr{S}$ comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 1$.

I.B - Changement de repère

On revient au cas général. Soit $\mathscr{S}$ la surface associée à la matrice symétrique S dans le repère $\mathscr{R}$.

I.B.1) En posant $S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$, donner une équation cartésienne de $\mathscr{S}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Filière TSI

I.B.2) Soit $P \in M_3(\mathbb{R})$, P inversible, et soit $\mathscr{R}$ ' le repère tel que P soit la matrice de passage de la base de $\mathscr{R}$ à la base de $\mathscr{R}$ '. Soit M' la matrice des coordonnées du point m dans $\mathscr{R}$ '. Exprimer M en fonction de P et de M'.

I.B.3) On pose $S' = {}^tPSP$; montrer que la matrice S' est symétrique.

Montrer que S' est inversible si et seulement si S est inversible.

I.B.4) Montrer que $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points m qui vérifient $\{ {}^tM'S'M'\} = 0$.

I.C - Nature de $\mathscr{S}$

I.C.1)

a) Justifier que les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du polynôme caractéristique de S sont réelles et qu'on peut choisir la matrice P précédente orthogonale de sorte que S' soit diagonale. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

b) Ecrire l'équation de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$ '.

I.C.2) On suppose S inversible.

a) Montrer que $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

b) On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ne sont pas tous de même signe. Montrer qu'on peut trouver un repère $\mathscr{R}$ ' dans lequel l'équation de $\mathscr{S}$ soit de la forme $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = z'^2$. Montrer que $\mathscr{S}$ est un cône de sommet o

c) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont de même signe.

(ii) La surface $\mathscr{S}$ est réduite au point o.

I.D - Inverse d'une matrice

On considère une matrice réelle ou complexe M, carrée de taille 3.

On appelle comatrice de M la matrice où figure, à la i-ème ligne, j-ème colonne, le déterminant, multiplié par $(-1)^{i+j}$, de la sous-matrice de M obtenue en barrant la i-ème ligne et la j-ème colonne. On note M' la transposée de la comatrice de M.

I.D.1) Montrer que $MM' = (det(M))I$. On se bornera à calculer un terme diagonal et un terme non diagonal du produit MM'.

I.D.2) En supposant que M est inversible, exprimer M^{-1} en fonction de $det(M)$ et de M'.

I.E - Calcul matriciel

Soient M_1 et M_2 deux matrices colonnes à trois éléments et $S \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

I.E.1) Montrer que $\{ {}^tM_1SM_2\} = \{ {}^tM_2SM_1\}$.

I.E.2) Posons $Q = {}^tM_1SM_2$ et $q = \{Q\}$. Si M_0 est une matrice colonne à trois éléments, vérifier que $M_0Q = qM_0$.

Partie II - Tangentes à une conique

Dans cette partie, S est une matrice symétrique, appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, inversible et dont les valeurs propres ne sont pas toutes de même signe ; $\mathscr{S}$ est la surface associée à S dans le repère $\mathscr{R}$.

Soit $\mathscr{S}_1$ l'intersection de $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $z = 1$ et soit m_0 un point de ce plan, n'appartenant pas à $\mathscr{S}_1$.

On admet que $\mathscr{S}_1$ est une conique (ellipse, hyperbole ou parabole).

II.A -

Soit m un point non aligné avec o et m_0. Soit μ un réel et p le point dont la matrice des coordonnées dans $\mathscr{R}$ est $P = \mu M_o + M$.

II.A.1) Montrer que, quel que soit μ, le point p est distinct de o et appartient au plan passant par o, m_0 et m.

II.A.2) Montrer que p appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si μ vérifie une certaine équation du second degré dont le discriminant est

$$\Delta(M) = \{ {}^tMSM_0\}^2 - \{ {}^tM_0SM_0\}\{ {}^tMSM\}.$$

On admet, **dans toute la suite du problème,** que, si le point m est dans le plan $z = 1$, alors la droite m_0m est tangente à la conique $\mathscr{S}_1$ si et seulement si $\Delta(M) = 0$.

II.B - On pose $T = SM_0\ {}^tM_0S - \{ {}^tM_0SM_0\}S$.

II.B.1) Montrer que $\Delta(M)$ est l'unique terme de ${}^tMTM$.

II.B.2) Montrer que la matrice T est symétrique. On note $\mathscr{T}$ la surface qui lui est associée dans le repère $\mathscr{R}$.

II.B.3) Montrer que la droite om_0 est contenue dans $\mathscr{T}$.

II.C - Soit N une matrice unicolonne à 3 éléments.

II.C.1) Montrer que $TN = S.(\{ {}^tM_0SN\}M_0 - \{ {}^tM_0SM_0\}N)$.

II.C.2) En déduire que 0 est valeur propre de T et que le sous-espace propre associé

est la droite dirigée par M_0.

II.C.3) En déduire que T est de rang 2.

II.D -

II.D.1) En utilisant I.C.1), montrer qu'il existe un repère $\mathscr{R}'$ dans lequel $\mathscr{T}$ a une équation de la forme $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0$, où les réels λ_1 et λ_2 sont non nuls.

II.D.2) En déduire que, suivant les signes de λ_1 et λ_2, $\mathscr{T}$ est formée de deux plans se coupant suivant la droite om_0 ou réduite à cette droite om_0.

II.D.3) En déduire que le nombre de tangentes à $\mathscr{S}_1$ qui passent par m_0 est égal à 0 ou à 2.

Partie III - Utilisation de deux surfaces

Dans cette partie, on considère deux matrices A et B appartenant à $M_3(\mathbb{R})$. Ces matrices sont symétriques et inversibles ; elles ont chacune trois valeurs propres non de même signe.

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ les surfaces associées à A et B dans le repère $\mathscr{R}$.

On note $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ les intersections de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ et du plan $z = 1$. Les courbes $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ sont donc des coniques. On suppose qu'on peut mener par tout point m_0 de $\mathscr{B}_1$ deux tangentes à $\mathscr{A}_1$ et que ces tangentes recoupent $\mathscr{B}_1$ en deux points m_1 et m_2 distincts de m_0. On dira que m_0 a la propriété $\mathscr{P}$ si et seulement si la droite m_1m_2 est tangente à $\mathscr{A}_1$.

On fixe le point m_0 sur $\mathscr{B}_1$.

III.A - Représenter, sur un même dessin, $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{A}_1$ et le triangle $m_0m_1m_2$. Pour simplifier le dessin, on supposera que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{A}_1$ sont deux ellipses, $\mathscr{A}_1$ étant en entier à l'intérieur de $\mathscr{B}_1$.

III.B - On utilise maintenant le repère $\mathscr{R}'$ dont la base est $(\overrightarrow{om_0}, \overrightarrow{om_1}, \overrightarrow{om_2})$. Comme dans I.B.4), $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont associées dans le repère $\mathscr{R}'$ à deux matrices A' et B'.

III.B.1) Ecrire les matrices M'_0, M'_1 et M'_2 des coordonnées de m_0, m_1 et m_2 dans le repère $\mathscr{R}'$.

III.B.2) Montrer que B' est de la forme $B' = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$, avec a, b, c non nuls.

III.B.3) Montrer que A' est inversible. On pose $A' = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & t & u \\ z & u & v \end{bmatrix}$.

Déduire de I.D.2) le troisième terme diagonal de ${A'}^{-1}$.

Calculer aussi $\{ {}^tM_1'A'M_0'\}^2 - \{ {}^tM_0'A'M_0'\}\{ {}^tM_1'A'M_1'\}$.

III.B.4) Montrer, en utilisant II.A.2), que $xt - y^2 = 0$.

III.B.5) Justifier que ${A'}^{-1}$ est de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & 0 & \delta \\ \gamma & \delta & 0 \end{bmatrix}$ et que m_0 a la propriété $\mathscr{P}$ si et seulement si $\alpha = 0$.

Montrer que $\delta \neq 0$.

III.C - Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$.

On l'écrit sous la forme $M = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}$ et on lui associe le polynôme

$$P(x) = det(xI - M)\,;$$

on note σ_1 et σ_2 les coefficients respectifs de x^2 et x dans $P(x)$.

Exprimer, en développant $P(x)$, σ_1 et σ_2 en fonction des termes de M.

III.D - Dorénavant, on prend $M = {A'}^{-1}B'$.

III.D.1) Calculer M, puis $\dfrac{{\sigma_1}^2}{4} - \sigma_2$, en fonction de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

III.D.2) En déduire que $\alpha = 0$ si et seulement si ${\sigma_1}^2 = 4\sigma_2$.

III.E -

III.E.1) Montrer que les matrices $A^{-1}B$ et ${A'}^{-1}B'$ sont semblables.

III.E.2) En déduire que ${\sigma_1}^2 - 4\sigma_2$ ne dépend pas du choix de m_0 sur $\mathscr{B}_1$.

III.E.3) En déduire que s'il existe un point de $\mathscr{B}_1$ ayant la propriété $\mathscr{P}$, alors tous les points de $\mathscr{B}_1$ ont la propriété $\mathscr{P}$.

III.F - On pose $Q(x) = det(xA - B)$.

III.F.1) Calculer $Q(x)$ en fonction de $det(A)$ et de $P(x)$.

III.F.2) On note s et q les coefficients de x^2 et x dans $Q(x)$. Montrer que les points de $\mathscr{B}_1$ ont la propriété $\mathscr{P}$ si et seulement si $s^2 = 4q\ det(A)$.

Partie IV - Exemple d'application aux coniques

Dans un plan Π rapporté à un repère orthonormal, on considère deux courbes $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ d'équations respectives $x^2-4x+3+y^2=0$ et $y^2-2px=0$, où p est un réel fixé positif.

IV.A - Préciser la nature de $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$.

Représenter $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ sur un même dessin, d'abord dans le cas $p=\frac{1}{2}$, puis dans le cas $p=\frac{1}{6}$.

Dans ce dernier cas, donner, par ses coordonnées, un exemple de point qui appartienne à $\mathscr{B}_1$ tout en étant à l'intérieur de $\mathscr{A}_1$.

IV.B - On plonge Π dans l'espace, de sorte que le point de coordonnées (x,y) de Π ait pour coordonnées $(x,y,1)$ dans $\mathscr{R}$.

IV.B.1) Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux surfaces associées dans $\mathscr{R}$ à deux matrices symétriques A et B.

Comment choisir ces deux matrices pour que ces surfaces coupent le plan $z=1$ suivant les courbes $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$? (utiliser I.B.1).)

IV.B.2) Montrer que A et B sont inversibles puis, en utilisant I.C.2)c) , que ni A ni B n'a trois valeurs propres de même signe.

IV.C -

IV.C.1)

Donner les coefficients s et q de x^2 et x dans le polynôme $Q(x)=det(xA-B)$.

IV.C.2) Montrer que $\dfrac{1}{2}$ est la seule valeur de p telle que, par tout point m_0 de $\mathscr{B}_1$, on puisse mener deux tangentes à $\mathscr{A}_1$ recoupant $\mathscr{A}_1$ en m_1 et m_2 tels que la droite m_1m_2 soit tangente à $\mathscr{A}_1$.

IV.C.3) Avec cette valeur de p, représenter $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{B}_1$ et une position quelconque du triangle $m_0m_1m_2$.

• • • FIN • • •

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière MP

Les parties 2, 3 et 4 de ce problème sont totalement indépendantes, elles proposent trois applications du résultat démontré dans la partie préliminaire 1.

Définitions et notations

Pour $T \in \mathbf{R}^{*+}$, on note C_T^0 l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes, continues et T-périodiques.

Pour $T \in \mathbf{R}^{*+}$, on appelle coefficients de Fourier complexes d'une fonction f définie sur $\mathbf{R}$, continue par morceaux et T-périodique, les nombres

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\pi\frac{2\mathrm{i}nt}{T}}\mathrm{d}t,\ n \in \mathbf{Z}.$$

On pourra utiliser la notation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Partie I - Questions préliminaires

I.A - Question de cours

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions uniformément convergente sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et soit $a \in \bar{I}$.

On note $U = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = \ell_n$.

Démontrer que $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, on note ℓ sa limite.

Montrer que $U(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

I.B - Soit g une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes, continue par morceaux et T-périodique et soit $k \in \mathbf{Z}$; étudier $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}g(x)\mathrm{d}x$ (on distinguera les cas $kT \in 2\pi\mathbf{Z}$ et $kT \notin 2\pi\mathbf{Z}$).

I.C - Soit $f \in C_{2\pi}^0$, de classe C^1 par morceaux et soit g une fonction continue par morceaux et T-périodique.

I.C.1) On suppose $\dfrac{T}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$.

Montrer que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$

et que cette limite vaut $c_0(f)c_0(g)$.

I.C.2) On suppose $\dfrac{T}{2\pi} \in \mathbf{Q}$. On pose $\dfrac{T}{2\pi} = \dfrac{p}{q}$ irréductible.

Montrer que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x$ admet une limite quand $t \to +\infty$ et exprimer cette limite à l'aide des coefficients de Fourier complexes de f et g.

Lorsque les coefficients de Fourier complexes de f et g sont tous des réels positifs, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant c_0(f)c_0(g)$.

Partie II - Équation différentielle

II.A - Soit ϕ appartenant à C_T^0, et soit $k \in \mathbf{Z}$.

On note e_k la fonction $x \mapsto e_k(x) = \mathrm{e}^{-\pi\frac{2\mathrm{i}kx}{T}}$. Comparer $c_k(\phi)$ et $c_0(e_k\phi)$.

II.B - Soient a et b deux fonctions continues, 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$.

On suppose que l'équation différentielle $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ possède une solution y_0 sur $\mathbf{R}$, non nulle et T-périodique avec $\dfrac{T}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$.

Prouver que y_0 est solution de l'équation différentielle $y'' + c_0(a)y' + c_0(b)y = 0$.

Partie III - Épicycloïde

Soient R et r deux réels strictements positifs.

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé direct, on considère le cercle (C_0) de centre O et de rayon R, le cercle (C) de centre $\Omega(R+r,0)$ et de rayon r et le point $A(R,0)$. On pose $q = \dfrac{R}{r}$.

Pour $t \in \mathbf{R}$, on considère le cercle $C(t)$, de rayon r, dont le centre, noté $\Omega(t)$, a pour affixe $(R+r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

- version du 19 mars 2007 11h34

III.A - Définition de l'épicycloïde

III.A.1) Montrer que (C_0) et $(C(t))$ sont tangents et déterminer l'affixe $h(t)$ de leur point de contact $H(t)$.

III.A.2) Soit $M(t)$ le point de $(C(t))$ tel que $(\overrightarrow{\Omega(t)H(t)}, \overrightarrow{\Omega(t)M(t)}) = qt$. Déterminer l'affixe $z(t)$ de $(M(t))$.

On appelle épicycloïde $\mathcal{E}$ l'arc paramétré décrit par $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbf{R}$.

Remarque : l'épicycloïde $\mathcal{E}$ est la courbe décrite par le point A lié au cercle (C) lorsque le cercle (C) roule sans glisser sur le cercle (C_0).

III.B - Propriétés de l'épicycloïde

Dans cette section, $q \in \mathbf{Q}$.

III.B.1) Justifier l'existence d'une fonction périodique ρ à valeurs strictement positives, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et d'une fonction θ à valeurs réelles, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, telles que $\forall t \in \mathbf{R},\ z(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$.

Préciser une période de la fonction ρ.

III.B.2) Étudier et représenter la courbe lorsque $q = \dfrac{5}{2}$.

III.B.3) Montrer que l'épicycloïde est formée d'arcs isométriques (appelés arches) se rejoignant en des points de rebroussements. Déterminer les affixes de ces points.

III.B.4) Calculer la longueur d'une arche.

Lorsque q est entier, calculer la longueur totale et l'aire de l'épicycloïde en fonction de la longueur et l'aire du cercle (C_0) et du nombre q.

III.C - Dans cette section $q \notin \mathbf{Q}$.

On montre que l'épicycloïde est dense dans la couronne $\mathcal{C}$ délimitée par le cercle (C_0) et le cercle (C_1) de même centre et de rayon $(R + 2r)$.

III.C.1) Soit $m \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \rho^m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta(x)}\mathrm{d}x = 0$.

Indication : on pourra exprimer $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$ en fonction de $z(x)$ et $\rho(x)$ et utiliser la question 3 de la partie préliminaire.

Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \rho^m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta(x)}\mathrm{d}x = 0$ pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$.

III.C.2) Soit P un polynôme et Q un polynôme trigonométrique, déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t P(\rho(x))Q(\theta(x))\mathrm{d}x$.

En déduire $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(\rho(x))g(\theta(x))\mathrm{d}x$, lorsque f est une fonction définie et continue sur $[R, R + 2r]$ et g une fonction continue 2π-périodique.

III.C.3) Soient $(\rho_0, \varepsilon) \in [r, R + 2r] \times \mathbf{R}^{*+}$ tels que $[\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon] \subset [R, R + 2r]$ et soit $(\theta_0, \eta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{*+}$.

On considère la partie $\mathcal{P}$ du plan constituée des points M d'affixe z tels que $|z| \in [\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon]$ et $\mathrm{Arg}(z) \in [\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta]$.

En considérant des fonctions f et g bien choisies, montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

III.C.4) En déduire que l'épicycloïde est dense dans la couronne $\mathcal{C}$.

Partie IV - Problème de visibilité

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé direct, on considère un observateur placé à l'origine et, en tout point M de coordonnées entières autre que l'origine, on place un arbre représenté par un carré « plein » de côté $2r \in]0, 1/2[$ centré en M ; on appelle forêt, notée $\mathcal{F}$, l'ensemble de ces carrés.

Le but de cette partie est de prouver l'existence d'un réel $R > 0$ tel que, dans toute direction, l'observateur voit un arbre situé à une distance inférieure ou égale à R.

IV.A -

IV.A.1) Soit h la fonction créneau, paire et 1-périodique définie sur $[0, 1/2]$ par $h(x) = 1$ si $0 \leqslant x \leqslant r$, 0 sinon.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto h(t)h(x - t)$ est intégrable sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Soit u définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t)h(x - t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que u est paire, 1-périodique, et que $u(x) = \displaystyle\int_{x-r}^{x+r} h(y)\mathrm{d}y$. En déduire que u est continue et C^1 par morceaux. Vérifier que tous ses coefficients de Fourier complexes sont positifs. Calculer $c_0(u)$.

IV.A.2) Pour $\theta \in \mathbf{R}$, montrer que la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\mathrm{d}x$$

admet une limite finie strictement positive notée $\ell(\theta)$ lorsque $t \to +\infty$.

IV.A.3) Pour $t \in \mathbf{R}$, montrer que la fonction

$$\theta \mapsto \int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\mathrm{d}x$$

est continue sur $\mathbf{R}$.

IV.A.4) En déduire l'existence d'un réel R tel que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,

$$\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\mathrm{d}x > 1.$$

Prouver qu'il existe $x \in]0, R]$ tel que $u(x\cos\theta)u(x\sin\theta) \neq 0$ et conclure.

IV.B - Algorithmique

IV.B.1) Pour $(r, \theta) \in \mathbf{R}^2$, on note $A(r, \theta)$ le point d'affixe $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Soit $I = \left\{ r \in \mathbf{R}^{*+} \;\middle|\; \forall \theta \in [0, 2\pi],\ \mathcal{F} \cap [O, A(r, \theta)] \neq \emptyset \right\}$.

Montrer que I est un intervalle non vide, on note R_0 sa borne inférieure, montrer que $R_0 > 0$.

L'intervalle I est-il ouvert ? fermé ?

IV.B.2) On suppose que l'on dispose d'une fonction tri qui prend en argument une liste de couples de réels et retourne la liste triée dans l'ordre croissant des premiers éléments des couples.

Décrire un algorithme donnant un encadrement de R_0 par deux entiers consécutifs.

IV.C - Arbres ronds

Que peut-on dire si les arbres sont représentés par des disques fermés ?

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2007

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière MP

Dans tout ce problème E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Les vecteurs de E sont représentés par des lettres surmontées de flèches et le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de E est noté $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$. L'orthogonal d'un sous-espace F de E est noté F°. On note a^* l'adjoint de $a \in \mathcal{L}(E)$ pour la structure euclidienne définie par le produit scalaire $(\ |\ )$ et ab le composé de deux endomorphismes a et b de E.

Le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques est noté $\mathcal{S}(E)$. On appelle endomorphisme antisymétrique un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a^* = -a$ et on note $\mathcal{A}(E)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ constitué par les endomorphismes antisymétriques. L'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de E est noté $\mathcal{S}^+(E)$.

On désigne par $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E et $\mathrm{O}^+(E)$ l'ensemble de ceux dont le déterminant est positif.

L'objectif de ce problème est de prouver que certains sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ contiennent des automorphismes orthogonaux. Les deux parties du problème sont indépendantes nonobstant la question I.B.2.

Partie I - Cas d'un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$

I.A -

I.A.1) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée de E.

Prouver que

$$\mathrm{Tr}\, a = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{e_i}|a(\overrightarrow{e_i}))$$

I.A.2) Soient a et b deux endomorphismes de E.

On pose $\langle\langle a, b\rangle\rangle = \mathrm{Tr}(a^*b)$,

montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$. L'orthogonal, pour ce produit scalaire, d'un sous-espace $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(E)$ sera noté $\mathcal{E}^\perp$.

I.A.3) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont des supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{L}(E)$ pour $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$.

I.B -

I.B.1) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ de rang $r \geq 1$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, a^*a = \mathrm{Ker}\, a$ et que $\mathrm{rg}\, a^*a = \mathrm{rg}\, a$.

b) Montrer que a^*a possède au moins une valeur propre non nulle.

c) Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ l'ensemble des valeurs propres non nulles de a^*a. En notant $E(\lambda)$ le sous-espace propre de a^*a associé à la valeur propre λ, montrer que :

$$\mathrm{Im}\, a^* = \mathrm{Im}\, a^*a = \bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i)$$

d) Prouver l'existence d'une base orthonormée $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de E et de scalaires μ_1, μ_2,...,μ_n avec $\mu_i \neq 0$ pour $i \leq r$ tels que $a^*a(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i^2 \overrightarrow{e_i}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour toute base orthonormée (e) vérifiant ces propriétés, que valent les μ_i si $i > r$?

e) La base (e) étant choisie comme dans la question précédente, prouver l'existence d'une base orthonormée $(f) = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ telle que $a(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i \overrightarrow{f_i}$ pour tout i.

I.B.2) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, $a \neq 0$, déduire de la question précédente l'existence de $u \in \mathrm{O}(E)$ tel que $ua \in \mathcal{S}^+(E)$, et $Tr(ua) > 0$.

I.C - Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ et a un élément non nul de $\mathcal{H}^\perp$.

I.C.1) La base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de E étant toujours choisie comme dans la question I.B.1.d, prouver l'existence de $h \in \mathrm{O}(E)$ tel que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $ha(\overrightarrow{e_i}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_i})^\circ$.

I.C.2) Montrer que $\mathcal{H}$ contient au moins un automorphisme orthogonal.

Partie II - Cas où $\dim E = 3$

Dans toute cette partie l'espace euclidien E est de dimension 3 et orienté. On se propose de prouver que tout sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 7 contient au moins une rotation.

II.A - Si $\overrightarrow{k} \in E$ est un vecteur unitaire et si $\theta \in \mathbf{R}$, on note $p_{\overrightarrow{k}}$ le projecteur orthogonal d'image $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{k})$, $\omega_{\overrightarrow{k}}$ l'endomorphisme $\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x}$ et $r_{\theta,\overrightarrow{k}}$ la rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{k}$.

- version du 14 mars 2007 11h49

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire et θ un réel.

II.A.1) Exprimer simplement le produit scalaire $\langle\langle a, p_{\overrightarrow{k}}\rangle\rangle$ à l'aide du produit scalaire de deux vecteurs de E.

II.A.2) Exprimer simplement $r_{\theta,\overrightarrow{k}}$ à l'aide de $p_{\overrightarrow{k}}$ et de $\omega_{\overrightarrow{k}}$. En déduire la relation :

$$\left\langle\left\langle a, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\right\rangle\right\rangle = \cos\theta\,\mathrm{Tr}(a) + (1-\cos\theta)\left(\overrightarrow{k}\,|a(\overrightarrow{k})\right) + \sin\theta\,\langle\langle a, \omega_{\overrightarrow{k}}\rangle\rangle \qquad (1)$$

II.A.3) Que devient cette relation (1) lorsque $a \in \mathcal{S}(E)$, lorsque $a \in \mathcal{A}(E)$?

II.B - Dans cette section $s \in \mathcal{S}^+(E)$ est un endomorphisme symétrique positif de rang ≤ 2 et de trace égale à 1 et ν est un endomorphisme de E non nul mais de trace nulle. On pose $\mathcal{V} = \mathrm{Vect}(s,\nu)^{\perp}$ et on veut montrer que $\mathcal{V} \cap \mathrm{O}^+(E) \neq \emptyset$.

II.B.1) Quelle est la dimension de $\mathcal{V}$?

II.B.2) Soit $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de E. Pour $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in \{-1,1\}^3$, on note $\overrightarrow{x_\epsilon}$ le vecteur $\dfrac{\epsilon_1\overrightarrow{e_1} + \epsilon_2\overrightarrow{e_2} + \epsilon_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{3}}$.

Prouver l'identité : $\sum_{\epsilon\in\{-1,1\}^3}(\overrightarrow{x_\epsilon}\,|s(\overrightarrow{x_\epsilon})) = \frac{8}{3}$.

II.B.3) Dans cette question seulement, on rajoute l'hypothèse ν symétrique.

a) Prouver l'existence d'une base (e) telle que $(\overrightarrow{x_\epsilon}\,|\nu(\overrightarrow{x_\epsilon})) = 0$ pour tout $\epsilon \in \{-1,1\}^3$.

b) Démontrer l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{k}$ unitaire vérifiant :

$$0 \leq \left(\overrightarrow{k}\,|s(\overrightarrow{k})\right) \leq \tfrac{1}{3} \text{ et } \left(\overrightarrow{k}\,|\nu(\overrightarrow{k})\right) = 0$$

c) Établir l'existence de $\theta \in [\pi/2, \pi[$ tel que $r_{\theta,\overrightarrow{k}} \in \mathcal{V}$.

II.B.4) On décompose maintenant ν sous la forme $\nu_1 + a$ où ν_1 est symétrique et a antisymétrique. On choisit $\overrightarrow{k}_1$ unitaire tel que :

$$0 \leq \left(\overrightarrow{k}_1|s(\overrightarrow{k}_1)\right) \leq \tfrac{1}{3} \text{ et } \left(\overrightarrow{k}_1|\nu_1(\overrightarrow{k}_1)\right) = 0$$

a) Dans la suite on posera, pour tout réel x :

$\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x \geq 0$, -1 sinon.

On note $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de vecteurs propres de s et l'on pose :

$$\overrightarrow{k}_i = a_i\overrightarrow{e_1} + b_i\overrightarrow{e_2} + c_i\overrightarrow{e_3} \text{ pour } i = 1,\, 2.$$

Démontrer l'existence d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{k}_2$ tel que $r_{\pi,\overrightarrow{k}_2}$ soit orthogonale à s pour $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ et que les composantes de $\overrightarrow{k}_2$ dans une base de diagonalisation de s soient de mêmes signes que celles de $\overrightarrow{k}_1$.

b) Justifier l'existence d'une fonction $t \mapsto \overrightarrow{k}(t)$ de $[0,1]$ dans E et d'une fonction $t \mapsto \theta(t)$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$\overrightarrow{k}(t) = a(t)\overrightarrow{e_1} + b(t)\overrightarrow{e_2} + c(t)\overrightarrow{e_3}$ avec :

$a(t) = \mathrm{sgn}(a_1)\sqrt{2ta_2^2 + (1-2t)a_1^2}$ si $0 \leq t \leq 1/2$, $a(1-t)$ si $1/2 < t \leq 1$

$b(t) = \mathrm{sgn}(b_1)\sqrt{2tb_2^2 + (1-2t)b_1^2}$ si $0 \leq t \leq 1/2$, $b(1-t)$ si $1/2 < t \leq 1$

$c(t) = \mathrm{sgn}(c_1)\sqrt{2tc_2^2 + (1-2t)c_1^2}$ si $0 \leq t \leq 1/2$, $c(1-t)$ si $1/2 < t \leq 1$

$$\theta(t) = \mathrm{Arccos}\,\frac{\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right)}{\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right) - 1} \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2,\ 2\pi - \theta(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1$$

c) Vérifier que $\overrightarrow{k}(t)$ est unitaire et que $\rho(t) = r_{\theta(t),\overrightarrow{k}(t)}$, est orthogonale à s pour $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$.

d) Montrer que la fonction $t \mapsto \langle\langle\rho(t), \nu\rangle\rangle$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est continue. Étudier les signes de $\langle\langle\rho(0), \nu\rangle\rangle$ et de $\langle\langle\rho(1), \nu\rangle\rangle$ et prouver qu'existe t tel que $\rho(t) \in \mathcal{V}$.

II.C - Cas général

II.C.1) En utilisant le résultat de la question I.B.2, prouver que tout sous espace vectoriel de dimension 7 de $\mathcal{L}(E)$ contient au moins un automorphisme orthogonal.

II.C.2) Un sous-espace vectoriel de dimension 6 de $\mathcal{L}(E)$ contient-il toujours un automorphisme de E ?

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2007

Épreuve : MATHÉMATIQUES I **Filière** PSI

On étudie qualitativement l'évolution d'un système régi par l'équation différentielle du second ordre autonome $x'' = -f'(x)$ où la fonction f est *paire* et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, x est l'état du système, fonction du temps t.

En introduisant la fonction auxiliaire $y = x'$ et l'état vectoriel $X = (x, y)$, on se ramène à l'étude d'un système différentiel autonome du premier ordre de dimension deux, avec condition initiale :

$$(S) \qquad \begin{cases} X' = \Phi(X) = \begin{pmatrix} y \\ -f'(x) \end{pmatrix} \\ X(t_0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

Rappels et définitions

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe C^1 définie sur I, on dira que φ est un C^1-difféomorphisme de I sur son image si φ est une bijection de I sur $\varphi(I)$ dont la fonction réciproque φ^{-1} est aussi de classe C^1. Cela équivaut à ce que φ' ne s'annule pas sur l'intérieur de I. Lorsque $I =]a, b[$, alors φ est un C^1-difféomorphisme de $]a, b[$ sur $]\alpha, \beta[$ ou $]\beta, \alpha[$ avec $\alpha = \lim_{t \to a+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim_{t \to b-} \varphi(t)$. Ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ en raison de la monotonie de φ.

Théorème de Cauchy-Lipschitz : soit g une fonction C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}$; pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ le problème de Cauchy est de résoudre

$$(E) \qquad x' = g(x) \text{ avec la condition initiale } x(t_0) = x_0.$$

Alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que (E) admet une unique solution définie sur $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$.
Si x_1, x_2 sont deux solutions de (E) définies sur le même intervalle I, elles sont égales sur I.

Plan de phase et trajectoire du système : on appelle plan de phase du système l'espace $P = \mathbb{R}^2$ dans lequel on représentera l'état $X = (x, y) = (x, x')$. Le système différentiel (S) est alors associé au *champ de vecteurs* $\Phi(X)$.

Une *trajectoire* du système partant du point $X_0 = (x_0, y_0)$ est une courbe paramétrée définie par $X(t) = (x(t), y(t))$ $t \in I$, vérifiant le système (S) avec la condition initiale $X(t_0) = X_0$.

On notera que le choix de t_0 est arbitraire et ne modifie pas la trajectoire.

Questions préliminaires

1. Quel lien y a-t-il entre une trajectoire $\gamma(t)$ du système et le champ $\Phi(X)$?
2. Démontrer que si $(X(t), t \in I)$ est une solution de (S), la fonction d'énergie $F(X) = \dfrac{y^2}{2} + f(x)$ est constante sur I. Pour toute trajectoire issue de X_0, on notera $h = F(X_0)$ cette valeur constante, ou énergie de la trajectoire. Il en résulte que si $X = (x, y)$, la conservation de l'énergie
$$(H) \qquad F(X) = h$$
donne une équation implicite des trajectoires dans le plan de phase P.

Partie I - Premiers exemples

On prend ici $f(x) = \dfrac{k}{2}x^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

I.A - On suppose : $k = \omega^2 > 0$.

I.A.1) Déterminer la solution $t \mapsto x(t)$ d'énergie $h > 0$. Quelle est la période T de cette solution ?

I.A.2) Démontrer que la trajectoire associée dans l'espace des phases est une courbe fermée Γ_h dont on précisera la nature et tracera le graphe

a) Donner son équation et ses points caractéristiques en fonction de ω et $h = F(X_0)$.

b) Indiquer sur le graphe le sens de parcours de cette trajectoire.

I.A.3) Que vaut la solution $t \mapsto X(t)$ si $X_0 = (0, 0)$?

Quelles sont toutes les trajectoires d'énergie 0 ?

I.B - On suppose : $k = -\omega^2 < 0$.

I.B.1) Calculer la solution générale $t \mapsto x(t)$.

I.B.2) Donner l'équation des trajectoires γ_h et les représenter graphiquement selon que $h > 0$, $h < 0$ ou $h = 0$ (on indiquera le sens de parcours de ces trajectoires). Quelle est la nature de ces courbes, sont-elles fermées ?

I.B.3) Que se passe-t-il si $X_0 = (0, 0)$?

Quelles sont toutes les trajectoires d'énergie nulle ?

- version du 14 mars 2007 14h57

Partie II - Propriétés générales des trajectoires

On s'intéresse ici aux solutions de (S) partant à l'instant $t_0 = 0$ d'un point $X_0 = (x_0, y_0)$ du demi-plan supérieur $P^+ = \{(x, y) \mid y > 0\}$. On pose, comme convenu, $h = F(X_0)$.

II.A -

II.A.1) Soit $U = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) < h\}$. Démontrer qu'il existe un unique intervalle ouvert non vide *maximal* $I(x_0) =]a, b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) tel que $x_0 \in I(x_0) \subset U$.

II.A.2) En résolvant l'équation (H) par rapport à y, obtenir une équation différentielle du premier ordre en x.

II.A.3) Montrer que la fonction τ, définie par

$$\tau(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(h - f(u))}}$$

est un C^1-difféomorphisme de $I(x_0) =]a, b[$ sur $J(x_0) =]\alpha, \beta[$.

Résoudre sur l'intervalle $J(x_0)$ l'équation obtenue à la question précédente.

II.B - Démontrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (\psi(t), \psi'(t))$ avec $\psi(t) = \tau^{-1}(t)$ est solution de (S) définie sur l'intervalle $J(x_0) =]\alpha, \beta[$.

II.C - On considère une autre solution de (S), notée $X_1 : t \mapsto (x_1(t), x_1'(t))$ qui est définie sur le même intervalle $J(x_0)$ telle que $X_1(0) = (x_0, y_0)$.

Soit $J_1 =]u, v[\subset J(x_0)$ l'intervalle maximal (contenant 0) sur lequel $x_1'(t) > 0$.

II.C.1) On suppose $\alpha < u$ (resp. $v < \beta$). Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et en déduire une contradiction (examiner les signes de $\psi'(u), x_1'(u)$).

II.C.2) En déduire que Ψ est l'unique solution de (S) définie sur $J(x_0)$ satisfaisant à la condition initiale $\Psi(0) = (x_0, y_0)$.

II.D - Démontrer que $Z : t \mapsto (\psi(-t), -\psi'(-t))$ est l'unique solution de (S) sur $]-\beta, -\alpha[$ partant à l'instant $t = 0$ du point $Z_0 = (x_0, -y_0)$.

II.E - On veut ici caractériser les différents types de trajectoires possibles.

II.E.1) On suppose ici que $-\infty < a,\ f'(a) \neq 0$ et $b < +\infty,\ f'(b) \neq 0$.

Démontrer les propriétés suivantes :

a) $f(a) = f(b) = h,\ f'(a) < 0,\ f'(b) > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer $\lim_{t \to \alpha+} \Psi(t)$ et $\lim_{t \to \beta-} \Psi(t)$, puis montrer que Ψ se prolonge sur $[\alpha, \beta]$.

c) Montrer que la trajectoire Ψ se prolonge par la fonction $t \mapsto Z(t - 2\beta)$ définie sur l'intervalle $]\beta, 2\beta - \alpha[$ en une solution $t \mapsto X(t)$ de $(\mathcal{S})$ définie sur $]\alpha, 2\beta - \alpha[$ dont les deux extrémités coïncident.

d) Montrer que $t \mapsto X(t)$ se prolonge en une solution périodique sur $\mathbb{R}$ en posant $X(\alpha) = (a, 0)$. Exprimer la période T sous forme intégrale, représenter le graphe de la trajectoire Γ dans P, en précisant les temps associés aux points $(a, 0), X_0, (b, 0), Z_0, (a, 0)$.

II.E.2) On suppose ici que $-\infty < a,\ f(a) = h$ et $f'(a) = 0,\ f''(a) \neq 0$.

Démontrer que $f''(a) < 0$ et $\alpha = -\infty$. Énoncer le résultat équivalent pour b.

II.E.3) On suppose ici que $a = -\infty$. Que peut-on dire de la trajectoire sur l'intervalle de temps $]\alpha, 0[$? Énoncer le résultat équivalent pour b.

II.E.4) Pour les trajectoires Γ_h ou γ_h étudiées en partie I, préciser les points a, b et leur nature (type II.E.1) ou II.E.2) ou II.E.3)).

Partie III - Linéarisation autour d'un équilibre

Soit $e \in \mathbb{R}$, on dit que $E = (e, 0)$ est un point d'équilibre du système (S) si

$$\Phi(E) = 0 \Leftrightarrow f'(e) = 0.$$

On associe alors à (S) le système linéarisé au voisinage de E :

$$(L) \qquad \begin{cases} u' = v \\ v' = -f''(e)u \end{cases}$$

Ses solutions donnent une première approximation de celles de (S) pour des conditions initiales proches de E.

III.A - Quelle est la solution de (S), définie sur $\mathbb{R}$, partant de $X_0 = E$?

III.B - Déterminer les solutions de (L) (on posera $f''(e) = \pm\gamma^2$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^+$).

III.C - Le point d'équilibre $(e, 0)$ est dit *stable* si les solutions de (L) restent bornées lorsque $t \to \pm\infty$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e, 0)$ soit un équilibre stable.

On se place dans cette hypothèse pour la suite de cette partie.

Dans toute la suite de cette partie on désigne par e un nombre réel pour lequel $(e, 0)$ est un point d'équilibre stable tel que $f(e) = 0$.

III.D -

III.D.1) Démontrer qu'il existe un intervalle $[c, d]$ contenant e tel que la restriction de f à $[c, e]$ (resp. $[e, d]$) soit un C^1-difféomorphisme sur son image $[0, f(c)]$ (resp.$[0, f(d)]$).

III.D.2) En déduire l'existence de $H > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, H]$, l'équation $f(x) = h$ admet deux solutions $x^-(h),\ x^+(h)$ avec

$$x^-(h) < e < x^+(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} x^-(h) = \lim_{h \to 0} x^+(h) = 0.$$

III.D.3) Démontrer que $(e,0)$ est un minimum local strict de $F(X)$, en déduire qu'il existe $R>0$ tel que, pour toute condition initiale $X_0 \in B(E,R)$ (disque de centre E et de rayon R), la trajectoire associée est périodique. Déterminer la période $T(h)$ comme intégrale fonction de h.

III.E - Soit une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive avec $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

On pose, pour simplifier, $x_n^+ = x^+(h_n)$, $x_n^- = x^-(h_n)$, $T_n = T(h_n)$.

III.E.1) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(u)$ au voisinage de e.

En déduire une expression de h_n en fonction de x_n^+ et v.

III.E.2) En paramétrant le segment $[e, x_n^+]$ par $v \in [0,1]$, démontrer l'existence d'une suite de fonctions continues (ε_n^+) qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, telle que

$$\int_e^{x_n^+} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(h_n - f(u))}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{(1-v^2)f''(e) + \varepsilon_n^+(v)}}$$

Énoncer le résultat analogue sur l'intervalle $[x_n^-, e]$.

III.E.3) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ puis $\lim\limits_{h\to 0} T(h)$ (énoncer précisément le théorème utilisé). Quelle période retrouve-t-on ?

Partie IV - Le pendule non linéaire

On prend ici $f(x) = -\cos(x)$. Le système (S) représente alors le mouvement d'un pendule non linéaire (grandes élongations). Le champ de vecteur $\Phi(X)$ est alors 2π-périodique en x.

IV.A - Déterminer tous les points d'équilibre. Lesquels sont stables ?

IV.B - Démontrer que toute trajectoire du système d'énergie $h \in]0,1[$ est périodique. Comment sont définis les points a, b ?

IV.C - Pour une condition initiale $X_0 \in P^+$ d'énergie $h>1$, préciser les points a, b et leur type (cf. II.E).

Démontrer qu'alors on a $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, tracer qualitativement la trajectoire en indiquant le sens du parcours.

IV.D - On prend ici une condition initiale $X_0 = (0, y_0)$ d'énergie $h=1$.

Que vaut $y_0 > 0$?

IV.D.1) Préciser les points a, b et utiliser II.E. Quelle est le type des points a, b ? Que valent ici α, β ? Interpréter le résultat par rapport au pendule.

IV.D.2) Calculer explicitement la fonction $\tau(x)$, en déduire $x(t)$.

IV.D.3) Démontrer que la trajectoire $X(t)$ et sa symétrique $Z(t)$ séparent les trajectoires périodiques des trajectoires non périodiques.

IV.D.4) Représenter qualitativement les trois familles de trajectoires dans le plan P, avec les sens de parcours.

IV.E - On perturbe le pendule, et la fonction f devient ici $f(x) = -\cos(x) + \frac{1}{20}x^2$.

IV.E.1) Déterminer le nombre de points d'équilibre et leur stabilité.

IV.E.2) Démontrer que toutes les trajectoires sont ici du type II.E.1, à l'exception de celles passant par les équilibres instables.

IV.E.3) Établir un programme pour calculer la position du point d'équilibre $(e,0)$ le plus proche à droite de $(0,0)$.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2007

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PSI

La représentation plane de figures tridimensionnelles suppose le choix d'une application p de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, grâce à laquelle une figure $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^3$ devient, dans $\mathbb{R}^2$, le *croquis* : $p(\mathscr{F})$. Ici, on fait le choix d'une application p **linéaire**, connue sous le nom de *perspective cavalière*. Toutefois, pour la commodité des calculs, on a préféré faire jouer aux vecteurs de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ des rôles différents de ceux qu'ils ont d'habitude dans ce type de perspective.

Dans tout le problème, les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur structure euclidienne canonique orientée et pourront être considérés comme des espaces vectoriels réels de vecteurs-colonnes, ou des espaces affines réels de vecteurs-colonnes. Aussi bien pour ce qui concerne $\mathbb{R}^2$ que $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire canonique sera noté $<\ ,\ >$ et la norme euclidienne canonique sera notée $\|\ \cdot\ \|$.

On donne deux réels strictement positifs α et β et on considère l'application, notée p, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au vecteur-colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \end{pmatrix}$. Si $\mathscr{P}$ est une partie de $\mathbb{R}^3$, on dira qu'elle est *représentée en vraie grandeur* par p si, quels que soient M et M' dans $\mathscr{P}$, on a $\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|\overrightarrow{MM'}\|$.

Partie I - Généralités

I.A -

I.A.1) Montrer que p est une application linéaire. Déterminer la matrice de p relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Déterminer le noyau et l'image de p.

Pour toute la suite du problème, on désigne par $\overrightarrow{\nu}$ le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

I.A.2) Représenter sur un même dessin les images par p des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Ce dessin donne une représentation en perspective de la base formée par ces trois vecteurs.

I.B - Interprétation géométrique de p

Pour cette seule question, on introduit l'endomorphisme $\overline{p}$ de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur-colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \\ 0 \end{pmatrix}$.

Interpréter géométriquement p grâce à $\overline{p}$ (*on pourra former* $\overline{p} \circ \overline{p}$).

Est-il vrai que $\|p(X)\| \leqslant \|X\|$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$?

I.C -

I.C.1) Soit M_0 un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

On considère la droite affine $D = M_0 + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{M_0 + \lambda\overrightarrow{u}\}$.

Montrer que $p(D) = p(M_0) + \mathbb{R}\, p(\overrightarrow{u})$.

I.C.2) Soit D une droite affine de $\mathbb{R}^3$. Montrer que son image par p est une droite affine ou est réduite à un point, en discutant selon un vecteur directeur de D.

I.C.3) Soit D et D' deux droites affines de $\mathbb{R}^3$ dont les images par p sont des droites affines de $\mathbb{R}^2$.

a) Si D et D' sont sécantes, montrer que leurs images par p le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

b) Si D et D' sont parallèles, montrer que leurs images par p le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

I.C.4) Soit Π un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Discuter la nature de $p(\Pi)$ suivant $\overrightarrow{\nu}$ et Π.

I.D - Une propriété métrique de p

Soit un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; on pose $q(X) = \|X\|^2 - \|p(X)\|^2$.

I.D.1) Montrer que l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(X) = 0$ est la réunion de deux plans Π_1 et Π_2 que l'on caractérisera par leurs équations cartésiennes.

En déduire que les plans affines parallèles à l'un ou l'autre de ces deux plans sont représentés en vraie grandeur par p.

I.D.2)

a) Montrer, en le déterminant, qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint u

- version du 28 mars 2007 9h34

de $\mathbb{R}^3$, tel que $q(X) = < u(X),\, X >$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$.

b) Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de u puis le signe des valeurs propres non nulles de u.

I.E - Une généralisation

I.E.1) Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$; montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs soient dans P.

I.E.2) Soit u' un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^3$; on pose $q'(X) = < u'(X),\, X >$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, on suppose qu'il existe P, plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, tel que $q'(X) = 0$ pour tout $X \in P$ et, P étant supposé choisi, on choisit $\mathscr{B}$ comme dans la question I.E.1. Montrer que la matrice de u' relativement à $\mathscr{B}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

I.E.3) Si $(a,\, b) \neq (0,\, 0)$, montrer que l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q'(X) = 0$ est la réunion de deux plans puis étudier le signe des valeurs propres non nulles de u'.

I.E.4) Discuter le rang de u' en fonction de $(a,\, b,\, c)$.

Dans les parties **II** et **III**, on se limite au cas où $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$ pour un $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ supposé choisi et, $R > 0$ étant donné, on considère la sphère S d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Partie II - L'image d'une sphère

Le but de cette partie est d'étudier l'image $p(S)$ de S par p.

II.A - Une inéquation définissant le domaine $p(S)$

II.A.1) Soit $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'image réciproque $p^{-1}(\{\xi\})$ est la droite affine D_ξ passant par le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\nu}$. En conclure que

$$\xi \in p(S) \iff S \cap D_\xi \neq \emptyset$$

et que cela équivaut à dire que l'équation en t

$$(x + t\cos\theta)^2 + (y + t\sin\theta)^2 + t^2 - R^2 = 0$$

admet au moins une racine réelle.

II.A.2) En déduire que $p(S)$ est définie par l'inéquation $\Phi(x,\, y) \leqslant 2R^2$, où l'on a posé

$$\Phi(x,\, y) = 2(x^2 + y^2) - (x\cos\theta + y\sin\theta)^2.$$

On désigne par $\mathscr{E}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $\Phi(x,\, y) - 2R^2 = 0$.

II.A.3) On considère le repère affine $\mathscr{R}'$ déduit du repère canonique $\mathscr{R}$ de $\mathbb{R}^2$ par la rotation d'angle θ autour de l'origine.

a) Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$ et de coordonnées (x', y') dans $\mathscr{R}'$.

Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

b) Montrer que $\mathscr{E}$ est une ellipse et donner son équation cartésienne dans $\mathscr{R}'$.

c) Indiquer les éléments remarquables de $\mathscr{E}$: axe focal, demi-longueur des axes et excentricité. Montrer que les foyers de $\mathscr{E}$ sont les points F et F' dont les coordonnées relatives à $\mathscr{R}'$ sont respectivement $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Déterminer une inéquation de $p(S)$ dans le repère $\mathscr{R}'$ et en déduire que $p(S)$ est le domaine borné limité par $\mathscr{E}$.

Représenter enfin $p(S)$ soigneusement dans le repère $\mathscr{R}'$.

II.B - Étude du contour apparent de S

II.B.1) Montrer, en le déterminant, que tout élément $\xi \in \mathscr{E}$ ne possède qu'un seul antécédent par p dans S.

Indication : On pourra déterminer $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\pi(\xi) = \xi + t_0\overrightarrow{\nu}$.

Cet antécédent sera noté $\pi(\xi)$ et on désignera par Σ l'ensemble des $\pi(\xi)$, lorsque ξ décrit $\mathscr{E}$.

II.B.2) Pour chaque $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{E}$, calculer $< \pi(\xi),\, \overrightarrow{\nu} >$ et en déduire que Σ est inclus dans P_0, le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{\nu}$.

II.B.3) Réciproquement, soit $X \in S$ tel que $< \overrightarrow{\nu},\, X >= 0$. Montrer que $p(X) \in \mathscr{E}$.

Indication : On pourra calculer $\Phi\big(p(X)\big)$ ou s'aider d'un dessin.

Conclure quant à la nature de Σ. La représentation de Σ par p est-elle en vraie grandeur ? Quelle conclusion peut-on en tirer en terme de représentation cavalière d'une sphère ?

II.C - De certaines symétries vectorielles laissant stable $\mathscr{E}$

II.C.1) Montrer que la restriction p_0 de p à P_0 est une bijection de P_0 sur $\mathbb{R}^2$.

On en notera p_1 la bijection réciproque.

II.C.2) Soit σ une application linéaire de P_0 sur lui-même, supposée involutive, c'est-à-dire vérifiant $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_{P_0}$.

a) Montrer que $s = p_0 \circ \sigma \circ p_1$ est une involution linéaire de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

b) Comment obtient-on les sous-espaces propres de s en fonction de ceux de σ ?

c) Montrer que s laisse stable $\mathscr{E}$ si, et seulement si, σ laisse stable Σ.

Partie III - Balayage de $p(S)$ par des cercles

III.A - Question préliminaire

On suppose donné un intervalle ouvert I non vide et un arc Γ de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que, pour un $t_0 \in I$, le vecteur-dérivée $\Gamma'(t_0)$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{\nu})$. Dans ces conditions, montrer que le point $p\,(\Gamma(t_0))$ est régulier pour l'arc $p \circ \Gamma$, de I dans $\mathbb{R}^2$, et donner un vecteur directeur de la tangente à l'arc en ce point.

III.B -

III.B.1) Soit un réel $\delta \in [\,-\pi/2\,;\,\pi/2\,]$; montrer que l'intersection de S et du plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = R\sin\delta$ est le cercle C_δ paramétré par

$$\varphi \in \mathbb{R} \longmapsto M_\delta(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\delta\cos\varphi \\ R\cos\delta\sin\varphi \\ R\sin\delta \end{pmatrix}$$

En donner le centre et le rayon.

III.B.2) Montrer que l'intersection de P_0 et de C_δ est non vide si, et seulement si, $|\delta\,| \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Montrer plus précisément que cette intersection se compose alors de deux points lorsque $|\delta| < \dfrac{\pi}{4}$.

III.B.3) Soit $\delta \in [\,-\pi/4\,;\,\pi/4\,]$ et un point $M \in P_0 \cap C_\delta$. On choisit un réel φ_0 tel que $M = M_\delta(\varphi_0)$. Montrer que $M \in \Sigma$ puis que sont orthogonaux à $\overrightarrow{OM}$: le vecteur $\overrightarrow{\nu}$, le vecteur $\left[\dfrac{\mathrm{d}M_\delta}{\mathrm{d}\varphi}\right]_{\varphi=\varphi_0}$ ainsi que tout vecteur tangent en M à Σ.

III.B.4) Montrer que les $p(C_\delta)$, où δ décrit $[\,-\pi/2\,;\,\pi/2\,]$, sont des cercles et que $p(S)$ en est la réunion.

Déterminer le centre Ω_δ et le rayon R_δ du cercle $p(C_\delta)$.

En utilisant en particulier III.A et III.B.3, montrer que, lorsque $|\delta| < \dfrac{\pi}{4}$, le cercle $p(C_\delta)$ est tangent à $\mathscr{E}$ en deux points distincts. Étudier aussi le cas de $p(C_{\pi/4})$.

III.B.5) Lorsque $0 \leqslant \delta < \delta' \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, montrer que $p(C_{\delta'})$ et $p(C_\delta)$ sont sécants. Lorsque $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \delta < \delta' \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, montrer que $p(C_{\delta'})$ est intérieur à $p(C_\delta)$.

III.C - La récompense finale

Représenter sur un même dessin : $\mathscr{E}$, un cercle $p(C_\delta)$ avec $0 \leqslant \delta < \dfrac{\pi}{4}$, le cercle $p(C_{\pi/4})$ et un cercle $p(C_\delta)$ avec $\dfrac{\pi}{2} > \delta > \dfrac{\pi}{4}$.

III.D -

Montrer qu'il existe une seconde famille de cercles inclus dans S dont les images par p soient des cercles et dont la réunion des images par p soit encore $p(S)$.

• • • FIN • • •

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PC

Dans tout le problème, on notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Partie I -

I.A -

I.A.1) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $m_n(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On admettra dans toute la suite de ce problème que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

I.A.2) Déterminer m_1.

I.A.3) Lorsque $n \geqslant 2$, donner une relation de récurrence liant m_n et m_{n-2}. En déduire une expression de m_n en fonction de n.

I.B - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur en fonction de t.

On pourra considérer la forme canonique du trinôme $x \mapsto -\dfrac{x^2}{2} - tx$.

I.C -

I.C.1) Le réel t étant fixé, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^k x^k}{k!} f(x)$.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x)$

I.C.2) Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}.$$

I.C.3) Retrouver la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ obtenue précédemment.

Partie II -

Dans toute la suite du problème, on note E l'ensemble des fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif $M(g)$ et un réel strictement positif λ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leqslant M(g) f(\lambda x)$.

II.A - Démontrer que E muni des lois $+$ et $\cdot$ usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui contient f.

II.B - Soient u et v deux éléments de E. On note $u * v$ l'application définie, pour tout réel x pour lequel la formule a un sens, par

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t) v(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

II.B.1) Démontrer que $u * v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

II.B.2) Démontrer que $u * v = v * u$.

II.B.3) Déterminer $(f * f)(x)$.

II.B.4) Démontrer que $u * v$ appartient à E (on utilisera le résultat de la question précédente).

II.C - Soit $u \in E$. On définit l'application $\widehat{u}$ par : $\widehat{u}(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} u(x)\,\mathrm{d}x$.

II.C.1) Montrer que $\widehat{u}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

II.C.2) Montrer que $\widehat{u}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $\widehat{u}'(t)$ et $\widehat{u}''(t)$ à l'aide d'intégrales.

II.D - *Dans cette section D seulement, on admet le résultat suivant :*

Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications h_1 et h_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y)| \leqslant h_1(x) h_2(y)$$

alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$ *sont convergentes et ces deux intégrales doubles sont égales.*

Soient u et v deux éléments de E.

- version du 19 mars 2007 12h21

II.D.1) Démontrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout couple $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$-t^2 - (x-t)^2 \leqslant -a(t^2+x^2).$$

II.D.2) Démontrer la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} u*v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x . \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\mathrm{d}x.$$

II.D.3) Démontrer la relation, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{u*v}(\theta) = \int_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x\theta}\cdot(u*v)(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{u}(\theta).\widehat{v}(\theta).$$

on pourra utiliser l'égalité

$$(t+\frac{\theta}{2\gamma})^2 + ((x+\frac{\theta}{\gamma}) - (t+\frac{\theta}{2\gamma}))^2 = t^2 + (x-t)^2 + \frac{\theta x}{\gamma} + \frac{\theta^2}{2\gamma^2}.$$

Dans la suite de ce problème, on considère le sous ensemble E_1 de E dont les éléments sont les fonctions $h \in E$ telles que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On notera que la fonction f de la partie I est un élément de E_1. À toute fonction $h \in E_1$, on associe la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :

$$h_1 = h \text{ et pour tout } n \geqslant 2,\ h_n = h_{n-1} * h_1.$$

On remarquera que la fonction h_n est alors élément de E d'après II B 4.

L'objectif est d'étudier certaines propriétés de cette suite de fonctions, dans un premier temps sur des exemples puis dans le cas général.

Partie III -

III.A - Soit h un élément de E_1.

III.A.1) Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de E_1.

III.A.2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h_n}(x)$ en fonction de $\widehat{h}(x)$ et de n.

III.B - Dans cette question on étudie la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ associée à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$ étudiée dans la partie I (on a donc posé $h = f$).

III.B.1) Déterminer une constante K_2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = K_2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.

III.B.2) Déterminer une constante K_n telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = K_n\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n}}$.

III.B.3) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

III.C - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}\cos(x) & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

III.C.1) Démontrer que $g \in E_1$.

III.C.2) Montrer que la fonction $g*g$ est paire. Donner pour $x \geqslant 0$ l'expression de $(g*g)(x)$ en fonction des valeurs de x : on distinguera deux intervalles pour x.

III.C.3) Démontrer que g_n est nulle en dehors d'un intervalle $[-a_n, a_n]$ que l'on précisera.

III.C.4) Déterminer l'expression de $\widehat{g}(t)$ en fonction de t.

III.C.5) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{g_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ en fonction de t.

Partie IV -

Soit h un élément de E_1. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M_{1,n} = \int_{\mathbb{R}} x h_n(x)dx\ , M_{2,n} = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x)dx \text{ et } V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2$$

IV.A -

IV.A.1) Montrer que la fonction $\widehat{h_n}$ possède un développement limité à l'ordre 2 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{1,n}$ et $M_{2,n}$.

IV.A.2) En déduire que $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $V_n = nV_1$.

IV.B - On suppose dans cette question que la fonction h est telle que $M_{1,1} = 0$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES II

Préliminaires et notations :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. K désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $K[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans K.
- L'espace $\mathbb{R}^n$ sera si nécessaire muni de son produit scalaire canonique, et rapporté à la base canonique qui est orthonormale.

Partie I -

On rappelle que $E = K^n$ est un espace vectoriel sur K de dimension n pour les lois usuelles. On munit de plus E d'une multiplication notée $\times$ et définie par :

Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans E, $x \times y = (x_1 \cdot y_1, ..., x_n \cdot y_n)$.

I.A - Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ fixé dans E. Pour $P \in K[X]$, on notera :
$P(x) = (P(x_1), ..., P(x_n))$.

I.A.1) Vérifier que $\Phi : P \mapsto P(x)$ est une application linéaire de $K[X]$ vers E, telle que $\Phi(P \cdot Q) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$ pour tout $P, Q \in K[X]$.

I.A.2) Montrer que $A_x = \{P(x), P \in K[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Montrer que A_x est stable pour $\times$, c'est-à-dire que, si $y, z \in A_x$ alors $y \times z \in A_x$.

I.A.3) On suppose ici $x_i \neq x_j$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$.

On note $K_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à $n-1$.

Montrer que la restriction de Φ à $K_{n-1}[X]$ est injective.

Montrer que A_x est de dimension n.

I.B - Soit $y = (y_1, ..., y_n)$ donné dans E, ainsi que $P \in K[X]$ fixé de degré ≥ 1.

On s'intéresse à l'ensemble noté $R_{y,P}$: $R_{y,P} = \{x \in E / P(x) = y\}$.

I.B.1) Montrer que si $K = \mathbb{C}$, $R_{y,P}$ n'est jamais vide.

I.B.2) Montrer que si $K = \mathbb{R}$, $R_{y,P}$ peut être vide : donner un exemple.

I.B.3) On suppose $K = \mathbb{C}$, et $P(X) = X^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le cardinal de $R_{y,P}$, noté $\mathrm{Card}(R_{y,P})$, en fonction de p et de $m_y = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1, n]\!] / y_i \neq 0\})$.

Filière PC

I.B.4) D'une façon générale, donner un majorant de $\text{Card}(R_{y,P})$ en fonction de n et du degré de P.

I.C - Pour Γ partie non vide de E, et $P \in K[X]$ fixé de degré ≥ 1, on s'intéresse à l'ensemble noté $R_{\Gamma,P} = \{x \in E / P(x) \in \Gamma\}$.

I.C.1) Exemple 1 : On prend $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $P(X) = X^2$. Déterminer et dessiner Γ et $R_{\Gamma,P}$, dans chacun des cas suivants :

i) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 1\}$,

ii) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 1\}$,

iii) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$.

I.C.2) Exemple 2 : On prend $K = \mathbb{R}$, $n = 3$, $P(X) = X^2$. Déterminer et donner la nature géométrique de Γ et $R_{\Gamma,P}$, dans chacun des deux cas suivants :

i) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 1\}$,

ii) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 1\}$.

I.C.3) Exemple 3 : On prend $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $P(X) = X^3 - X$ et soit :

$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$.

Déterminer et dessiner Γ et $R_{\Gamma,P}$.

I.D - Pour cette question, on pourra utiliser sur E la norme infinie définie par : si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est dans E, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

I.D.1) On suppose que Γ est de cardinal fini. Donner un majorant de $\text{Card}(R_{\Gamma,P})$ en fonction de $\text{Card}(\Gamma)$, de n et du degré de P.

I.D.2) Si Γ est borné, montrer que $R_{\Gamma,P}$ est borné. Lorsque $K = \mathbb{R}$, donner un exemple pour lequel Γ est non borné et $R_{\Gamma,P}$ est borné. Lorsque $K = \mathbb{C}$, si $R_{\Gamma,P}$ est borné, montrer que Γ est borné.

Partie II -

Soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie $N \geq 1$ et $\mathcal{L}(V)$ l'espace vectoriel sur K des endomorphismes de V, qui est aussi muni de la loi de composition $\circ$.

On note id_V l'application identité de V dans V.

II.A - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq N$.

On considère n projecteurs non nuls $p_1, p_2, ..., p_n$ de $\mathscr{L}(V)$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \mathrm{id}_V, \text{ et } p_i \circ p_j = 0 \text{ pour tout } i, j \in [\![1, n]\!] \text{ tels que } i \neq j.$$

On pose $\mathscr{A} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k p_k / (x_1, ..., x_n) \in K^n \right\}$.

II.A.1) Montrer que $\mathscr{A}$ est un K-espace vectoriel de dimension n, stable pour $\circ$.

II.A.2) Montrer que l'application Ψ de E vers $\mathscr{A}$, définie par :

$$\Psi : (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

est un isomorphisme tel que, pour tout $x, y \in E$, $\Psi(x \times y) = \Psi(x) \circ \Psi(y)$.

II.A.3) Montrer que, pour tout $x \in E$ et $P \in K[X]$, $\Psi(P(x)) = P(\Psi(x))$.

II.B - Soit $f \in \mathscr{A}$, avec $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k$, où $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$.

On suppose $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$.

II.B.1) Soit $g \in \mathscr{A}$ avec $g = \sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k$, et $P \in K[X]$.

Montrer que $g = P(f)$ si et seulement si $P(\lambda_k) = \mu_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

II.B.2) Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $P_j \in K[X]$ tel que $p_j = P_j(f)$.

II.B.3) Montrer que f est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres.

II.C - Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ supposé diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres distinctes et on pose $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Pour $P \in K[X]$ donné, on note $R_{f,P} = \{ g \in \mathscr{L}(V) / f = P(g) \}$.

II.C.1) Donner n projecteurs non nuls $p_1, p_2, ..., p_n$ tels que

$\sum_{k=1}^{n} p_k = \mathrm{id}_V$, $p_i \circ p_j = 0$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, et $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k$.

On dispose ainsi de l'application Ψ définie en II.A.

II.C.2) Soit $g \in R_{f,P}$.

Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que chaque sous-espace $V_j = \ker(f - \lambda_j \mathrm{id}_V)$ est stable par g, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

On suppose que g est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres pour f et propres pour g.

II.C.3) Montrer que $\Psi(R_{\lambda,P}) \subset R_{f,P}$ et que, si toutes les valeurs propres de f sont simples, on a l'égalité $\Psi(R_{\lambda,P}) = R_{f,P}$.

On suppose que $K = \mathbb{C}$ et que $P(X) = X^r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le cardinal de $R_{f,P}$ lorsque toutes les valeurs propres de f sont simples.

II.C.4) On suppose que $K = \mathbb{C}$ et que $P(X) = X^r$ avec $r \in \mathbb{N}$ et $r \geq 2$.

Lorsque $N \geq 2$, montrer que $R_{\mathrm{id}_V,P}$ est de cardinal infini.

Montrer que $R_{f,P}$ est de cardinal infini si et seulement si f admet au moins une valeur propre multiple.

II.C.5) On suppose que $K = \mathbb{C}$ et que $P(X) = X^r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$.

Si l'on suppose que les complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls, montrer que si $g \in R_{f,P}$, alors g est diagonalisable.

Si l'on suppose que $\lambda_1 = 0$ et que $g \in R_{f,P}$, montrer que g est diagonalisable si et seulement si f et g ont le même rang.

II.D - Exemple 4 : On prend $K = \mathbb{R}$, et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer, par leur matrice G dans la base canonique, toutes les applications $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, telles que $g^2 = f$.

Partie III -

Dans cette partie on considère un espace vectoriel euclidien V de dimension $N \geq 1$, muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$, la norme euclidienne associée étant notée $\|.\|$.

On note $O(V)$ le groupe (pour la loi $\circ$) des automorphismes orthogonaux de V.

On note de plus $S(V)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de V.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour $f \in \mathscr{L}(V)$, on s'intéresse à $R_r(f) = \{g \in \mathscr{L}(V) / f = g^r\}$ et aux sous-ensembles $S(V) \cap R_r(f)$ ou $O(V) \cap R_r(f)$.

III.A -

III.A.1) Montrer que si $S(V) \cap R_r(f)$ est non vide alors $f \in S(V)$.

III.A.2) On suppose ici que r est pair et $f \in S(V)$. Montrer que $S(V) \cap R_r(f)$ est non vide si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont dans $\mathbb{R}_+$.

III.A.3) On suppose ici que r est impair et $f \in S(V)$. Montrer que $S(V) \cap R_r(f)$ est non vide et est réduit à un seul élément.

III.A.4) Exemple 5 :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétriques telles que $B^3 = A$.

III.B -

III.B.1) Montrer que si $O(V) \cap R_r(f)$ est non vide, alors $f \in O(V)$.

III.B.2) Soit $g \in O(V)$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de V stable par g, il en est de même de son orthogonal $F^\perp$.

III.B.3) On suppose ici $N = 2$ et V orienté, et on suppose que f est la rotation d'angle de mesure θ, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer $O(V) \cap R_r(f)$.

III.B.4) Exemple 6 :

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.

Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonales telles que $B^2 = A$.

III.C - Soit F un sous-espace vectoriel de V de dimension m, et f la symétrie orthogonale par rapport à F.

III.C.1) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur r et m pour que $R_r(f)$ soit non vide, et exhiber dans ce cas un élément $g \in O(V) \cap R_r(f)$.

III.C.2) Étudier $S(V) \cap R_r(f)$.

III.D - On suppose ici que $N = 3$, et on considère l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique, la base canonique étant orthonormale directe.

Soir $r \in \mathbb{N}^*$, et soit f la rotation d'angle de mesure θ, avec $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, d'axe $D = \mathbb{R}u$, où $\|u\| = 1$; $f \neq \mathrm{id}_V$.

III.D.1) Déterminer $O(V) \cap R_r(f)$.

III.D.2) Déterminer $O(V) \cap R_r(-f)$.

III.D.3) Exemple 7 :

Déterminer, par leur matrice dans la base canonique, toutes les rotations g de V, telles que g^3 soit la rotation d'axe dirigé par $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Partie I - Calculs préliminaires

Dans tout ce problème a et v désignent deux nombres réels, a est strictement positif.

I.A - Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\varphi(x) = \frac{(\sin(x))^2}{x^2}$$ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$.

On le note encore φ.

Montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puis que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.B -

I.B.1) Soit b un réel tel que $0 < a < b$. Montrer que l'on a :

$$\int_a^b \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos(y)}{y}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(y)}{y^2}\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos(y)}{y}\right]_a^b + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \varphi(x)\mathrm{d}x \ .$$

I.B.2) En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ ainsi que l'égalité :

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x \ .$$

I.C - Si $[\alpha,\beta]$ est un segment réel et si h est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{C}$ montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_\alpha^\beta h(t)e^{itv}\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque v tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

I.D -

I.D.1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et h_n la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$h_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \ .$$

Montrer que h_n admet un prolongement par continuité en 0.

En déduire la convergence de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$.

I.D.2) Calculer I_0 puis, en calculant $I_{n+1} - I_n$, en déduire I_n.

Filière TSI

I.D.3) Soit h l'application définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$h(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}.$$

a) Donner un développement limité de h d'ordre 1 en 0.

b) En déduire que h admet un prolongement continu et dérivable à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On le note encore h. Préciser $h(0)$ et $h'(0)$.

c) Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) En déduire que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t)h(t)\mathrm{d}t \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

e) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Montrer que cette intégrale est convergente puis que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

En déduire les valeurs de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ et de $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$.

I.E -

I.E.1) On considère à nouveau la fonction φ définie dans la première question et on pose, pour $u \in \mathbb{R}$, $\psi_v(u) = a\varphi(a(u-v))$.

On a ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } v \neq u,\ \psi_v(u) = \dfrac{[\sin(a(v-u))]^2}{a(v-u)^2} \\ \text{et } \psi_v(v) = a\varphi(0) \end{cases}$$

Montrer que ψ_v est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.E.2) Montrer que, lorsque $v \to +\infty$, $\int_0^{+\infty} \psi_v(u)\mathrm{d}u \to \pi$.

I.F - Montrer que, pour tout nombre réel u,

$$\int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right) e^{it(u-v)}\mathrm{d}t = 2\psi_v(u).$$

I.G -

I.G.1) Montrer que, pour tout réel $\sigma \geq 1$, $u \mapsto \psi_v(u)e^{(1-\sigma)u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

I.G.2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \psi_v(u)e^{(1-\sigma)u}\mathrm{d}u$ tend vers $\int_0^{+\infty} \psi_v(u)\mathrm{d}u$ lorsque σ tend vers 1 par valeurs supérieures.

Partie II -

Dans cette partie :

- on désigne par $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tels que :

  ($\boldsymbol{P_1}$) la série $\sum \beta_n n^{-s}$ converge pour tout nombre complexe s vérifiant $\mathscr{R}e(s) > 1$ où $\mathscr{R}e(s)$ désigne la partie réelle de s ;

- on désigne par B une fonction continue et croissante de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

  ($\boldsymbol{P_2}$) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B(n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$;

- on pose, pour tout réel $x \geq 1$ et tout complexe s vérifiant $\mathscr{R}e(s) > 0$,

  $F_s(x) = \left(\frac{B(x)}{x} - 1\right)x^{-s}$.

On suppose que

($\boldsymbol{P_3}$) F_s est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- On définit ainsi pour tout complexe s vérifiant $\mathscr{R}e(s) > 0$, $G(s) = \int_1^{+\infty} F_s(x)\mathrm{d}x$.

On suppose que

($\boldsymbol{P_4}$) la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (\sigma, t) \mapsto G(\sigma + it) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on considère un nombre réel σ strictement supérieur à 1.

II.A - On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} B(k)(k^{-\sigma} - (k+1)^{-\sigma}).$$

II.A.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

II.A.2) On a $B(k) - B(k-1) = \beta_k$. Exprimer u_n en fonction de $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k k^{-\sigma}$ et de $B(n-1)n^{-\sigma}$ et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

II.A.3) En déduire la convergence de la suite $(B(n)n^{-\sigma})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

II.A.4) En utilisant la croissance de B en déduire que la fonction $x \mapsto B(x)x^{-\sigma}$ admet une limite finie en $+\infty$.

II.B -

II.B.1) Transformer l'intégrale définissant G par le changement de variable $x = e^u$.

On pose, pour tout v appartenant à $[0, +\infty[$,

$$H(a, v) = \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it)\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right)e^{itv}\,dt .$$

II.B.2) Montrer que :

$$|H(a, v)| \leq \int_{-2a}^{2a} \left(\int_0^{+\infty} \left|(e^{-u}B(e^u) - 1)e^{-(\sigma-1)u}\right| du\right) dt .$$

En déduire l'existence d'une constante K telle que : $\forall v \in]0, +\infty[$, $|H(a, v)| \leq 4aK$.

II.B.3) En inversant l'ordre des intégrations dans la définition de $H(a, v)$ (on admettra que l'inversion est possible), montrer que :

$$H(a, v) = 2\int_0^{+\infty} (e^{-u}B(e^u) - 1)e^{(1-\sigma)u}\psi_v(u)\,du .$$

II.C -

II.C.1) Montrer que, pour tout $\sigma > 1$, la fonction $u \mapsto e^{-\sigma u}B(e^u)\psi_v(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Indication : on pourra utiliser la question II.A.4.

II.C.2) Montrer que, pour tout $\sigma_0 > 1$, la fonction

$$\sigma \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}B(e^u)\psi_v(u)\,du \text{ est continue sur }]\sigma_0, +\infty[.$$

Elle est donc continue sur $]1, +\infty[$ et on admettra de plus que :

$$\lim_{\substack{\sigma \to 1 \\ \sigma > 1}} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}B(e^u)\psi_v(u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u}B(e^u)\psi_v(u)\,du .$$

II.D - Montrer que :

$$\lim_{\substack{\sigma \to 1 \\ \sigma > 1}} \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it)(1 - \frac{|t|}{2a})e^{itv}\mathrm{d}t = \int_{-2a}^{2a} G(1 + it)(1 - \frac{|t|}{2a})e^{itv}\mathrm{d}t .$$

II.E - Montrer que :

$$\int_{-2a}^{2a} G(1 + it)(1 - \frac{|t|}{2a})e^{itv}\mathrm{d}t + 2\int_0^{+\infty} \psi_v(u)\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}B(e^u)\psi_v(u)\mathrm{d}u .$$

II.F -

II.F.1) En admettant que le résultat de la question I.C reste valable si on suppose seulement la continuité de la fonction h, montrer que :

$$\lim_{v \to +\infty} \int_{-2a}^{2a} G(1 + it)(1 - \frac{|t|}{2a})e^{itv}\mathrm{d}t = 0 .$$

II.F.2) En déduire : $\lim_{v \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u}B(e^u)\psi_v(u)\mathrm{d}u = \pi$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Définitions et notations

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul et E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique et muni du produit scalaire usuel. On utilisera l'isomorphisme, relativement à la base canonique, entre $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices colonnes réelles d'ordre n ; ainsi à tout élément x de E on associera la matrice colonne notée X. On identifiera les matrices carrées d'ordre 1 et $\mathbb{R}$ et on pourra ainsi écrire le produit scalaire entre deux vecteurs de E sous la forme : $\langle x, y\rangle = {}^tXY$.

- On désigne par $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales carrées d'ordre n et par I_n la matrice unité d'ordre n.
- On notera $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n symétriques et $\mathcal{S}(E)$ l'espace des endomorphismes de E admettant dans la base canonique une matrice symétrique réelle. Ils seront dits symétriques. On notera $\mathcal{S}(E)^+$ (respectivement $\mathcal{S}(E)^{++}$) l'ensemble des endomorphismes dont les valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives). $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ seront les espaces des matrices associées dans la base canonique.
- Pour tout n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on notera $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont, dans cet ordre, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Toutes les questions précédées de la mention « Application » peuvent être traitées en admettant éventuellement les résultats qui les précèdent.

Partie I - Décomposition d'un isomorphisme de E

I.A - Racine positive d'une matrice symétrique réelle positive

Dans cette section on se propose d'étudier l'existence et l'unicité de solutions dans $\mathcal{S}_n^+$ à l'équation matricielle $(\mathcal{R})$: $A = M^2$ où A désigne une matrice symétrique réelle positive fixée. On notera u l'unique endomorphisme de E de matrice A relativement à la base canonique.

Filière TSI

I.A.1)

a) Montrer l'existence d'une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels positifs et d'une matrice P dans $\mathscr{O}_n$ tels que : $A = P\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)\,{}^tP$.

b) On pose : $B = P\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})\,{}^tP$. Montrer que B est une solution de $(\mathscr{R})$.

I.A.2) On considère M une solution de $(\mathscr{R})$ et v l'unique endomorphisme de E de matrice M dans la base canonique.

a) Justifier la relation $u = v \circ v$.

b) Montrer que tout vecteur propre de v est un vecteur propre de u et préciser la relation entre les valeurs propres associées.

c) En déduire que, pour toute valeur propre λ de u, il existe un unique réel positif μ tel que l'espace propre de u associé à λ soit égal à celui de v associé à μ. Montrer aussi qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v.

d) Déduire de ce qui précède que $(\mathscr{R})$ admet une solution unique qui sera appelée racine positive de A.

I.A.3) *Application :* on considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que c'est un élément de $\mathscr{S}_n^+$ et calculer sa racine positive.

I.B - Endomorphisme exponentiel d'un endomorphisme symétrique réel

Dans toute cette section, u est un endomorphisme symétrique, U est sa matrice dans la base canonique et $\mathscr{B} = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ désigne une base orthonormale de vecteurs propres pour u.

I.B.1)

a) Montrer qu'il existe une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels tels que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ soit $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

b) On note alors $\exp(u)$ l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $\text{diag}(\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n))$. Montrer que u et $\exp(u)$ ont les mêmes espaces pro-

pres et qu'on définit bien ainsi un unique endomorphisme symétrique strictement positif, indépendamment du choix de $\mathscr{B}$.

c) Déterminer $\exp(u)$ lorsque u est l'endomorphisme nul et lorsque u est l'identité sur E.

d) Montrer que $\exp(u)$ est inversible d'inverse $\exp(-u)$.

e) Vérifier la relation $\exp(2u) = \exp(u) \circ \exp(u)$.

On notera désormais Φ l'application de $\mathscr{S}(E)$ dans $\mathscr{S}(E)^{++}$ qui, à un endomorphisme symétrique, associe son endomorphisme exponentiel.

I.B.2) *Application.* Dans cette unique question on pose

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de $\exp(u)$ dans la base canonique en fonction de $\mathrm{ch}(1)$ et $\mathrm{sh}(1)$.

I.B.3) Dans cette question a est un endomorphisme orthogonal de E et on note $a(\mathscr{B}) = \{a(\varepsilon_1), ..., a(\varepsilon_n)\}$.

a) Vérifier que $w = a \circ u \circ a^{-1}$ est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que $a(\mathscr{B})$ est une base orthonormale de vecteurs propres pour w et exprimer la matrice de w dans cette base. En déduire la matrice de $\exp(w)$ dans $a(\mathscr{B})$.

c) Exprimer la matrice de $a \circ \exp(u) \circ a^{-1}$ dans $a(\mathscr{B})$. Conclure.

d) Montrer que Φ est surjective.

e) En considérant les espaces propres respectifs de u et de $\exp(u)$, montrer que Φ est injective.

I.C - Décomposition d'un isomorphisme réel

Dans cette section f est un isomorphisme de E et M désigne sa matrice dans la base canonique.

I.C.1)

a) Montrer que ${}^tMM$ est un élément de $\mathscr{S}_n^{++}$.

b) Montrer qu'il existe un unique élément B de $\mathscr{S}_n^{++}$ tel que ${}^tMM = B^2$.

c) On pose $V = MB^{-1}$. Montrer que V ainsi définie est élément de $\mathscr{O}_n$.

d) Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un couple (V, B) de matrices (B élément de $\mathscr{S}_n^{++}$ et V élément de $\mathscr{O}_n$) tel que $M = VB$.

I.C.2) *Application.* Déterminer les matrices V et B, puis identifier géométriquement l'endomorphisme associé à V dans la base canonique, dans les deux cas suivants :

a) $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

I.C.3) Montrer qu'il existe un unique couple (v,u), avec v endomorphisme orthogonal de E et u élément de $\mathcal{S}(E)$ tel que $f = v \circ \exp(u)$.

Vérifier de plus que ${}^tMM$ est la matrice, dans la base canonique, de $\exp(2u)$.

Partie II - Endomorphismes invariants d'une forme quadratique

II.A - Forme quadratique associée à une matrice symétrique

II.A.1)

a) Montrer que, pour toute matrice symétrique réelle A, on définit une forme bilinéaire symétrique en posant $\forall (x,y) \in E,\ \varphi(x,y) = {}^tXAY$. On notera Q la forme quadratique associée.

b) Montrer qu'on définit ainsi une application injective de $\mathcal{S}_n$ dans l'ensemble des formes quadratiques sur E. On admettra que cette application est aussi surjective.

II.A.2) Dans toute la suite de cette partie, A est un élément de $\mathcal{S}_n$ fixé, a est l'endomorphisme associé dans la base canonique et Q désigne la forme quadratique associée. De plus f désigne un endomorphisme de E de matrice M relativement à la base canonique. On dira que Q est invariant par f si $\forall x \in E, Q(f(x)) = Q(x)$.

On note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des endomorphismes laissant Q invariant et $\mathcal{H}_n$ l'ensemble de leurs matrices dans la base canonique.

a) Montrer que $x \to Q(f(x))$ définit une forme quadratique sur E.

b) En utilisant ce qui précède, en déduire la caractérisation

$$(M \in \mathcal{H}_n) \Leftrightarrow ({}^tMAM = A).$$

II.B - Structure des invariants des formes quadratiques associées à des matrices involutives

Dans toute la fin du problème, A est une matrice symétrique réelle qui vérifie $A^2 = I$.

II.B.1) Montrer que tout élément de $\mathscr{H}(E)$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathscr{H}(E)$.

II.B.2) Montrer que, si M est élément de $\mathscr{H}_n$, il en est de même pour sa transposée.

II.B.3) Montrer que $\mathscr{H}_n$ est un sous-groupe du groupe linéaire d'ordre n et donc que $\mathscr{H}(E)$ est un sous-groupe du groupe linéaire de E.

II.C - Caractérisation des endomorphismes orthogonaux dans $\mathscr{H}_n$

II.C.1) Soit M un élément de $\mathscr{O}_n$, f l'endomorphisme associé dans la base canonique. Montrer que M est un élément de $\mathscr{H}_n$ si et seulement si M commute avec A.

II.C.2) *Application.* Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur (a, b, c, d) pour que A et M commutent, avec

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire, lorsque A est ainsi fixée, les matrices orthogonales dans $\mathscr{H}_2$.

II.C.3) On note $F = \ker(A - I)$ et $G = \ker(A + I)$.

a) Rappeler pourquoi F et G sont des sous-espaces vectoriels de E (éventuellement réduits à $\{0\}$), orthogonaux et supplémentaires.

b) Montrer que f, endomorphisme orthogonal, est élément de $\mathscr{H}(E)$ si et seulement si $f(F) = F$ et $f(G) = G$.

II.C.4) *Application.* Déterminer les matrices orthogonales de $\mathscr{H}_n$ lorsque

$$n = 2 \text{ et } A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

On pourra commencer par déterminer F, G ainsi qu'une base de chaque sous-espace, puis la forme de la matrice associée à f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

II.D - Caractérisation des endomorphismes symétriques strictement positifs dans $\mathscr{H}(E)$

II.D.1) Montrer que f, élément de $\mathscr{S}(E)^{++}$, est dans $\mathscr{H}(E)$ si et seulement si $f \circ a \circ f = a$.

II.D.2) *Application.* Dans cette question, a est l'endomorphisme associé à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices M symétriques réelles d'ordre 2 telles que $MAM = A$. En déduire dans ce cas tous les endomorphismes de $\mathscr{S}(E)^{++}$ qui sont dans $\mathscr{H}(E)$.

II.D.3) Soit $f \in \mathscr{S}(E)^{++}$. On note u l'unique élément de $\mathscr{S}(E)$ tel que $f = \exp(u)$. Montrer que f est élément de $\mathscr{H}(E)$ si et seulement si $a \circ u \circ a = -u$.

II.D.4) *Application.* Dans cette question a est l'endomorphisme associé à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices U symétriques réelles d'ordre 2 qui vérifient $UA = -AU$. Retrouver alors les résultats de II.D.2.

II.D.5) Soit $f \in \mathscr{S}(E)^{++}$. Montrer que f est dans $\mathscr{H}(E)$ si et seulement si $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

II.D.6) *Application.* Déterminer les endomorphismes symétriques strictement positifs de $\mathscr{H}(E)$ dans le cas où a est l'endomorphisme associé dans la base canonique à

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

II.E - Caractérisation de $\mathscr{H}(E)$

II.E.1) Soit v un endomorphisme orthogonal et u un endomorphisme symétrique tels que $v(F) = F$, $v(G) = G$ et $u(F) \subset G, v(G) \subset F$. Montrer que $f = v \circ \exp(u)$ est dans $\mathscr{H}(E)$.

II.E.2) Réciproquement, on considère f un élément de $\mathscr{H}(E)$.

a) Justifier rapidement l'existence d'un endomorphisme v orthogonal et d'un endomorphisme u symétrique tels que $f = v \circ \exp(u)$.

b) En utilisant les différents résultats trouvés et en particulier la question I.C.3, montrer que nécessairement $\exp(2u)$ est dans $\mathscr{H}(E)$. En déduire que $\exp(u)$ puis v sont dans $\mathscr{H}(E)$.

II.E.3) Déduire de ce qui précède une caractérisation de $\mathscr{H}(E)$.

Partie III - Applications géométriques

III.A - Transformations affines laissant invariante une conique

Le plan affine est rapporté à une origine O et à une base orthonormale $\{i, j\}$. On pourra utiliser l'isomorphisme entre l'espace euclidien de dimension 2 sous-jacent et $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et rapporté à sa base canonique. On considère la conique $\mathscr{C}$ définie par l'équation $xy + 3x + 5y - 4 = 0$.

III.A.1)

a) À l'aide d'un changement d'origine, montrer que cette conique admet un centre de symétrie Ω que l'on déterminera.

b) Écrire une équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \{i, j\})$.

c) Quelle est la nature de la conique ? En donner une représentation graphique.

III.A.2) On se propose de déterminer toutes les transformations affines qui fixent Ω et laissent globalement invariante la conique $\mathscr{C}$.

a) Montrer que le problème équivaut à déterminer $\mathscr{H}_2$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) En utilisant ce qui a été fait précédemment achever la détermination des transformations affines laissant globalement invariante $\mathscr{C}$.

III.B - Transformations affines laissant invariante une quadrique

L'espace affine est rapporté à une origine O et à une base orthonormale $\mathscr{B}$. On pourra utiliser l'isomorphisme entre l'espace euclidien de dimension 3 sous-jacent et $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et rapporté à sa base canonique.

On se propose d'étudier les transformations affines qui fixent O et laissent globalement invariante l'une des deux quadriques $\mathscr{S}_1$ ou $\mathscr{S}_2$ définies par les équations :

$$(\mathscr{S}_1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } (\mathscr{S}_2) \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

III.B.1)

a) Préciser la nature de $\mathscr{S}_1$.

b) Déterminer dans les deux cas la matrice de symétrie A associée à la forme quadratique, ainsi que les sous-espaces vectoriels F et G. Montrer que les transformations affines cherchées sont entièrement déterminées par $\mathscr{H}(E)$.

III.B.2) Déterminer entièrement ces transformations dans le cas de $\mathscr{S}_1$.

III.B.3) **Cas de $\mathscr{S}_2$.**

a) Montrer que les matrices orthogonales de $\mathscr{H}_3$ sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\alpha\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \alpha\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où θ est élément de $[0,2\pi[$ et (α,β) un couple d'éléments de $\{-1,1\}$.

b) Étudier pour θ fixé les quatre transformations associées lorsque α et β prennent les valeurs 1 et -1. On étudiera précisément le cas particulier $\theta = 0$.

III.B.4) Recherche des endomorphismes symétriques de la forme $\exp(u)$.

a) Montrer que l'ensemble des endomorphismes u tels que $\exp(u)$ soit dans $\mathscr{H}(E)$ est un espace vectoriel de dimension 2 et donner la forme générale de U, matrice de u dans la base canonique.

b) Déterminer une base de vecteurs propres commune à u et $\exp(u)$ ainsi que la matrice de $\exp(u)$ dans une telle base.

••• FIN •••

Dans tout ce problème $\mathcal{C}_{2\pi}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ muni du produit scalaire défini par :

$$(f\,|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

dont la norme associée est notée $||\quad||_2$. Le choix du facteur $\frac{1}{\pi}$ dans la définition du produit scalaire (contrairement à $\frac{1}{2\pi}$ habituellement) s'impose par la nécessité de rendre les fonctions $c_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $s_k : x \mapsto \sin(kx)$ unitaires pour $k \in \mathbf{N}^*$. Les coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sont, comme d'habitude, $a_n(f) = (f\,|c_n)$ et $b_n(f) = (f\,|s_n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_0(f) = (f\,|1)$ où 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$.

La formule de Parseval pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ prend la forme :

$$||f||_2^2 = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 + b_n(f)^2$$

E est le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ constitué des fonctions impaires et E_2 le sous-espace de E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Une *valeur propre* d'une application linéaire T de E_2 dans E (attention T n'est pas un endomorphisme) est, par définition, un réel λ tel qu'existe un élément f de $E_2 - \{0\}$ vérifiant $T(f) = \lambda f$.

On définit de même la notion de vecteur propre et de sous-espace propre de T.

On fixe une fonction q de classe $\mathcal{C}^1$, paire, 2π-périodique et non constante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On sait, dans ces conditions, que la fonction q est bornée et on pose :

$$a = \inf\{q(x)\ /\ x \in \mathbf{R}\},\ b = \sup\{q(x)\ /\ x \in \mathbf{R}\} \text{ et } ||q||_\infty = \sup\{|q(x)|\ /\ x \in \mathbf{R}\}.$$

On considère alors les applications linéaires de E_2 dans E définies par :

$$A : y \mapsto -y'' + ay \qquad B : y \mapsto -y'' + by \qquad Q : y \mapsto -y'' + qy$$

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant :

« Soit, pour chaque entier naturel non nul n, $(x_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite de n nombres réels. On suppose :

1. pour tout entier $k \geqslant 1$, la suite $(x_{k,n})_{n\geqslant k}$ est convergente et on note :
$$\lim_{n\to\infty} x_{k,n} = x_k;$$
2. il existe une suite $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$ de nombres réels positifs telle que la série de terme général ξ_k converge et :
$$\forall k \geqslant 1, \forall n \geqslant k, |x_{k,n}| \leqslant \xi_k.$$

Alors la série de terme général x_k converge absolument et : $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ».

Enfin on dit qu'une famille orthonormale $(e_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs de E est **totale dans** E si 0 est le seul vecteur de E orthogonal à tous les e_k.

L'objectif du problème est l'étude, par diverses méthodes, des valeurs propres de Q. On peut traiter une question du problème sans avoir résolu les précédentes à condition d'en admettre **clairement** les résultats.

Partie I - Quelques résultats généraux

I.A - Dans cette section I.A, λ désigne un nombre réel fixé et on considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E_\lambda) : \quad y'' + (\lambda - q)y = 0$$

I.A.1) Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_λ) et exploiter l'unicité pour prouver qu'une solution y de (E_λ) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.

I.A.2) Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité. En déduire la dimension d'un sous-espace propre de Q.

- version du 20 février 2008 16h14

I.B -

I.B.1) Déterminer les valeurs propres de A et B et, pour chacune d'entre elles, un vecteur propre unitaire associé.

I.B.2) Démontrer, pour tout $f \in E_2$, les inégalités suivantes :

$$(f\,|A(f)) \leqslant (f\,|Q(f)) \leqslant (f\,|B(f))\,.$$

Partie II - Problème approché de dimension finie

II.A - Dans toute la suite du problème on note V_n le sous-espace de E_2 engendré par la famille orthonormale $(s_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ (on posera $V_0 = \{0\}$) et $\Pi_n \in \mathcal{L}(E)$ la projection orthogonale de E sur V_n. Si T est une application linéaire de E_2 dans E et $n \in \mathbf{N}^*$, on conviendra de noter T_n l'endomorphisme de V_n défini par $f \mapsto \Pi_n \circ T(f)$.

II.A.1) **Questions de cours dont les preuves ne sont pas demandées** : justifier l'existence de Π_n. Que représente $\Pi_n(f)$ relativement à la série de Fourier de f ? Que valent $\lim\limits_{n\to\infty} ||\Pi_n(f)||_2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - \Pi_n(f)||_2$?

II.A.2) Démontrer, pour tout couple $(f,g) \in E^2$, la relation $(f\,|\Pi_n(g)) = (\Pi_n(f)\,|g)$.

II.A.3) Établir, pour tout couple $(f,g) \in E_2^2$, que $(f\,|Q(g)) = (Q(f)\,|g)$. En déduire que Q_n est un endomorphisme symétrique de V_n.

II.B - Dans la suite on notera $\lambda_{1,n} \leqslant \lambda_{2,n} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n,n}$ le système des valeurs propres de Q_n rangées par ordre croissant (chaque valeur propre apparaît donc dans la liste autant de fois que sa multiplicité l'exige) et $(e) = (e_{1,n}, e_{2,n}, \ldots, e_{n,n})$ une base orthonormée de V_n telle que, pour chaque indice $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $e_{k,n}$ est un vecteur propre de Q_n associé à la valeur propre $\lambda_{k,n}$.

II.B.1) À l'aide de la question I.B.2), démontrer, pour tout $f \in V_n$, les inégalités :

$$(f\,|A_n(f)) \leqslant (f\,|Q_n(f)) \leqslant (f\,|B_n(f))\,.$$

II.B.2)

a) Déduire de la question I.B.1 les valeurs propres des endomorphismes A_n et B_n classées par ordre croissant.

b) Soit $k \in \{1,2,\ldots,n\}$; montrer qu'il existe un vecteur unitaire f appartenant à $V_k \cap \mathrm{Vect}(e_{k,n}, e_{k+1,n}, \ldots, e_{n,n})$ puis que $\lambda_{k,n} \leqslant (f\,|Q(f)) \leqslant (f\,|B(f)) \leqslant k^2 + b$. Prouver de manière analogue l'inégalité $k^2 + a \leqslant \lambda_{k,n}$.

c) Dans cette question, on suppose $n \geqslant 2$. Démontrer que, pour tout élément f de V_{n-1}, $(f\,|Q_n(f)) = (f\,|Q_{n-1}(f))$. En déduire, en utilisant une méthode analogue à celle suggérée dans la question précédente, que si $1 \leqslant k \leqslant n-1$ alors $\lambda_{k,n-1} \geqslant \lambda_{k,n}$.

II.C - On pose, dans la suite du problème, $I_k = \left[k^2 + a, k^2 + b\right]$. Prouver que, si $k \in \mathbf{N}^*$, la suite $(\lambda_{k,n})_{n\geqslant k}$ converge vers une limite λ_k élément de l'intervalle I_k et que la suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ est croissante.

Partie III - Une suite de valeurs propres de Q

Dans cette partie III seulement on suppose le réel λ strictement positif.
On considère les problèmes de Cauchy suivants :

- $(E_\lambda) : y'' + (\lambda - q)\,y = 0$
  d'inconnue y avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = \sqrt{\lambda}$.
- $(T_\lambda) : \theta' = \sqrt{\lambda} - \dfrac{q}{\sqrt{\lambda}}\sin^2\theta = \sqrt{\lambda} - \dfrac{q}{2\sqrt{\lambda}}\,(1 - \cos(2\theta))$
  d'inconnue θ avec la condition initiale $\theta(0) = 0$.

III.A -

III.A.1) Soit y_λ la solution maximale de (E_λ).
Prouver qu'existent deux fonctions r_λ et θ_λ, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$r_\lambda > 0, \qquad \frac{y'_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = r_\lambda \cos\theta_\lambda, \qquad y_\lambda = r_\lambda \sin\theta_\lambda, \qquad \theta_\lambda(0) = 0.$$

III.A.2) Prouver que θ_λ est l'unique solution maximale de (T_λ).
Dans la suite de cette partie on posera pour tout couple $(\lambda, x) \in]0,+\infty[\times \mathbf{R}$:

$$\theta(\lambda, x) = \theta_\lambda(x).$$

III.A.3) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont les coefficients dépendent de la fonction θ, satisfaite par r_λ.

III.B - On admet que la fonction $\lambda \mapsto \theta(\lambda, 2\pi)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

III.B.1) Prouver, pour tout $t \geqslant 0$, les inégalités :

$$\left|\theta(\lambda,t) - \sqrt{\lambda}t\right| \leqslant \frac{||q||_\infty t}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{puis} \quad \left|\cos\left(2\theta(\lambda,t)\right) - \cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\right| \leqslant \frac{2||q||_\infty t}{\sqrt{\lambda}}$$

III.B.2) Prouver l'existence d'une constante K telle que :

$$\left|\theta(\lambda,2\pi) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K}{\lambda}$$

III.B.3) Montrer que, quand λ est au voisinage de $+\infty$:

$$\theta(\lambda,2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda}\left[1 - \frac{1}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

III.B.4)

a) Prouver l'existence d'un entier naturel $k_0 > 0$ et d'une suite $(\mu_k)_{k\geqslant k_0}$, strictement croissante de réels strictement positifs telle que, pour tout entier naturel $k \geqslant k_0$, on ait $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$.

b) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \left(\mu_k - k^2\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t$.

III.C - Dans cette section III.C on suppose que le réel $\lambda > 0$ vérifie la relation $\theta(\lambda, 2\pi) = 2k\pi$ où $k \in \mathbf{N}^*$ et on se propose de prouver que λ est valeur propre de Q.

III.C.1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\theta(\lambda, -x) = -\theta(\lambda, x) \quad \text{et} \quad \theta(\lambda, 2\pi + x) - 2k\pi = \theta(\lambda, x).$$

III.C.2) Prouver que si u est une fonction continue, impaire et 2π-périodique alors la fonction $x \mapsto \exp\left[\displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est 2π-périodique. En déduire que r_λ est 2π-périodique.

III.C.3) Prouver que y_λ est 2π-périodique et impaire et conclure.

III.C.4) Que représentent les réels μ_k définis dans la question III.B.4) pour l'application linéraire Q ?

Partie IV - Valeurs propres de Q

On se propose, dans cette partie, d'établir que les λ_k définis dans la partie II sont les valeurs propres de Q associées à un système orthonormal total de vecteurs propres.

IV.A - Dans cette section IV.A on considère une suite réelle $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, α_n soit une valeur propre de Q_n. On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et on note α sa limite. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $y_n \in V_n$ un vecteur propre de Q_n associé à la valeur propre α_n On veut prouver que α est une valeur propre de Q.

IV.A.1)

a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut prendre y_n unitaire et tel que $y_n'(0) \geqslant 0$. Cette condition sera supposée remplie dans la suite de cette partie.

b) Démontrer que $Q_n(y_n) = -y_n'' + \Pi_n(qy_n)$. En déduire que :

$$||Q(y_n) - \alpha_n y_n||_2 = ||qy_n - \Pi_n(qy_n)||_2$$ dont on se propose de prouver la convergence vers 0 quand $n \to \infty$.

c) Établir la relation :

$$qy_n - \Pi_n(qy_n) = \sum_{m=1}^{n} b_m(y_n)\left[qs_m - \Pi_n\left(qs_m\right)\right].$$

d) Pour $1 \leqslant m \leqslant n$, on pose $r_{m,n} = ||qs_m - \Pi_n\left(qs_m\right)||_2$. Établir les inégalités :

$$||Q(y_n) - \alpha_n y_n||_2 \leqslant \sum_{m=1}^{n} |b_m(y_n)|\, r_{m,n} \quad \text{et} \quad r_{m,n} \leqslant ||qs_m||_2 \leqslant ||q||_2.$$

e) Prouver, pour $1 \leqslant m \leqslant n$, la relation :

$$m^2 b_m(y_n) + b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n) = 0. \tag{1}$$

f) Prouver, pour $1 \leqslant m \leqslant n$, les inégalités :

$$|b_m(y_n)| \leqslant 1 \text{ et } m^2|b_m(y_n)| \leqslant [||q||_2 + \sup\{|\alpha_n| \,/\, n \in \mathbf{N}^*\}] \text{ qui sera noté } C.$$

g) Déduire du résultat admis dans le préliminaire que $\lim_{n\to\infty} ||Q(y_n) - \alpha_n y_n||_2 = 0$.

IV.A.2) On note (u, v) la base de solutions de l'équation $y'' + (\alpha - q)y = 0$ telle que :

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1$$

et on pose $z_n = Q(y_n) - \alpha\, y_n \in E$.

a) Prouver que $\lim_{n\to\infty} ||z_n||_2 = 0$.

b) Prouver que le wronskien de (u, v) vaut constamment 1.

c) En résolvant une équation différentielle, déterminer en fonction de u et v une fonction $K : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, continue et telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$y_n(x) = y_n'(0)\, v(x) + \int_0^x K(x,t)\, z_n(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \int_0^x K(x,t)\, z_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$tend uniformément vers 0 sur tout segment de $\mathbf{R}$.

e) Prouver que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi} (y_n(x) - y_n'(0)v(x))^2 dx} = 0$. En déduire la limite de la suite $(y_n'(0))_{n\geqslant 1}$.

f) Établir la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbf{R}$ de la suite de fonctions $(y_n)_{n\geqslant 1}$ vers une fonction de norme 1 que l'on déterminera en fonction de v. En déduire que $v \in E$ et que α est une valeur propre de Q.

IV.B - On reprend maintenant les fonctions $(e_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant n}$ définies à la section II.B en imposant de surcroît $e_{k,n}'(0) \geqslant 0$. La section IV.A a établi, pour tout $k \geqslant 1$, la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbf{R}$ de la suite $(e_{k,n})_{n\geqslant k}$ vers un élément de E unitaire noté e_k qui est un vecteur propre de Q pour la valeur propre λ_k.

IV.B.1) Prouver que la famille $(e_k)_{k\geqslant 1}$ est orthonormale ; en déduire que la suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ est strictement croissante.

IV.B.2) Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $n \geqslant m$

a) Prouver, à l'aide de la relation (1) convenablement adaptée que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $k \leqslant n$ et $k^2 + a > m^2$ on a :

$$|(e_{k,n}\,|s_m)\,| \leqslant \frac{||q||_2}{k^2 + a - m^2}.$$

b) Prouver, grâce au préliminaire, que :

$$1 = ||s_m||_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k\,|s_m)^{\,2} \text{ puis } \lim_{n\to\infty} \|s_m - \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\|_2 = 0$$

IV.B.3) Montrer que la famille $(e_k)_{k\geqslant 1}$ est totale dans E.
(*On pourra calculer* $(f|s_m)$ *pour un vecteur* f *orthogonal à tout vecteur* e_k).

IV.B.4) Montrer que les valeurs propres de Q sont exactement les éléments de la suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$.
(*On pourra supposer l'existence d'une valeur propre* λ *différente des* λ_k *et calculer* $(e|e_k)$ *pour un vecteur propre* e *associé à la valeur propre* λ).

Partie V - Comportement asymptotique

V.A - On rappelle que q est non constante.

V.A.1) Prouver que $a < \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t < b$.

V.A.2) On adopte ici les notations de la question III.B.4) dont on utilisera les résultats.

a) Démontrer l'existence d'un entier $k_1 \geqslant k_0$ tel que, pour $k \geqslant k_1$ on ait $I_k \cap I_{k+1} = \emptyset$.

b) Prouver que $\lambda_k = \mu_k$ à partir d'un certain rang. En déduire que

$$\lambda_k = k^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(1)$$

lorsque $k \to \infty$.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière MP

Notations

- Dans tout le problème n est un entier supérieur à 2, $\mathcal{M}_n$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes, à coefficients réels.
- On note $(E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_n$. Ainsi, pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et n, tous les coefficients de la matrice E_{ij} sont nuls sauf le coefficient d'indices (i,j) qui vaut 1. On rappelle le résultat suivant :
$$\forall i,j,k,l \in \{1,...,n\}, E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$
où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et 0 sinon.
- Pour tout couple (p,q) d'entiers strictement positifs, on note $\mathcal{M}_{p,q}$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients réels.
- Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{p,q}$, on note ${}^tM$ sa matrice transposée.
- L'espace $\mathbb{R}^n$ est identifié à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}$. On note $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, ..., \mathbf{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tout entier k compris entre 1 et n, $\mathbf{e_k} = {}^t(0,...,0,1,0...,0)$ où 1 est en $k^{\text{ième}}$ position.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Pour tout couple $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = {}^t(u_1,...,u_n)$ et $\mathbf{v} = {}^t(v_1,...,v_n)$, on note $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = {}^t\mathbf{u}.\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ leur produit scalaire.
- Pour tout couple d'entiers p, q tels que $p \leqslant q$, on note :
$$[[p,q]] = \{k \in \mathbb{N}, p \leqslant k \leqslant q\}.$$
- Étant donné ${}^t(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $D = \text{diag}(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n) \in \mathcal{M}_n$ la matrice diagonale telle que, pour tout i de $[[1,n]]$, $d_{ii} = \alpha_i$.
On note $I_n = \text{diag}(1,1,....,1)$ la matrice de l'identité.

Soit $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n$. On considère le système linéaire
$$A\mathbf{u} = \mathbf{w}, \qquad (1)$$
où $\mathbf{w} = {}^t(w_1,....,w_n) \in \mathbb{R}^n$ est donné, et $\mathbf{u} = {}^t(u_1,...,u_n)$ est l'inconnue. L'objet du problème est l'étude de quelques méthodes de résolution de ce système linéaire. On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Partie I - Méthode de Gauss et factorisation

Le but de cette partie est de représenter matriciellement la méthode de Gauss pour la résolution du système (1).
On note $\mathcal{TS}_n \subset \mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ triangulaires supérieures (c'est-à-dire $m_{ij} = 0$ pour $i > j$) et $\mathcal{TI}_n \subset \mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrice triangulaires inférieures à diagonale unité (c'est-à-dire $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} = 0$ pour $i < j$). Dans toute cette partie, on suppose que $\det(A) \neq 0$, de sorte que le système (1) admette une unique solution $\mathbf{u} = {}^t(u_1,...,u_n) \in \mathbb{R}^n$.

I.A - Résolution d'un système triangulaire

On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{TS}_n$.

I.A.1) Calculer u_n puis pour $k \in [[1,n-1]]$ exprimer u_{n-k} en fonction de u_n, u_{n-1}, ..., u_{n-k+1}. Écrire l'algorithme de résolution du système (1).

I.A.2) Exprimer en fonction de n le nombre d'additions, de multiplications et de divisions nécessaires à la résolution du système (1).

I.B - Matrices d'élimination de Gauss

La matrice A de $\mathcal{M}_n$ est de nouveau quelconque avec $\det A \neq 0$.
Étant donné $M = [m_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n$, on note pour tout entier q de $[[1,n]]$, $\Delta_q(M)$ la sous-matrice de M définie par $\Delta_q(M)=[m_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant q}$ élément de $\mathcal{M}_q$, et on note $D_q(M) = \det\Delta_q(M)$ ($D_1(M)$,...,$D_n(M)$ sont appelés les mineurs principaux de M).
Par ailleurs, on note $L_i(M)$ le $i^{\text{ième}}$ vecteur ligne de la matrice M et défini par $L_i(M) = (m_{i1}, m_{i2}, ..., m_{in})$. On note aussi $C_j(M)$ le $j^{\text{ième}}$ vecteur colonne de M défini par $C_j(M) = {}^t(m_{1j}, m_{2j}, ..., m_{nj})$. On dira aussi dans la suite les lignes L_i de M et les colonnes C_j de M.

I.B.1) Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n$ et $P = MA$. Exprimer, pour tout entier q de $[[1,n]]$, $L_q(P)$ en fonction des lignes $L_i(A)$ de la matrice A.

(*On pourra, si l'on veut, utiliser la décomposition de* $L_q(P)$ *sous la forme* $\sum_{j=1}^{n} p_{qj}E_{qj}$ *avec* $P = (p_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$).

- version du 27 février 2008 9h57

I.B.2) Pour un entier k de $[[1, n-1]]$ et un vecteur $\boldsymbol{\beta} = {}^t(\beta_{k+1}, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, on note $F(k, \boldsymbol{\beta})$ la matrice de $\mathcal{M}_n$ qui réalise par le produit à gauche $P = F(k, \boldsymbol{\beta})A$ les combinaisons linéaires de lignes suivantes, en notant pour simplifier $L_i = L_i(A)$ et $L'_i = L_i(P)$:

$$\forall i \in [[1, k]], \quad L'_i = L_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [[k+1, n]], \quad L'_i = L_i + \beta_i L_k. \tag{2}$$

a) Montrer que $F(k, \boldsymbol{\beta})^{-1} = F(k, -\boldsymbol{\beta})$.

b) Montrer que si $P = F(k, \boldsymbol{\beta})A$ on a :

$$\forall q \in [[1, n]], \quad D_q(P) = D_q(A).$$

c) Déterminer les coefficients ϵ_{ij} de $F(k, \boldsymbol{\beta})$ pour tout couple (i, j) d'entiers de $[[1, n]] \times [[1, n]]$. Montrer que $F(k, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{TI}_n$.

I.B.3)

a) Étant donnée une matrice $M = [m_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n$, exprimer les vecteurs colonnes C'_j du produit matriciel $MF(k, \boldsymbol{\beta})$ en fonction des colonnes C_j de M.

b) Soit q un entier de $[[1, n]]$ et pour tout entier k de $[[1, q]]$, $\boldsymbol{\beta_k} = {}^t(\beta_{k+1,k}, ..., \beta_{n,k})$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n-k}$. On considère la matrice produit

$$P_q = F(1, \boldsymbol{\beta_1}).F(2, \boldsymbol{\beta_2})...F(q, \boldsymbol{\beta_q}) = \prod_{k=1}^{q} F(k, \boldsymbol{\beta_k}). \tag{3}$$

On note C_j^q les vecteurs colonnes de la matrice P_q et pour tout entier k de $[[1, q]]$, $\mathbf{b_k} = {}^t(0, ..., 0, 1, \beta_{k+1,k}, ..., \beta_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer par récurrence sur q que :

$$\forall\, j \in [[q+1, n]], \quad C_j^q = e_j \quad \text{et} \quad \forall\, j \in [[1, q]], \quad C_j^q = b_j.$$

En déduire que P_q appartient à $\mathcal{TI}_n$ et que $P_{n-1} = [\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_{n-1}}, \mathbf{e_n}]$.

I.C - Factorisation de A

Dans cette question, on suppose que pour chaque $k \in [[1, n]]$, $\Delta_k(A)$ est inversible. On note $A_1 = A = [a_{ij}^1]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice initiale.

I.C.1) Montrer que $a_{11}^1 \neq 0$. Déterminer $\boldsymbol{\beta_1} = {}^t(\beta_{21}, ..., \beta_{n1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pour que la première colonne de $A_2 = F(1, -\boldsymbol{\beta_1})A_1$ soit proportionnelle à $\mathbf{e_1}$. Que vaut la première ligne de A_2 ?

I.C.2) On pose $F_1 = F(1, -\boldsymbol{\beta_1})$.

a) Montrer par récurrence sur k l'existence des suites de matrices $(F_{k-1})_{2 \leqslant k \leqslant n}, (A_k)_{2 \leqslant k \leqslant n}$ avec

$$F_{k-1} = F(k-1, -\boldsymbol{\beta_{k-1}}) \qquad A_k = [a_{ij}^k]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = F_{k-1}A_{k-1}$$

et telles que :

$$\forall j \in [[1, k-1]],\ \forall i \in [[j+1, n]],\ a_{ij}^k = 0 \quad \text{et} \quad \forall m \in [[1, n]], \quad D_m(A_k) \neq 0. \tag{4}$$

Exprimer le vecteur $\boldsymbol{\beta_k}$ à l'aide des coefficients de A_k.

b) Montrer que les lignes 1 à k de A_k et A_{k+1} sont identiques.

c) Pour $k \in [[1, n-1]]$, soit N_k le nombre de multiplications nécessaires pour passer de A_k à A_{k+1}. Calculer le nombre N_k.

I.C.3)

a) Déduire des questions précédentes qu'il existe une matrice L de $\mathcal{TI}_n$ et une matrice U de $\mathcal{TS}_n$ telles que l'on ait

$$A = LU. \tag{5}$$

b) Exprimer les coefficients l_{ij} de L pour $i > j$ et les coefficients u_{ij} de U pour $i \leqslant j$ en fonction des coefficients a_{ij}^k des matrices A_k (Utiliser (I.B.2a) et (I.C.2a)).

I.C.4) Montrer que les matrices L et U de la factorisation (5) sont uniques.

I.C.5) Écrire dans le langage de son choix un programme réalisant la factorisation $A = LU$ qui n'utilise qu'un seul tableau carré encore nommé A pour contenir toutes les itérations A_k. On prendra soin de commenter les principales lignes du programme. Comment aura-t-on en final les facteurs L et U à partir du tableau A ?

I.C.6) Soit S_n le nombre de multiplications nécessaires à la factorisation $A = LU$. Calculer S_n (*Indication* : utiliser la question I.C.2.c.)

Partie II - Applications et cas particuliers

Dans cette partie, on applique à certains exemples la factorisation vue en Partie I. Par commodité d'écriture, lorsque l'on représente une matrice, les espaces laissés vides sont remplis de 0 qui ne sont pas systématiquement écrits.

II.A - Application à la résolution de systèmes linéaires

II.A.1) On veut résoudre le système (1) en utilisant la factorisation (5). On fait toujours l'hypothèse que pour tout entier k de $[[1, n]]$, $D_k(A) \neq 0$.
Sans compter les opérations nécessaires à la factorisation, montrer qu'il suffit de $n(n-1)$ multiplications pour résoudre le système (préciser la méthode utilisée).

II.A.2) En déduire une méthode pour inverser la matrice A en utilisant la factorisation (5). Exprimer le nombre total de multiplications et divisions nécessaires à cette inversion, incluant cette fois-ci le calcul de la factorisation. En donné un équivalent lorsque $n \to \infty$.

II.B - Étude du cas tridiagonal

On suppose la matrice A tridiagonale, c'est-à-dire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

II.B.1) On pose $\delta_k = D_k(A)$, $\delta_0 = 1$. On suppose que pour tout k de $[[1,n]]$, $\delta_k \neq 0$. Calculer δ_1 puis, pour $k \in [[2,n]]$, exprimer δ_k en fonction de δ_{k-1} et de δ_{k-2}.

II.B.2) Montrer que les matrices L et U de la factorisation (5) sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & & \\ & l_{32} & 1 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

avec pour tout i de $[[2,n]]$, $l_{i,i-1} = a_i \dfrac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}$,

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & & & \\ & \dfrac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & & & \\ & & \dfrac{\delta_3}{\delta_2} & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \cdot & c_{n-1} \\ & & & & & & \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

II.B.3) Écrire un algorithme de résolution du système $A\mathbf{u} = \mathbf{w}$ en utilisant la factorisation précédente pour une matrice tridiagonale. Donner le nombre de multiplications, de divisions et d'additions nécessaires à cette résolution.

II.C - Étude d'un exemple

Soit $A_n = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n$, symétrique et tridiagonale définie par

$$\forall\, i \in [[1,n]],\ a_{ii} = 2, \quad \forall\, i \in [[2,n-1]],\ a_{i\,i+1} = a_{i\,i-1} = -1,\ a_{1\,2} = a_{n\,n-1} = -1$$

tous les autres coefficients étant nuls, c'est-à-dire

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

II.C.1)

a) Montrer que pour chaque $\mathbf{v} = {}^t(v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$< A_n\mathbf{v}, \mathbf{v} >= v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (v_i - v_{i-1})^2.$$

b) En déduire que la matrice A_n est définie positive.

c) Montrer que pour chaque k de $[[1,n]]$ la matrice $\Delta_k(A_n)$ est symétrique et définie positive. En déduire qu'il existe une factorisation $A_n = L_nU_n$ de la forme (5).

II.C.2) On reprend les notations de la question II.B. Expliciter et résoudre la récurrence sur δ_k. En déduire l'expression des matrices L_n et U_n.

II.C.3) On veut résoudre le système $A_n\mathbf{x} = \mathbf{e_k}$ pour un entier fixé $k \in [[1,n]]$.

a) Résoudre le système $L_n\mathbf{y} = \mathbf{e_k}$.

b) Résoudre le système $U_n\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(*On montrera que :* $x_i = \dfrac{i(n+1-k)}{n+1}$ *si* $i \leqslant k$ *et* $x_i = \dfrac{k(n+1-i)}{n+1}$ *si* $i \geqslant k$).

II.C.4) On pose $A_n^{-1} = [b_{ij}]_{1 \leq j,k \leq n}$. Calculer b_{ij} pour $(i,j) \in [[1,n]] \times [[1,n]]$.

Partie III - Une méthode itérative

III.A -

Soit $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$. On étudie ici une méthode itérative de résolution du système (1). On utilise la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, définie par $||\mathbf{x}||^2 = <\mathbf{x},\mathbf{x}> = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, avec $\mathbf{x} = {}^t(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que la norme matricielle subordonnée de $A \in \mathcal{M}_n$ est définie par $||A|| = \sup_{||\mathbf{x}||=1} ||A\mathbf{x}||$.

III.A.1)

a) Exprimer $||A\mathbf{x}||^2$ en fonction de $B = {}^tA.A$ et de $\mathbf{x}$. En déduire que B est une matrice symétrique positive.
On note $\mathrm{sp}(B) = \{\lambda_1(B),...,\lambda_n(B)\}$ le spectre de B, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de B énoncées de sorte que $\lambda_1(B) \leq ... \leq \lambda_n(B)$.

b) Montrer que $||A|| = \sqrt{\lambda_n(B)}$.

c) On suppose que A est symétrique et on note $\rho(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|$, où $\mathrm{sp}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A. Montrer que l'on a $||A|| = \rho(A)$.

III.A.2) On note H une matrice de $\mathcal{M}_n$ et $\mathbf{c}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tels que le système (1) peut se réécrire sous la forme

$$\mathbf{u} = H\mathbf{u} + \mathbf{c} \tag{7}$$

Soit $\mathbf{U_0} \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite vectorielle itérée $(\mathbf{U_k})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrrence $\mathbf{U_{k+1}} = H\mathbf{U_k} + \mathbf{c}$. Montrer que, si $||H|| < 1$, la suite $(\mathbf{U_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}^n$ de limite $\mathbf{u}$, solution de l'équation (7).

III.A.3) Dans les questions qui suivent, on applique la méthode itérative ci-dessus au système $A_n\mathbf{u} = \mathbf{w}$ où A_n est définie en II.C par (6). On décompose A_n en

$$A_n = 2I_n - M_n. \tag{8}$$

a) Calculer les valeurs propres de M_n (*Indication :* interpréter le système $M_n\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ comme une équation récurrente sur la suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ avec $x_0 = x_{n+1} = 0$. (On constatera qu'il n'y a de solution non nulle que si $|\lambda| < 2$).

b) En déduire qu'il existe une suite de réels $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ \mu_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0, \quad ||M_n|| = 2 - \mu_n.$$

c) Donner un équivalent de μ_n quand n tend vers l'infini.

III.A.4) On considère la décomposition (8). On choisit la donnée initiale $\mathbf{U_0}$ de sorte que $||\mathbf{U_0}|| = 1$. On suppose en outre que $||\mathbf{w}|| = 1$.

a) On choisit $H = \dfrac{M_n}{2}$. Expliciter le vecteur $\mathbf{c}$ de manière à appliquer la méthode itérative puis donner l'expression complète de $\mathbf{U_k}$ en fonction de $\mathbf{U_0}$, de $\mathbf{c}$ et des matrices H^m pour $m \in [[1,k]]$.

b) Majorer l'erreur $\epsilon_k = ||\mathbf{U_k} - \mathbf{u}||$ en fonction de k, μ_n et $||A_n^{-1}||$.

c) Montrer que $\lim_{n\to\infty} ||A_n^{-1}|| = +\infty$ et donner un équivalent de $||A_n^{-1}||$ pour n tendant vers l'infini.

d) Déterminer un nombre d'itérations k suffisant pour avoir $\epsilon_k < 10^{-4}$. Donner un équivalent du nombre de multiplications pour obtenir cette approximation et comparer à la méthode de factorisation LU. Pour n grand, quelle méthode est préférable ?

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PSI

Les parties I, II et IV sont consacrées à l'étude de trois relations de récurrence différentes. L'attention des candidats est attirée sur le fait que les hypothèses faites sur les constantes a, b, c, d intervenant dans ces récurrences changent d'une partie à l'autre. La partie III est consacrée à l'étude d'un outil de calcul intégral permettant de comparer les résultats obtenus dans les autres parties.

Note :

> Dans plusieurs questions du problème, il est demandé d'écrire une séquence d'instructions réalisant un calcul. Dans ces questions le candidat est invité à définir une fonction en utilisant la syntaxe de Maple ou Mathematica. Il est invité à signaler au début de sa copie le langage utilisé.

Question préliminaire

On donne la séquence d'instructions définissant ci-dessous la fonction $f : \mathbb{C}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ dans chacune des deux syntaxes (Maple et Mathematica).

Version Maple	Version Mathematica

$f := \mathbf{proc}(a, b)$
local i, j, k :
$i := 1 :\ j := a :\ k := b :$
while $k > 0$ **do**
  if *type*(k, odd)
  then $i := i * j :\ k := k - 1$
  else $j := j\hat{}2 :\ k := k/2 :$
  fi : **od** :
i :
end :
	`f[a_, b_] := Block[{i, j, k},`
	`i = 1; j = a; k = b;`
	`  While[k > 0,`
	`  {i, j, k} = If[OddQ[k], {i * j, j, k - 1},`
	`  {i, j^2, k/2}]`
	`  ];`
	`  i]`

Exprimer simplement la valeur de $f(a, b)$ où $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$.

Note : pour Maple « *type*(k, odd) » (resp. pour Mathematica « `OddQ[k]` ») est un booléen qui est vrai lorsque k est un entier impair (en anglais, *odd*) et faux dans le cas contraire.

Partie I - Récurrence en dimension 1

Dans cette partie, a, b sont deux réels fixés avec $a \neq 1$. On considère une suite u définie par un terme initial u_0 et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = a\,u_n + b \tag{1}$$

I.A - Écrire une séquence d'instructions permettant le calcul de u_n pour n donné (on ne cherchera pas à optimiser les calculs).

I.B - Déterminer la constante k telle que la suite v définie par

$$\forall n :\ v_n = u_n + k$$

vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = a\,v_n$.

I.C - En déduire la valeur de u_n en fonction de u_0 et de n.

I.D - On appelle série ordinaire associée à la suite u la fonction S de la variable complexe z qui est somme de la série entière de terme général $u_n\,z^n$. Autrement dit :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,z^n \tag{2}$$

Déterminer la valeur ρ du rayon de convergence de cette série (une discussion précise des cas particuliers est demandée). Quelle est la valeur minimale ρ_S de ce rayon pour a fixé ?

I.E - On suppose $|z| < \rho_S$. Partir de la relation évidente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\,u_n - b)\ z^n = 0$$

et obtenir une équation ordinaire (non différentielle) vérifiée par $S(z)$. Résoudre cette équation et exprimer S sous la forme :

$$S(z) = u_0\,A + b\,B \tag{3}$$

où A et B sont deux fractions rationnelles dépendant de z et a.

- version du 27 février 2008 16h9

I.F - On appelle série exponentielle associée à la suite u la série entière de la variable $z \in \mathbb{C}$ définie par :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n \tag{4}$$

Déterminer le rayon de convergence ρ_G de cette série G. On pose :

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} z^n \tag{5}$$

Montrer que $G'(z)$ a même rayon de convergence ρ_G que $G(z)$ et que si x est un réel avec $|x| < \rho_G$, $G'(x)$ est effectivement la dérivée de la fonction réelle $x \mapsto G(x)$.

I.G - Partir de la relation évidente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\,u_n - b)\ \frac{x^n}{n!} = 0$$

et obtenir (par des transformations justifiées) une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction G. Résoudre cette équation en remarquant que (4) fournit aussi une condition initiale pour $G(x)$. Obtenir G sous la forme

$$G(x) = u_0\,C + b\,D \tag{6}$$

où C et D dépendent de x et a.

I.H - En utilisant (6), retrouver l'expression de u_n en fonction de n.

Écrire une séquence d'instructions utilisant cette expression pour calculer u_n pour chaque valeur donnée de n. Ce programme est-il plus rapide que celui du **I.A** ? Que peut-on faire pour obtenir un programme réellement plus rapide ?

Partie II - Récurrence en dimension 2

Dans cette partie, a, b, c, d sont quatre réels tous différents de 0. On considère deux suites u et v définies par leurs termes initiaux u_0, v_0 et la relation de récurrence matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7}$$

On suppose en outre que les valeurs propres λ, μ de la matrice M sont distinctes et que u_0, v_0 ne sont pas simultanément nuls.

II.A - Réécrire (pour cette seule question) le système (7) en fonction de a, b, λ, μ. Diagonaliser la matrice M et exprimer $(u_n,\, v_n)$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \Big(\text{expression matricielle simple en } a,\, b,\, \lambda,\, \mu \text{ et } n\Big) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

II.B - On revient à la notation en a, b, c, d et, comme à la section **I-D**, on appelle séries ordinaires associées aux suites u et v les fonctions S et T de la variable complexe z qui sont les sommes des séries entières de termes généraux $u_n\,z^n$ et $v_n\,z^n$.

Autrement dit :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,z^n,\ T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n\,z^n \tag{8}$$

On admet, dans la suite de cette partie, qu'il existe un réel $\rho > 0$ tel que les deux séries $S(z)$ et $T(z)$ sont convergentes pour $|z| < \rho$. Pour un tel z, partir des relations évidentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - a\,u_n - b\,v_n)\ z^n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (v_{n+1} - c\,u_n - d\,v_n)\ z^n = 0$$

et obtenir un système de deux équations ordinaires (non différentielles) vérifiées par $S(z)$ et $T(z)$. Résoudre ce système et exprimer $S(z)$ et $T(z)$ sous la forme :

$$A\,u_0 + B\,v_0$$

où A et B sont deux fractions rationnelles en z (chacune dépendant des coefficients a, b, c, d).

Que peut-on dire des rayons de convergence de S et T ?

II.C - On appelle séries exponentielles G, H associées aux suites u et v les fonctions de la variable $x \in \mathbb{R}$ qui sont les sommes des séries entières ayant respectivement pour termes généraux $\dfrac{u_n x^n}{n!}$ et $\dfrac{v_n x^n}{n!}$. Autrement dit :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n!} x^n \tag{9}$$

Déterminer les rayons de convergence de ces deux séries.

II.D - Procéder comme précédemment et obtenir (par des transformations justifiées) un système de deux équations différentielles permettant d'exprimer G' et H' en fonction de G et H.

II.E - En déduire que G et H sont solutions de la même équation différentielle linéaire du second ordre (E) dont on exprimera les coefficients en fonction de λ et μ. À quelle condition les fonctions G et H forment-elles une base de l'espace des solutions de (E) ?

II.F - Résoudre les équations différentielles précédentes et obtenir $G(x)$ et $H(x)$ sous une forme simple mettant en évidence la dépendance par rapport aux conditions initiales.

Partie III - Transformation de Laplace

On rappelle que la transformée de Laplace $\mathrm{Lap}(f)$ d'une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs complexes est définie par :

$$\mathrm{Lap}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \exp(-t\,p)\, \mathrm{d}t$$

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, en Sciences de l'Ingénieur, la convergence de ces intégrales est, en dernière analyse, assurée par l'existence du système matériel étudié. Dans le présent problème, la convergence de ces mêmes intégrales n'est pas assurée et doit être examinée avec attention.

Dans ce qui suit, on supposera toujours $\alpha \in \mathbb{R}$. On dira qu'une fonction f est $CDI(\alpha)$, i.e. « continue et dominée à l'infini par $\exp(\alpha\, t)$ » lorsque :

1. f est une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{C}$.
2. l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t} f(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

III.A - On suppose que f est $CDI(\alpha)$. Démontrer que pour tout nombre complexe p dont la partie réelle est strictement supérieure à α, $\mathrm{Lap}(f)(p)$ est une intégrale convergente.

III.B - On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que f est $CDI(\alpha)$.

Démontrer que pour tout nombre complexe p dont la partie réelle est strictement supérieure à α, $\mathrm{Lap}(f')(p)$ est une intégrale convergente et calculer $\mathrm{Lap}(f')(p)$ en fonction de $\mathrm{Lap}(f)(p)$, de p et de $f(0)$.

III.C - Pour une suite (u_n) quelconque de nombres réels, on rappelle que les séries S et G ont été définies respectivement dans les sections **I.D** et **I.F** par les formules :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, z^n \quad \text{et} \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}\, z^n$$

En admettant (pour cette seule question) que l'on puisse permuter série et intégrale et en admettant l'existence des intégrales rencontrées, effectuer les calculs reliant la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto G(t)$, $t \geqslant 0$ avec la série S. On obtiendra un résultat sous la forme :

$$\mathrm{Lap}(G)(p) = \text{expression simple en } S \text{ et } p \tag{10}$$

lorsque p est un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positive.

III.D - On souhaite appliquer la formule précédente aux séries S et G associées à la suite récurrente u étudiée dans la Partie **I.** (par les fomules (2) et (4)). Utiliser la linéarité de Lap et les résultats précédents pour transformer l'équation différentielle concernant $t \mapsto G(t)$ en une équation ordinaire concernant S. Vérifier que l'on retrouve l'expression déjà obtenue en **I.E**.

Partie IV - Une récurrence explosive

Dans cette partie, a, b, c, d sont quatre réels tous différents de 0, tels que $|a| \neq |d|$ et que $\dfrac{bc}{ad}$ ne soit pas le carré d'un nombre entier. On considère deux termes initiaux u_0, v_0 **réels** et non simultanément nuls et les deux suites réelles u et v définies par la nouvelle relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = a\, n\, u_n + b\, v_n \\ v_{n+1} = c\, u_n + d\, n\, v_n \end{cases} \tag{11}$$

IV.A - On pose $\omega(n) = u_n^2 + v_n^2$.

IV.A.1) Établir l'encadrement : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ -u^2 - v^2 \leqslant 2uv \leqslant u^2 + v^2$.

IV.A.2) Démontrer que, pour tout n, $\omega(n)$ n'est jamais nul. Obtenir, pour $n \geqslant 1$, un encadrement de la forme :

$$\alpha(n) \leqslant \frac{\omega(n+1)}{n^2\, \omega(n)} \leqslant \beta(n)$$

où les quantités $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ont des limites finies quand $n \to \infty$.

IV.B - On considère les séries S, T, G, H associées par les formules respectives (8) et (9) aux suites u et v définies par la formule (11).

IV.B.1) En utilisant la formule (11), démontrer que $S(z)$ et $T(z)$ ont le même rayon de convergence. Quel est ce rayon de convergence commun (on pourra utiliser la section **A.**) ?

IV.B.2) Démontrer que $G(z)$ et $H(z)$ ont le même rayon de convergence et qu'il est supérieur à $\dfrac{1}{\max\big(|a|,\,|d|\big)}$.

IV.C - Soit q la suite de terme général $q_n = \dfrac{u_n}{n\,v_n}$. Écrire la relation de récurrence existant entre q_n et q_{n+1}. On obtiendra une fonction $z \mapsto \phi_n(z)$ (dépendant du paramètre n) telle que :

$$q_{n+1} = \phi_n(q_n) \quad \text{avec} \quad q_n = \frac{u_n}{n\,v_n} \tag{12}$$

IV.D - Écrire une séquence d'instructions permettant le calcul des valeurs successives de q_n en fonction de la valeur initiale $q1 = q_1$ entrée en paramètre et s'arrêtant lorsque la variation entre q_{n+1} et q_n devient inférieure à une précision donnée, ε.

IV.E - Partir des relations évidentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1} - a\,n\,u_n - b\,v_n)\,\frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(v_{n+1} - c\,u_n - d\,n\,v_n)\,\frac{x^n}{n!} = 0$$

et obtenir, dans un domaine que l'on précisera, un système différentiel du premier ordre vérifié par les fonctions $x \mapsto G(x)$, $x \mapsto H(x)$.

IV.F - En déduire une équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par la fonction G. Faire de même pour H.

IV.G - Démontrer que l'équation du deuxième ordre en G possède une solution polynomiale non nulle si et seulement si $\dfrac{bc}{ad}$ est le carré d'un nombre entier.

• • • FIN • • •

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PSI

Notations et définitions

• *On désigne la matrice* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ *par la notation* $diag(a,b,c)$. *Ainsi* $diag(1,1,1)$ *est la matrice identité* I_3.

• *L'espace vectoriel des matrices réelles* 3×3, *noté* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *est muni du produit scalaire usuel* $\langle A,B\rangle = Tr\big({}^tA)B\big) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}b_{i,j}$.

• *On note* $\|\ \|$ *la norme associée :* $\|A\|^2 = \langle A,A\rangle$.

• *On note* $O_3(\mathbb{R})$ *le groupe des matrices orthogonales,* $S_3(\mathbb{R})$ *l'espace des matrices symétriques, et* $S_3^+(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices symétriques positives de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *c'est-à-dire des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.*

• *Si* $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *et* P *est une partie non vide de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *la distance de* A *à* P *est, par définition :*

$$d(A,P) = \inf_{B\in P}\|A-B\|$$

• *Si* P *et* Q *sont deux parties non vides de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *la distance entre* P *et* Q *est :*

$$d(P,Q) = \inf_{A\in P,\ B\in Q}\|A-B\|$$

On a aussi (et on l'admettra) $d(P,Q) = \inf_{A\in P} d(A,Q)$.

Partie I - Généralités sur les distances

I.A - Si $A\in O_3(\mathbb{R})$, calculer $\|A\|$.

I.B - Démontrer que $O_3(\mathbb{R})$ est une partie bornée. En déduire que $O_3(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.C - Démontrer que l'application $M\mapsto\|M\|$, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

I.D - Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe $U\in O_3(\mathbb{R})$ tel que $d\big(A,O_3(\mathbb{R})\big) = \|A-U\|$.

I.E - Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(M) = d(M,O_3(\mathbb{R}))$.

I.E.1) Soient $M,N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Démontrer que :

$$\forall U\in O_3(\mathbb{R}),\ d\big(M,O_3(\mathbb{R})\big)\leqslant\|N-U\|+\|N-M\|,$$

puis que :

$$d\big(M,O_3(\mathbb{R})\big)\leqslant d\big(N,O_3(\mathbb{R})\big)+\|N-M\|.$$

I.E.2) En déduire que Φ est continue.

I.F - Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $r\in\mathbb{R}^+$, on pose

$$B_r = \big\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ \big|\ \|M\|\leqslant r\big\}.$$

I.F.1) Démontrer qu'il existe $r>0$ tel que $d\big(P,O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(P\cap B_r,O_3(\mathbb{R})\big)$.

I.F.2) Démontrer qu'il existe $A\in P$ telle que $d\big(P,O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(A,O_3(\mathbb{R})\big)$.

Partie II - Décomposition polaire

Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

II.A - Démontrer que ${}^tMM$ est symétrique à valeurs propres positives.

II.B - Démontrer qu'il existe $S\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives telle que ${}^tMM = S^2$.

II.C - Démontrer que si M est inversible, il existe $U\in O_3(\mathbb{R})$ telle que $M=US$.

> *On admettra que le résultat reste vrai si* M *est non inversible, c'est-à-dire :* « *Si* $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *il existe* $U\in O_3(\mathbb{R})$ *et* $S\in S_3^+(\mathbb{R})$, *telles que* $M=US$ *(décomposition polaire)* ».

II.D - Étude d'un exemple

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

En appliquant la méthode décrite ci-dessus déterminer $U\in O_3(\mathbb{R})$ et $S\in S_3^+(\mathbb{R})$ telles que $M=US$.

- version du 19 février 2008 17h4

Partie III - Distance à $O_3(\mathbb{R})$

III.A -

III.A.1) Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $U \in O_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.
En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe une matrice D diagonale à coefficients positifs telle que :

$$d\big(A, O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(D, O_3(\mathbb{R})\big).$$

III.A.2) En déduire que si $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe $\mathcal{W}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V})$
- $d\big(\mathcal{W}, O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big)$
- Il existe $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{W}$ où les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$, telle que $d\big(\mathcal{W}, O_3(\mathbb{R})\big) = d\big(D, O_3(\mathbb{R})\big)$.

III.B - Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, où les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$.

III.B.1) Si $U \in O_3(\mathbb{R})$, montrer que $\|D - U\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2\right) - 2\langle U, D\rangle + 3$.

III.B.2) Si $U \in O_3(\mathbb{R})$, montrer que $\langle U, D\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$.

III.B.3) En déduire que $d\big(D, O_3(\mathbb{R})\big) = \|D - I_3\|$.

III.C - Étude d'un exemple

Pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ définie dans la question **II.D**, calculer la distance $d\big(M, O_3(\mathbb{R})\big)$.

Partie IV - Cas d'un sous-espace de dimension 6

IV.A - Dans cette question seulement, $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6 \right\}$.

IV.A.1) Soit $A \in \mathcal{V}$. En considérant les valeurs propres de ${}^tAA$, démontrer l'inégalité :
$$d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \geqslant 1.$$

IV.A.2) Calculer $d(I_3, \mathcal{V})$, puis en déduire la valeur de $d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big)$.

Dans toute la suite du problème $\mathcal{V}$ désigne un sous-espace vectoriel de dimension 6 quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose de démontrer que $d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big) \leqslant 1$.

À l'aide de la partie III, on se ramène au cas où $d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big) = \|D - I_3\|$, avec $D = diag(x, y, z) \in \mathcal{V}$, et $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.
On suppose $D \neq I_3$, sinon, $d\big(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})\big) = 0$, et l'inégalité est vraie.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $R_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$, et $R_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

IV.B - Comparer $(D - I_3)^\perp$ et $\mathcal{V}$.

IV.C - Vérifier que $\big(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0)\big)$ est une famille libre formée de matrices orthogonales à $I_3 - D$.
Démontrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in \mathcal{V}$.

a, b, c sont ainsi fixés pour la suite, et on pose $f : t \in \mathbb{R} \mapsto R_1(at)R_2(bt)R_3(ct)$.

IV.D - Démontrer que f a un développement limité du type :
$f(t) = I_3 + tA + t^2(B + C) + t^2\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ où $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient :

- $A \in \mathcal{V}$
- B orthogonale à $I_3 - D$
- $C = \dfrac{1}{2} diag(-a^2 - b^2, -a^2 - c^2, -b^2 - c^2)$.

Dans la suite, ε est la fonction apparaissant dans ce développement limité de f.

IV.E - Justifier que : $\big\|I_3 + t^2\big(B + C + \varepsilon(t)\big) - D\big\| \geqslant \|I_3 - D\|$.

IV.F - Établir que :

$$\left\|I_3 + t^2\big(B + C + \varepsilon(t)\big) - D\right\|^2 = \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle I_3 - D, C\rangle + t^2\varepsilon_2(t)$$

avec $\varepsilon_2(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Qu'en déduire sur $\langle I_3 - D, C\rangle$?

IV.G - Démontrer que l'un au moins des trois réels $2-x-y$, $2-y-z$, $2-x-z$ est négatif ou nul.

On suppose pour la suite, ce qui ne change rien, que $2 - x - y \leqslant 0$.

IV.H - Démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

IV.I - Identifier géométriquement les ensembles suivants :

- $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z\big\}$,
- $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x + y = 2\big\}$,
- $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x + y \geqslant 2\big\}$.

Justifier que $E \cap F$ est un cercle dont on déterminera le rayon.
Quel est le diamètre de $E \cap G$ (c'est-à-dire la distance maximum entre deux de ses points) ?

IV.J - Démontrer que $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \leqslant 1$.

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES I

Objectifs

On se propose, dans ce qui suit, de déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants lorsqu'elle est homogène, puis lorsque celle-ci admet un « second membre » d'un type particulier.

La partie I vise à établir des résultats utiles dans les suivantes.

Notations

- Pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^2$:
  - si $m\leq n$ l'ensemble $\{k\in\mathbb{N}, m\leq k\leq n\}$ est noté $[[m,n]]$;
  - $\delta_{m,n}$ vaut 1 si $m=n$, 0 sinon.
- Si $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on note $\mathbb{C}_q[X]$ l'ensemble constitué des éléments de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à q et $\mathbb{C}_{q,p}[X]$ celui constitué des éléments de $\mathbb{C}_q[X]$ divisibles par X^p.
- Si u est une application linéaire, $Ker(u)$ et $Im(u)$ désignent respectivement son noyau et son image.
- Si u est un endomorphisme, par convention, u^0 est l'application identité, et pour tout entier naturel p, on pose $u^{p+1}=u\circ u^p$.
- On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments. On dira que l'intervalle I est un voisinage de 0 s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $[-\alpha,\alpha]\subset I$. On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$, 0_E son élément nul, id_E l'application identité de E et D l'endomorphisme « dérivation » de E, c'est-à-dire tel que : $\forall f\in E, D(f)=f'$.
- Pour tout y de E, et pour tout k entier strictement positif, $y^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de y. Par convention $y^{(0)}=y$.
- Si $P\in\mathbb{C}[X]$ et $z\in\mathbb{C}$, on note $deg(P)$ le degré de P et $P_{\langle z\rangle}$ l'application de I dans $\mathbb{C}$ définie par : $\forall t\in I,\ P_{\langle z\rangle}(t)=P(t)e^{zt}$.

Filière PC

Partie I -

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$.

I.A - Montrer que $\mathbb{C}_{q,p}[X]$ est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.

I.B - Montrer qu'on peut définir une application φ_z de $\mathbb{C}[X]$ dans E définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \varphi_z(P) = P_{\langle z \rangle}.$$

Montrer que φ_z est linéaire et injective.

I.C - Déduire des questions précédentes que les images par φ_z de $\mathbb{C}_q[X]$ et $\mathbb{C}_{q,p}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies que l'on précisera.

Dans la suite de ce problème, n est un entier naturel non nul, $\alpha = (\alpha_0, \ldots \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que α_n n'est pas nul, et on note (H) l'équation différentielle, d'inconnue y élément de E :

$$(H) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = 0_E.$$

Partie II -

On se propose, dans cette partie, de déterminer S_H, l'ensemble des solutions de (H) définies sur I. On admettra que $\dim(S_H) = n$.

II.A - Justifier que $S_H = Ker\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k\right)$.

On note p le nombre de racines distinctes du polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ de $\mathbb{C}[X]$; on note $r_1, r_2 \ldots r_p$ ses racines et $m_1, m_2 \ldots m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

II.B - Vérifier que S_H contient le sous-espace vectoriel de E :

$$\sum_{j=1}^{p} Ker((D - r_j \cdot id_E)^{m_j}).$$

On admettra que cette somme est directe.

II.C - Dans cette question, $r \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$. Justifier l'existence d'un élément Q de $\mathbb{C}[X]$ tel que $d^\circ Q < d^\circ P$ et $(D - r \cdot id_E)(P_{\langle r \rangle}) = Q_{\langle r \rangle}$.

b) En déduire par récurrence la propriété suivante pour tout entier k de $[[1, m]]$:

$$\text{si } P \in \mathbb{C}_{k-1}[X], \text{ alors } P_{\langle r \rangle} \in Ker((D - r \cdot id_E)^k).$$

c) En conclure que $Ker((D - r \cdot id_E)^m)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins m.

II.D - Déduire de ce qui précède que, pour tout élément y de E, on a l'équivalence suivante, $y \in S_H$ si et seulement si il existe une famille $(P_j)_{j \in [[1, p]]}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ telle que :

$$\forall j \in [[1, p]], \quad deg(P_j) < m_j \text{ et } \forall t \in I, \quad y(t) = \sum_{j=1}^{p} P_j(t) e^{r_j t}.$$

II.E - Dans le cas où I est un voisinage de 0, prouver que pour tout réel α strictement positif tel que $]-\alpha, \alpha[\subset I$, les solutions de (H) sont développables en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

Partie III -

Dans cette partie, on considère un polynôme B de $\mathbb{C}[X]$, non nul. On note d le degré du polynôme B. On choisit un nombre complexe z et on note m l'ordre de multiplicité (éventuellement nul) de z en tant que racine du polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ de $\mathbb{C}[X]$.

On se propose de résoudre l'équation différentielle, d'inconnue y élément de E, notée (L) :

$$(L) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = B_{\langle z \rangle}.$$

III.A - Vérifier qu'on peut définir une application ψ, de $\mathbb{C}_{m+d,\,m}[X]$ dans E, définie par

$$\forall P \in \mathbb{C}_{m+d,\,m}[X], \quad \psi(P) = \left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k\right](P_{\langle z\rangle})$$

puis montrer que celle-ci est linéaire.

III.B - Prouver que ψ est injective et que $Im(\psi) \subset \varphi_z(\mathbb{C}_d[X])$.

III.C - Démontrer qu'il existe un unique élément Π de $\mathbb{C}_{m+d,\,m}[X]$ tel que $\Pi_{\langle z\rangle}$ soit solution de (L), définie sur I, puis préciser, en fonction de Π, l'ensemble des solutions de (L) sur I.

III.D - Dans le cas où l'intervalle I est un voisinage de 0, les solutions de (L) sont-elles développables en série entière sur tout intervalle $]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset I$?

Partie IV -

On suppose, dans cette dernière partie, que α_0 vaut 1 et que :

$$M = \max_{k \in [[0,\,n]]} |\alpha_k| \qquad .$$

On considère également un élément b de E et on note (L_b) l'équation différentielle, d'inconnue y élément de E :

$$(L_b) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = b\,.$$

IV.A - Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset I$ et que (L_b) admette une solution développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

Montrer que b est également développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$. Qu'en est-il alors des autres solutions de (L_b) ?

IV.B - Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique élément Π_p de $\mathbb{C}_p[X]$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Pi_p^{(k)} = \frac{X^p}{p!}\,.$$

Prouver qu'il existe un unique élément $(\pi_{p,\,j})_{j \in [[0,\,p]]}$ de $\mathbb{C}^{p+1}$ tel que :

$$\Pi_p = \sum_{j=0}^{p} \left(\pi_{p,\,j} \cdot \frac{X^j}{j!}\right).$$

IV.C - Prouver que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad q \leq p \Rightarrow \sum_{k=0}^{\min\{n,\, p-q\}} (\alpha_k \cdot \pi_{p,\,q+k}) = \delta_{p,\,q}$$

IV.D - Lorsque p est un entier strictement positif, traduire sous forme matricielle le système linéaire précédent d'inconnue $(\pi_{p,\,j})_{j \in [[0,\,p]]}$, élément de $\mathbb{C}^{p+1}$, puis écrire une procédure qui, en fonction de n et du système α, détermine l'unique solution de celui-ci.

IV.E -

a) Vérifier que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in [[0, p]], \ |\pi_{p,\,p-j}| \leq (2M)^j$.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout entier q, alors :

$$|\Pi_q(t)| \leq (2M+|t|)^q .$$

On suppose dorénavant que b est une application de I dans $\mathbb{C}$ développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ inclus dans I. On note r le rayon de convergence de la série entière $\sum b^{(n)}(0)\, z^n$ et on suppose que $r > 2M$.

IV.F -

a) Montrer qu'il existe β élément de $]0, \alpha[$ tel que la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I, \ f_p(t) = \sum_{q=0}^{p} b^{(q)}(0)\Pi_q(t)$$

converge sur $]-\beta, \beta[$.

On note f la limite de cette suite de fonctions, définie sur $]-\beta, \beta[$.

b) Prouver que f est de classe C^n sur $]-\beta, \beta[$.

IV.G - Justifier que f est une solution de (L_b) définie sur l'intervalle sur $]-\beta, \beta[$.

IV.H - Prouver que f est de classe C^∞ sur $]-\beta, \beta[$ et que pour tout entier $k > 0$, on a :

$$\forall t \in]-\beta, \beta[, \ f^{(k)}(t) = \lim_{p \to +\infty} f_p^{(k)}(t) .$$

IV.I - Si $t \in \mathbb{R}^+$, on note $E(t)$ sa partie entière.

On se propose, dans cette question, de démontrer que f est développable en série entière sur $]-\beta,\beta[$. À cet effet, on introduit un élément x de $]-\beta,\beta[$ puis, pour tout entier p de $\mathbb{N}$, l'application e_p de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e_p(t) = \frac{f_p^{(E(t))}(0) \cdot x^{E(t)}}{[E(t)]!}.$$

a) Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, e_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser la valeur de son intégrale sur $\mathbb{R}^+$.

b) Exhiber une application e en escalier de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ intégrable telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |e_p(t)| \leq e(t).$$

c) Conclure.

IV.J -

a) Qu'en déduit-on pour les solutions de (L_b) sur l'intervalle $]-\beta,\beta[$?

b) Les résultats précédents sont-ils encore valables si α_0 n'est pas égal à 1 ?

••• FIN •••

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PC

Notations

- Dans ce problème, $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites de complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Pour $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ représente l'espace vectoriel des suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formées de vecteurs de $\mathbb{C}^k$.
- On note $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à k lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Enfin, si M est une matrice, ${}^tM$ désigne sa transposée.

Question préliminaire

Soit une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

On note $e = det(M)$. On suppose $e \neq 0$.

- Calculer le produit matriciel

$$M \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- En déduire l'expression de la matrice M^{-1} en fonction de a, b, c, d, e.

Partie I - Récurrences linéaires

I.A - Récurrences linéaires d'ordre 2

On considère ici les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe des complexes a_1 et a_0 vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} + a_1\, x_{n+1} + a_0\, x_n = 0.$$

On associe à une telle suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

I.A.1) Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout entier positif n, on ait :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

I.A.2) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0.$$

I.A.3) On suppose que A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 et on note

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer les matrices Q inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $AQ = QD$.

b) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, des complexes λ_1, λ_2 et de l'entier n.

I.A.4) On suppose maintenant que A admet une seule valeur propre λ et on note

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

a) Exprimer a_1 et a_0 en fonction de λ.

b) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice T et déterminer les matrices Q inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que :

$$Q^{-1}AQ = T.$$

c) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, du complexe λ et de l'entier n.

I.A.5) Montrer que l'on a l'alternative suivante :

- soit A admet deux valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable ;
- soit A admet une seule valeur propre et elle n'est pas diagonalisable.

- version du 20 février 2008 16h38

I.A.6) **Deux exemples numériques**

Dans les deux exemples qui suivent, il est demandé de :

- expliciter la matrice A,
- donner une matrice de passage Q telle que $T = Q^{-1}AQ$ soit d'une forme simple comme ci-dessus,
- en déduire X_n puis x_n en fonction de x_0, x_1 et n

(il sera tenu compte de la simplicité et de la clarté des choix effectués).

a) **Exemple 1**

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

b) **Exemple 2**

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

I.B - Vers un ordre supérieur, à petits pas

On note Φ l'application qui à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ associe la suite des vecteurs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ définie par $X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, les trois premiers termes de la suite $\Phi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ sont $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

À tout polynôme unitaire de $\mathbb{C}_3[X]$,

$$P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

on associe le sous-espace $\mathcal{R}_P$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+3} + a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0,$$

ainsi que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$.

I.B.1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

I.B.2) Vérifier que $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ est linéaire et injective. Est-elle surjective ?

I.B.3)

a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_P$. Montrer que son image $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par Φ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0.$$

b) Montrer que réciproquement, toute suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ pour laquelle on a $X_n = A^nX_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est élément de $\Phi(\mathcal{R}_P)$.

I.B.4) Montrer que $\Phi(\mathcal{R}_P)$ est le sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ engendré par les suites de vecteurs $(A^ne_1)_{n\in\mathbb{N}}, (A^ne_2)_{n\in\mathbb{N}}, (A^ne_3)_{n\in\mathbb{N}}$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

En déduire la dimension de $\mathcal{R}_P$.

I.C - Des exemples (quasi) numériques

On introduit ici quelques exemples de polynômes $P(X)$ et on se propose d'étudier le comportement à l'infini des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{R}_P$.

I.C.1) **Exemple 1**

On considère ici le polynôme : $P(X) = X^3 - 2\,X^2 + \frac{3}{2}\,X - \frac{1}{2}$.

a) Écrire la matrice A qui lui est associée. Justifier qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Choisir une valeur explicite simple de $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Après un calcul effectif des premiers termes de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, conjecturer la limite de cette suite de vecteurs.

c) Vérifier que $Q^{-1}AQ = T$ où $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

d) Calculer T^2, T^3 et T^4.
En déduire la valeur de T^{4p+k} pour $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

e) Exprimer pour tout entier naturel n le vecteur $Y_n = Q^{-1}X_n$ en fonction de $Y_0 = Q^{-1}X_0$.
En déduire que les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Phi(\mathcal{R}_P)$ et de $\mathcal{R}_P$ convergent.
Attention : $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dans $\Phi(\mathcal{R}_P)$!

I.C.2) **Exemple 2**

Dans cette question, on considère le polynôme : $P(X) = X^3 - 2\,X^2 + 2\,X - 1$.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A associée à $P(X)$.

b) En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{R}_P$ sont périodiques et que, à toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{R}_P$, on peut associer trois nombres complexes α, β, γ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \alpha + \beta\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \gamma\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

I.C.3) **Exemple 3**
Dans cette question, on considère le polynôme :

$$P(X) = (X-\lambda)(X-\mu)^2$$

où λ et μ désignent deux nombres réels distincts.

a) Préciser la matrice A associée à ce polynôme.

b) On admet que $Q^{-1}AQ = T$ avec $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \\ \lambda^2 & \mu^2 & 2\mu \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$.

En déduire que si le polynôme P admet une racine double, la matrice A qui lui est associée n'est pas diagonalisable.

c) À quelles conditions sur λ et μ a-t-on chacune des propriétés suivantes :

- pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^3$, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$?
- pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^3$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Partie II - De la récurrence linéaire en général

Cette partie aborde l'étude des systèmes d'équations de la forme

$$(\mathcal{H}) : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A_n X_n$$

dans lesquelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne un élément inconnu de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$.
Dans la suite de cette partie, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fixée et on lui associe la suite de matrices $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = I_k$ (matrice unité d'ordre k) et $P_{n+1} = A_n P_n$ pour tout entier naturel n.

II.A - Résultats d'existence et d'unicité des solutions

II.A.1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de $(\mathcal{H})$.
Exprimer X_n en fonction de X_0 et de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.A.2) Montrer que le système avec condition initiale

$$(\mathcal{H}_a) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ X_0 \quad = a \end{cases}$$

admet une solution et une seule pour tout $a \in \mathbb{C}^k$.

II.A.3) On note S l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{H})$.

a) Vérifier que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$.

b) On considère l'application

$$\Psi : S \to \mathbb{C}^k$$

telle que $\Psi((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = X_0$.

Montrer que Ψ est isomorphisme.
En déduire que S est de dimension k.

c) En déduire que la famille des k solutions des k systèmes $\begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \\ X_0 \quad = e_i \end{cases}$ (où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^k$) forme une base de l'ensemble S des solutions du système $(\mathcal{H})$.

II.B - Étude d'un exemple

On considère ici le système $X_{n+1} = A_n X_n$ dans lequel, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \begin{bmatrix} \dfrac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

II.B.1) On introduit la notation suivante :

$$\forall n \geqslant 1, h_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p},$$

et $h_0 = 0$. Déterminer la matrice P_n en fonction de n et de h_n.

II.B.2) Expliciter les solutions $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ce système en fonction de n et de x_0, y_0.

II.B.3) Donner une base de l'espace des solutions du système.

II.B.4) Que peut on dire du comportement à l'infini de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

II.C - Problème avec condition initiale au temps n_0

Soient $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^k$, $k \geqslant 2$. On se propose d'étudier le système avec condition initiale $(\mathcal{H}_{n_0,a}) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ X_{n_0} \quad = a \end{cases}$

II.C.1) On suppose que pour tout $p \in [0, n_0 - 1]$ la matrice A_p est inversible et on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$, une solution de $(\mathcal{H}_{n_0,a})$.

a) Exprimer d'une façon générale X_{n_0+p} (pour $p \in \mathbb{N}^*$) et X_{n_0-p} (lorsque $1 \leqslant p \leqslant n_0$) à l'aide de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Justifier que le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ admet une solution et une seule.

II.C.2) On suppose qu'il existe $p \in [0, n_0 - 1]$ tel que A_p ne soit pas inversible.

a) Le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ peut il ne pas avoir de solution ?

b) Le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ peut il avoir plus d'une solution ?

II.D - Équations avec second membre

Cette question aborde l'étude de systèmes de la forme

$$(\mathcal{G}) : X_{n+1} = A_n X_n + b_n \text{ ou de problèmes } (\mathcal{G}_{n_0,a}) : \begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n + b_n \\ X_{n_0} = a \end{cases},$$

où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne encore une suite de matrices de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ fixée, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S(\mathbb{C}^k)$ fixée et n_0 un entier supérieur ou égal à 1.
On suppose, de plus, que pour $p \in [0, n_0 - 1]$, les matrices A_p sont inversibles.

II.D.1) **Existence, unicité et calcul pratique**

a) Montrer que le problème $(\mathcal{G}_{n_0,a})$ admet une solution et une seule pour tout élément a de $\mathbb{C}^k$.

b) Écrire, dans le langage de calcul formel de son choix une procédure qui prend en arguments deux entiers naturels n et n_0, un vecteur a, et retourne le terme d'ordre n de la suite solution du problème $(\mathcal{G}_{n_0,a})$. Sont supposées données les fonctions $n \to A_n$, $n \to b_n$, dans une syntaxe adaptée au langage.

Dans ce qui suit, on suppose que **toutes** les matrices A_n sont inversibles et que :

$$\left((Z_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (Z_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (Z_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

désigne une base quelconque de l'espace des solutions du système homogène $(\mathcal{H})$.

II.D.2) Prouver que pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, $\left(Z_p^1, Z_p^2, \ldots, Z_p^k\right)$ est une base de $\mathbb{C}^k$.

indication : montrer que la famille est libre en observant que le problème $\begin{cases} X_{n+1} = A_n X_n \\ X_p = 0 \end{cases}$ *n'admet qu'une solution.*

II.D.3) Pour tout entier naturel n, on note Z_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ dont les k colonnes sont les vecteurs $Z_n^1, Z_n^2, ..., Z_n^k$.

a) Montrer que si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ il existe des suites de complexes $(c_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n^2)_{n\in\mathbb{N}}..., (c_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k} c_n^i Z_n^i = Z_n . {}^t\begin{bmatrix} c_n^1 & \ldots & c_n^k \end{bmatrix}.$$

b) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $C_n = {}^t\begin{bmatrix} c_n^1 & \ldots & c_n^k \end{bmatrix}$ la matrice colonne des composantes du vecteur Y_n dans la base $(Z_n^1, ..., Z_n^k)$: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{k} c_n^i Z_n^i$.

Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de $\mathcal{G}$ si et seulement si la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n.$$

II.E - Un exemple

Reprenons la suite des matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n = \begin{bmatrix} \frac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et introduisons le problème avec second membre : $X_{n+1} = A_n X_n + b_n$ avec $b_n = {}^t\left[\frac{1}{n+2}, -h_n\right]$.

II.E.1) Expliciter une suite de matrices $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite comme dans la question précédente ainsi que la relation de récurrence matricielle $C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n$ établie dans la question précédente.

II.E.2) On considère $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution du problème avec second membre vérifiant la condition

$$Y_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Donner une expression de C_n puis de Y_n en fonction de n, x_0 et y_0.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES I **Filière** TSI

Préliminaires

Un *système différentiel autonome* de dimension 2 est un système différentiel qui se présente sous la forme

$$\begin{cases} x' = \phi(x,y) \\ y' = \psi(x,y) \end{cases} \qquad (S_1)$$

où ϕ et ψ sont des fonctions de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Les fonctions inconnues x et y sont des fonctions de la variable t définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On utilise aussi la notation matricielle

$$X' = F(X)$$

où le vecteur X représente le couple (x,y) et où $F = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1.

Un *point critique* de ce système est un point (x_0, y_0) de Ω tel que

$$\phi(x_0,y_0) = \psi(x_0,y_0) = 0.$$

Étant donné un intervalle I borné ou non, le couple de fonctions (x,y) est une solution de (S_1) sur I si les applications $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et vérifient $x'(t) = \phi(x(t),y(t))$, $y'(t) = \psi(x(t),y(t))$ pour tout $t \in I$. Une *valeur initiale* est un triplet (x_0, y_0, t_0) de nombres réels. Une solution (x,y) vérifie cette valeur initiale si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Si (x,y) est une solution de (S_1) sur I, l'ensemble des points $(x(t),y(t))$, $t \in I$, est la *trajectoire* Γ de cette solution. Cette trajectoire est *maximale* si pour toute trajectoire Γ' ayant un point commun avec Γ, on a $\Gamma' \subset \Gamma$.

On s'intéresse au comportement des trajectoires de certains systèmes autonomes. On rappelle le résultat suivant, qui est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Tout point (x_0, y_0) de Ω appartient à une trajectoire maximale unique.

Remarque sur la rédaction Il sera demandé de tracer des courbes. Il est entendu qu'il faut le faire dans un repère cartésien, mais que la précision souhaitée n'est pas celle d'un dessin industriel. Il suffira de tracer à main levée dans un carré de moins de 12 cm de côté, en s'attachant à bien mettre en valeur les éléments mathématiques de la figure, selon le cas : points particuliers, tangentes etc. Les courbes tracées point par point ne seront pas prises en compte.

Notation Dans le plan euclidien orienté, on note R_θ la matrice de la rotation de centre 0, d'angle θ.

Partie I - Système différentiel autonome

Les résultats obtenus dans cette partie seront utilisés par la suite.

I.A -

I.A.1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Donner la solution générale de l'équation différentielle $x' = \lambda x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Donner la solution particulière vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

I.A.2) Soit α, β deux réels. Donner la solution générale réelle de l'équation différentielle

$$x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$$

dans les deux cas : $\beta \neq 0$, $\beta = 0$.

I.B - On considère l'équation différentielle autonome $x' = x(1-x)$.

I.B.1) Déterminer les solutions constantes.

I.B.2) Trouver une primitive de $\dfrac{x'}{x(1-x)}$.

I.B.3)

a) Montrer que les solutions qui ne sont pas constantes peuvent se mettre sous la forme

$$x(t) = \frac{1}{1 + C\,\mathrm{e}^{-t}}$$

où C est une constante non nulle.

b) Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la solution vérifiant la condition initiale $x(0) = \dfrac{1}{2}$.

- version du 28 février 2008 14h32

Partie II - Cas linéaire

On va étudier le système linéaire :

$$X' = AX \qquad (S_2)$$

où A est une matrice 2×2, ayant deux valeurs propres distinctes, réelles ou complexes, et non nulles. On admet que la solution générale du système (S_2) est de la forme

$$X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t),$$

où X_1 et X_2 sont deux solutions telles que le déterminant, dans une base orthormale directe, de la matrice $\Phi(t) = (X_1, X_2)$ ne s'annule jamais.

II.A - On considère le cas où A est diagonale, donc de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

II.A.1) Utiliser I.A.1) pour obtenir la solution générale de $X' = AX$, sous la forme $X(t) = \Phi_1(t)C$ où $\Phi_1(t)$ est une matrice 2×2 et $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur dont les composantes sont des constantes arbitraires.

II.A.2) Déterminer les trajectoires maximales passant par $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$.

II.A.3) Soit $(x_0, y_0, 0)$ une valeur initiale avec $x_0 \neq 0$. Démontrer que la solution a une trajectoire dont l'équation cartésienne est de la forme

$$y = Cx^\alpha.$$

On déterminera C en fonction de x_0, y_0, et α en fonction de λ_1, λ_2.

II.A.4) Décrire les trajectoires maximales passant par le point $(1,1)$ dans chacun des cas suivants :

(i) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$;

(ii) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$;

(iii) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$,

et les tracer dans un même repère.

II.B - Maintenant A n'est plus nécessairement diagonale, mais elle a toujours des valeurs propres réelles λ_1, λ_2. Soit D la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

II.B.1) Montrer qu'il existe une matrice inversible P qui s'écrit en colonne : $P = (X_1, X_2)$ telle que si $X(t) = PY(t)$, le nouveau vecteur Y vérifie $Y' = DY$.

II.B.2) En déduire que la solution générale de $X' = AX$ peut se mettre sous la forme $X(t) = \Phi_2(t)C$ où $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur de constantes arbitraires et $\Phi_2(t)$ une matrice 2×2 dont le déterminant ne s'annule pas.

II.B.3) Donner la condition sur les λ_i pour que toutes les solutions tendent vers $(0,0)$ lorsque $t \to +\infty$.

II.B.4) On étudie le système différentiel : $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$.

a) Calculer D et P (notations reprises du II.B.1)). Vérifier que pour P on peut prendre une matrice de rotation R_θ où θ est un angle à déterminer. Que vaut R_θ^{-1} ?

b) Trouver la solution générale.

c) On donne la valeur initiale $(1,0,0)$. Calculer la solution $X(t)$ du système ci-dessus, et la solution $Y(t)$ du système $Y' = DY$.

d) Tracer la trajectoire maximale de $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$ passant par le point $(1,0)$ (on pourra d'abord tracer celle correspondant à $Y(t)$).

II.B.5) Mêmes questions avec le système

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X.$$

II.C - On considère le cas où $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, où α et β sont deux réels, $\beta \neq 0$.

II.C.1) Calculer les valeurs propres de A.

II.C.2) Montrer que si $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est solution, alors x et y sont toutes deux solutions de l'équation

$$x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0.$$

En déduire que la solution générale de $X' = AX$ est de la forme $X(t) = e^{\alpha t}R_{\beta t}C$, où C est un vecteur de constantes arbitraires.

II.C.3) Donner la condition sur α, β pour que toutes les solutions tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

II.C.4) On étudie le système

$$X' = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} X.$$

a) Trouver la solution vérifiant la valeur initiale $(1,0,0)$. Soit Γ la trajectoire correspondante.

b) Déterminer l'équation polaire de Γ, sous la forme $r = f(\theta)$.

c) Tracer Γ.

Partie III - Un cas non linéaire

On va étudier le cas non linéaire

$$X' = F(X) \qquad (S_3)$$

où $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x - y^2 \end{pmatrix}$.

III.A -

III.A.1) Calculer la matrice jacobienne $J(x, y)$ de F et donner le développement de Taylor de F au voisinage d'un point quelconque (x_0, y_0).

III.A.2) Trouver les points critiques de (S_3). Montrer que chaque point critique constitue une trajectoire maximale.

III.A.3) Décrire la trajectoire maximale passant par $(0.5, 0.5)$ et celle passant par $(2, 2)$ (on pourra utiliser la question I.B).

III.A.4) Trouver l'ensemble des points (x, y) où la tangente à la trajectoire passant par (x, y) est

a) horizontale ;

b) verticale ;

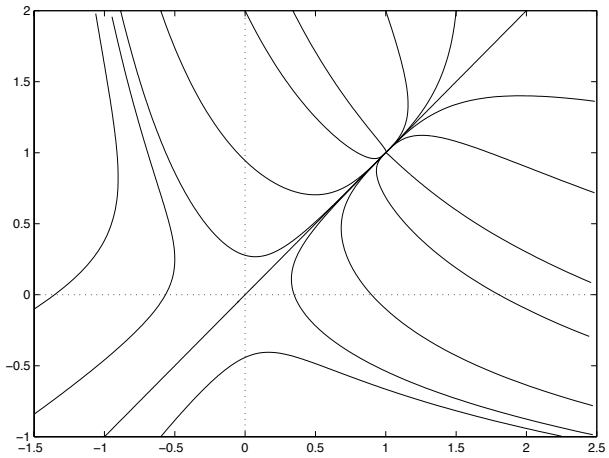
c) de coefficient directeur 1 ;

d) de coefficient directeur -1.

III.B - On admet que pour un tel système différentiel, l'allure des trajectoires au voisinage de chaque point critique (x_0, y_0) est la même que pour le système dit *linéarisé* $X' = J(x_0, y_0)X$ au voisinage de 0.

La figure ci-dessous représente quelques trajectoires de (S_3).

En utilisant la partie II, justifier l'allure de ces courbes au voisinage des points fixes.



III.C - La figure précédente a été tracée en appliquant la *méthode d'Euler*. C'est un algorithme qui permet l'approximation d'une solution $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ au moyen d'une suite $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, construite par récurrence de la manière suivante :

- On fixe un *pas* $\varepsilon > 0$, et on pose $t_n = t_0 + n\,\varepsilon$.
- Étant donné la valeur initiale (x_0, y_0, t_0), on pose $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
- Le vecteur suivant X_1 est solution de l'équation $X'(t_0) = \dfrac{1}{\varepsilon}(X - X_0)$, d'inconnue X.
- Si X_n est calculé, on obtient X_{n+1} comme solution de $X'(t_n) = \dfrac{1}{\varepsilon}(X - X_n)$.

Une interpolation des points X_n permet de tracer une courbe qui constitue l'approximation cherchée de la trajectoire.

III.C.1) Soit H la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} x + \varepsilon(y - x^2) \\ y + \varepsilon(x - y^2) \end{pmatrix}.$$

Montrer que la méthode d'Euler consiste à construire la suite (X_n) définie par

$$X_{n+1} = H(X_n).$$

On appelle aussi (X_n) une *orbite* de H.

III.C.2) Déterminer les *points fixes* de H, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$H(X) = X.$$

III.D - On veut montrer que si (x_0, y_0) est pris dans un voisinage de $(1,1)$, toutes les orbites de H convergent vers $(1,1)$. On prend ε dans $]0,1]$ et on pose $\rho = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

III.D.1) Commençons par le vérifier pour toutes les orbites partant d'un point de la première bissectrice. Soit $g(t) = (1-\varepsilon)t - \varepsilon t^2$.

a) Montrer que si $|t| \leq 0.5$, alors $|g(t)| \leq \rho|t|$.

b) Soit t_0 tel que $|t_0| \leq 0.5$. Soit (t_n) la suite définie par récurrence en posant $t_{n+1} = g(t_n)$. Montrer que $t_n \to 0$.

c) En déduire que si $x_0 = y_0$ et $|1 - x_0| < 0.5$, alors $x_n \to 1$ et $y_n \to 1$.

III.D.2) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on appelle *norme* de X le réel $\|X\| = \max\{|x|, |y|\}$.

a) Vérifier qu'une suite de vecteurs (X_n) converge vers une limite X^* si, et seulement si, la norme $\|X_n - X^*\|$ tend vers 0.

b) Pour chaque vecteur $T = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ on définit

$$G(T) = \begin{pmatrix} u + \varepsilon(v - 2u - u^2) \\ v + \varepsilon(u - 2v - v^2) \end{pmatrix}.$$

Montrer que si $\|T\| \leq 0.5$, alors $\|G(T)\| \leq \rho\|T\|$.

c) Partant de T_0, $\|T\| \leq 0.5$, on définit la suite (T_n) comme l'orbite de G, c'est-à-dire $T_{n+1} = G(T_n)$. Montrer que $\|T_n\| \to 0$.

d) En déduire que si $\|X_0 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\| \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors $X_n \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2008

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière TSI

Définitions et notations

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On utilise l'isomorphisme canonique entre $\mathbb{R}^2$ et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes réelles d'ordre 2 ; ainsi, à tout vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on associe la matrice colonne notée $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On suppose que $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle\ ,\ \rangle$. On identifie $\mathbb{R}$ et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 1, et on peut ainsi écrire le produit scalaire de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$ sous la forme : $\langle u, v\rangle = {}^tUV$, où $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

- Dans E, on note 0_E la matrice nulle, et I_2 la matrice unité.
- On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles orthogonales d'ordre 2.
- On note $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre 2, et $\mathscr{A}_2$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles d'ordre 2.
- Pour toute matrice A de E, on note $tr(A)$ la trace de A, et $det(A)$ le déterminant de A.
- Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un repère orthonormal direct :
$$\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$$
- Tout plan affine sera muni d'un repère orthonormal de la forme :
$$\mathscr{R}_1 = \left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$$
- On appelle surface de $\mathbb{R}^3$ tout ensemble de points défini par une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$, où f est une application de classe C^2 d'une partie Ω de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On note Σ l'ensemble des surfaces de $\mathbb{R}^3$.

Toutes les questions précédées de la mention « Application » peuvent être traitées en admettant éventuellement les résultats qui les précèdent.

Partie I - Étude de deux applications

On considère l'application ϕ de E dans Σ, qui à toute matrice A, associe la surface d'équation cartésienne : $z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

I.A - Exemples :

I.A.1) Déterminer l'image par ϕ de la matrice nulle, et préciser sa nature.

I.A.2) Déterminer l'image par ϕ de la matrice unité I_2, et préciser sa nature.

I.A.3) Déterminer $\phi(A)$, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, et préciser sa nature.

I.B -

I.B.1) Montrer que E est somme directe de $\mathscr{S}_2$ et de $\mathscr{A}_2$: $E = \mathscr{S}_2 \oplus \mathscr{A}_2$

I.B.2) On note X= $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Soit A un élément de E. Montrer que :

(pour tout X de $\mathbb{R}^2$, ${}^tXAX = 0$) $\Longleftrightarrow$ A antisymétrique.

I.B.3) Montrer que ϕ n'est pas injective.

I.B.4) Montrer que, pour toute matrice A de E, il existe une et une seule matrice A' symétrique telle que :
$$\phi(A) = \phi(A').$$

I.C - On note p l'application qui à toute matrice A de E, associe la matrice A' définie en I.B.4 dans E.

On définit l'application $<,>$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par :

Pour tout couple (A, B) de $E \times E$, $< A, B >= tr({}^tAB)$

I.C.1) Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur E.

I.C.2) Montrer que p est le projecteur orthogonal sur $\mathscr{S}_2$, pour le produit scalaire $<,>$.

I.C.3) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de p est diagonale.

- version du 3 mars 2008 11h22

I.C.4) **Application :** dans cette question, on suppose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer $p(A)$.

b) Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $p(A) = PDP^{-1}$.

c) Déterminer une équation réduite de $\phi(A)$, et en déduire la nature de $\phi(A)$.

I.D - Soit A une matrice symétrique non nulle.

En utilisant le fait que A est diagonalisable dans une base orthonormale, donner, en fonction du signe de $\det(A)$, la forme des équations réduites de $\phi(A)$ par rapport à une base orthonormale convenable, et la nature de $\phi(A)$.

I.E - Soit A une matrice orthogonale d'ordre 2 : $A \in O_2(\mathbb{R})$.

I.E.1) Donner en fonction de $\det(A)$, la nature de l'endomorphisme ayant pour matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

I.E.2) Déterminer la nature de $\phi(A)$ dans le cas : $det(A) < 0$
On montrera que $\phi(A)$ peut se déduire de la surface d'équation :

$$z = x^2 - y^2$$

par une rotation convenablement choisie.

I.E.3) Étudier le cas : $det(A) > 0$

I.E.4) **Application :** on considère les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Déterminer une rotation transformant $\phi(A)$ en $\phi(B)$.

Dans toute la suite du problème, on considère l'application ϕ_1 de E dans Σ, qui à toute matrice A, associe la surface (S) d'équation cartésienne :

$$z^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

I.F -

I.F.1) On suppose la matrice A symétrique réelle non nulle. Comme dans la question I.D, donner, en fonction du signe de $det(A)$ et de $tr(A)$, la forme des équations réduites de $\phi_1(A)$ par rapport à une base orthonormale convenable, et la nature de $\phi_1(A)$.

I.F.2) Écrire une procédure qui à toute matrice A de E, associe la nature de $\phi_1(A)$ (on pourra utiliser le langage de son choix).

I.F.3) **Application :** on suppose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Étudier $\phi_1(A)$. Déterminer l'équation réduite et le repère adapté correspondant.

Partie II - Application à une famille de surfaces

On considère dans cette partie, pour tout réel θ, la surface Σ_θ d'équation cartésienne :

$$z = \cos\theta(x^2 + y^2) + 2\sin\theta\ xy.$$

Pour tout réel λ, on considère la courbe plane $\Gamma_{\lambda,\theta}$ d'équation cartésienne :

$$\lambda = \cos\theta(x^2 + y^2) + 2\sin\theta\ xy.$$

II.A - Pour λ fixé, que représente $\Gamma_{\lambda,\theta}$ pour Σ_θ ?

II.B - Déterminer la matrice A_θ symétrique telle que $\Sigma_\theta = \phi(A_\theta)$.

II.C - On suppose que θ est un réel quelconque.

II.C.1) Déterminer des expressions, en fonction du réel θ, des valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A_θ, et une base orthonormale $\mathscr{B}$ diagonalisant A_θ.

II.C.2) Déterminer la nature de la courbe $\mathscr{C}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = \lambda_1 \\ y(\theta) = \lambda_2 \end{cases}$$

II.C.3) Calculer $det(A_\theta)$ et $tr(A_\theta)$.

II.D - On suppose que θ est un réel quelconque

II.D.1) Comparer les surfaces Σ_θ et $\Sigma_{\theta+2\pi}$.

II.D.2) Donner une transformation géométrique permettant de passer de Σ_θ à $\Sigma_{\pi+\theta}$.

II.D.3) Donner une transformation géométrique permettant de passer de Σ_θ à $\Sigma_{-\theta}$.

II.E - On suppose $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

II.E.1) Déterminer la nature de Σ_θ suivant les valeurs du réel θ.
On distinguera les cas :

a) $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{4}$

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{4} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

II.E.2) Déterminer la nature de $\Gamma_{\lambda,\theta}$ suivant les valeurs des réels λ et θ.

II.E.3) Tracer rapidement l'allure des courbes $\Gamma_{\lambda,\theta}$, pour différentes valeurs du réel λ, dans les cas suivants :

a) $\theta = 0$

b) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Partie III - Application de ϕ_1

On considère dans cette partie les surfaces C_θ d'équation :

$$z^2 = \cos\theta(x^2 - y^2) + 2\sin\theta\ xy$$

III.A - Donner la nature de la surface C_0.

III.B - Déterminer la nature de la surface C_θ en utilisant la partie I.

III.C - Montrer que C_θ est l'image de C_0 par une rotation d'axe Oz que l'on précisera.

III.D - Soit Q le plan d'équation : $z = 1$

Soit γ_θ la courbe intersection de la surface C_θ avec le plan Q.
Déterminer une équation cartésienne de la courbe γ_θ.
Donner la nature de la courbe γ_θ.
Tracer sur un unique dessin les graphes des courbes γ_0, $\gamma_{\frac{\pi}{2}}$, γ_π.

Partie IV - Une autre application

Pour tout réel a, on considère la surface S_a d'équation cartésienne :

$$\sin^2 a\ x^2 + \cos^2 a\ z^2 - 2\sin a\ yz - 2\sin a\cos a\ xz - 2\cos a\ xy = 0$$

IV.A - Étude de la surface S_0

IV.A.1) Trouver une matrice A symétrique telle que $S_0 = \phi_1(A)$.

IV.A.2) En déduire la nature de S_0 en utilisant la partie I.

IV.A.3) Déterminer l'équation réduite de S_0, sa nature et son axe.

IV.B - Étude de la surface S_a

IV.B.1) Donner la matrice de la rotation d'axe Oy et d'angle a.

IV.B.2) Déterminer l'image de la surface S_0 par la rotation précédente.

IV.B.3) En déduire la nature de la surface S_a.

IV.C - Étude d'une famille de paraboles

Soit λ un réel quelconque non nul, et R_λ le plan d'équation $y = \lambda$.
Soit P_λ la courbe intersection de la surface S_0 avec le plan R_λ.

IV.C.1) Montrer que P_λ est une parabole, et déterminer les coordonnées de son foyer, noté F_λ.
Déterminer l'ensemble L décrit par le foyer F_λ quand le réel λ décrit $\mathbb{R}^*$.

IV.C.2) À partir du résultat de la question précédente, déterminer l'ensemble F des foyers des paraboles tracées sur S_0. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble F, et préciser la nature de F.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière MP

Les calculatrices sont autorisées

Notations

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $f \mapsto ||f|| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(x)|$ et $L(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même. Soient v un élément de $L(E)$ et f un élément de E ; l'image de f par v est notée vf. L'espace $L(E)$ est muni de la norme $v \mapsto |||v||| = \sup_{||f||\leqslant 1} ||v(f)||$.

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, dans les deux premières parties, on met en place les outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et pour tout entier naturel k et tout nombre réel $x > 0$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

De plus, pour tout $x > 0$, cette fonction vérifie l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que, pour tout entier naturel n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Partie I - Questions préliminaires

I.1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

I.2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

I.3) Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma > 0$,

$$\gamma^x = \circ(\Gamma(x)) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Partie II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit ϕ une application continue de l'intervalle $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0 \geqslant 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.

II.A.1) Établir que la fonction ϕ est positive sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.
(On pourra raisonner par l'absurde).

II.A.2) Soit h un nombre réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant h\phi(nh) \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\, dt$.

b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.

II.A.3) Prouver que :

$$\lim_{h\to 0, h>0} h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\, dt.$$

(On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=0}^{[\frac{a}{h}]} h\phi(nh) + \sum_{n=[\frac{a}{h}]+1}^{+\infty} h\phi(nh)$$

où $[\frac{a}{h}]$ désigne la partie entière du nombre réel $\frac{a}{h}$).

- version du 23 février 2009 13h45

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par la formule $g_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$.

II.B.1) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A.
En déduire que

$$\lim_{x\to 1, x<1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln x) = \Gamma(\alpha).$$

II.B.2) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n$.

a) Établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On note S_α la somme de cette série entière.

b) Prouver que, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$, alors :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.$$

Partie III - La première fonction eulérienne

III.A -

III.A.1) Établir que, pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$.
Pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt.$$

III.A.2) Prouver successivement pour tout couple (α, β) de réels strictement positifs, les relations suivantes :

(i) $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$

(ii) $B(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt$

(on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$.)

(iii) $B(\alpha+1, \beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha, \beta)$.

III.B - On se propose d'établir pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\beta > 0$ la formule suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs 2.

III.B.2) Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose :

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitienne sur le segment $[0, 1]$.
On note $A_{\alpha,\beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire tel que :

$$\forall x, y \in [0, 1],\ |\psi_{\alpha,\beta}(x) - \psi_{\alpha,\beta}(y)| \leqslant A_{\alpha,\beta}|x - y|.$$

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif :

$$|u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}.$$

c) On reprend les notations de la question (II.B.2).
Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$:

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha, \beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n.$$

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel x, $0 \leqslant x < 1$,

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma>0}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

III.C - Formule des compléments

III.C.1) Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$.

III.C.2) Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

a) Vérifier que :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt.$$

b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note :

$$z_k = e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}.$$

Établir que :

(*) $$\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\right).$$

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left((t-Rec)^2+(Imc)^2\right) + i\arctan\left(\frac{t-Rec}{Imc}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-c}$, prouver en utilisant judicieusement la relation (*) que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = -i\,\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin(\frac{2p+1}{2q}\pi)}.$$

III.C.3) Déduire de (III.C.1) et (III.C.2) que :

$$\forall \alpha \in]0,1[,\ B(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Partie IV - L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant l'intervalle $]0,1[$.

IV.A -

IV.A.1) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,x[$.

IV.A.2) Pour tout élément f de E, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt \quad \text{si } 0 < x \leqslant 1.$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0,1]$,

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,dt.$$

b) Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction$A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

c) Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et que :

$$|||A_\alpha||| = \sup_{||f||\leqslant 1} ||A_\alpha f|| = \frac{1}{1-\alpha}.$$

IV.B - On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n\geqslant 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = id_E$ (application identité de E) et, pour tout $n \geqslant 0$, par la relation de récurrence suivante :

$$A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n.$$

IV.B.1) On pose $\beta = 1-\alpha$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0,1]$ établir l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leqslant \frac{x^{n\beta}(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}||f||.$$

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que :

$$|||A_\alpha^n||| \leqslant \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

IV.B.2) Pour tout nombre réel positif γ, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0.$$

On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3.

IV.B.3) Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E.

a) Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$.
On note g la somme de cette série de fonctions.

b) Prouver que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)g = f.$$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $id_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

où $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$.

IV.C - Pour tout entier naturel n, on note e_n la fonction monômiale $t \mapsto t^n$.

IV.C.1) Soit n un entier naturel.

a) Calculer $A_\alpha e_n$.

b) En déduire que :

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}.$$

IV.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x \in [0,1],\ Pf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} Pe_n.$$

Établir que pour toute fonction polynômiale ψ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P\psi.$$

IV.C.3) Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$|||P||| = \sup_{||f|| \leqslant 1} ||Pf|| = 1.$$

b) On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer que :

$$B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P.$$

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ associe sa dérivée.

Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien défini et que :

$$D \circ B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_E.$$

d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière MP

Les calculatrices sont autorisées

Notations

n et m sont des entiers naturels vérifiant $1 \leq m \leq n$.
E et F désignent les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis de leur structure euclidienne canonique. On note I_E l'application identité de E. Le produit scalaire est noté $(.|.)$ aussi bien dans E que dans F et la norme euclidienne est notée $||.||$. $S^+(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) positifs de E, $S^{++}(E)$ le sous-ensemble constitué des endomorphismes autoadjoints définis positifs. On rappelle que, si $u \in S^{++}(E)$, alors $\phi_u : (x, y) \mapsto (u(x)|y)$ est un produit scalaire sur E.

Partie I - Produit de deux endomorphismes autoadjoints positifs

On se propose dans cette partie de montrer, en plus de quelques généralités, que si u et v sont des éléments de $S^+(E)$, alors $u \circ v$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

I.A - Généralités

I.A.1) Montrer qu'un endomorphisme symétrique de E est dans $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^{+*}$).

I.A.2) Montrer que si $u \in S^{++}(E)$, alors $u^{-1} \in S^{++}(E)$.

I.A.3) Soit $u \in S^+(E)$.

a) Montrer qu'il existe un élément s de $S^+(E)$ tel que $u = s^2$.

b) En déduire que :

$$\forall x \in E, (u(x)|x) = 0 \Rightarrow u(x) = 0. \qquad (1)$$

I.B - Preuve du résultat

u et v désignent des éléments de $S^+(E)$.

I.B.1) On note u_1 et w les endomorphismes de $Im(u)$ induits par u et $u \circ v$ respectivement.

a) Montrer que u_1 est un élément de $S^{++}(Im(u))$.

b) Montrer que w est autoadjoint positif relativement à $\phi_{u_1^{-1}}$ où $\phi_{u_1^{-1}}$ est le produit scalaire sur $Im(u)$ défini dans les notations.

I.B.2) Déduire de la question précédente que l'endomorphisme de $Im(u \circ v)$ induit par $u \circ v$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

I.B.3) Montrer, à l'aide de (1), que :

$$E = Im(u \circ v) \oplus Ker(u \circ v).$$

I.B.4) Conclure.

I.C - Cas particulier

a désigne un élément de $S^{++}(E)$ et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

I.C.1)

a) Montrer qu'il existe un unique élément g de $\mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout couple (x, y) de $E \times F$, $(f(x)|y) = (x|g(y))$.

L'application g est notée f^*.

b) Montrer que : $Ker(f^*) = [Im(f)]^\perp$.

c) En déduire que si une suite $(z_k)_k$ d'éléments de $Im(f)$ est telle que la suite $(f^*(z_k))_k$ converge vers 0, alors la suite $(z_k)_k$ converge vers 0.

d) Montrer que :

$$f^* \circ f \in S^+(E).$$

I.C.2) Montrer que $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphismes diagonalisable de E et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

On note ρ sa plus grande valeur propre.

I.C.3) Montrer que :

$$\forall x \in E, ||f(x)||^2 \leq \rho(a(x)|x).$$

- version du 23 février 2009 16h25

Partie II - Minimisation d'une fonctionnelle quadratique

Désormais a désigne un élément de $S^{++}(E), b$ est un élément fixé de E et f est un élément non nul de $\mathcal{L}(E,F)$.
J est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, J(x) = \frac{1}{2}(a(x)|x) - (b|x).$$

II.A - Minimisation théorique

On considère un sous-espace vectoriel V de E et on s'intéresse à la minimisation de la restriction de J à V.

II.A.1) Montrer que si $||x||$ tend vers $+\infty$ et $x \in V$, alors $J(x)$ tend vers $+\infty$.

II.A.2) Déduire de la question précédente l'existence d'un minimum de la restriction de J à V.

II.A.3) Soit (x,y) un élément de V^2 tel que $x \neq y$.

a) Montrer que :

$$J(\frac{x+y}{2}) < \frac{J(x)+J(y)}{2}.$$

b) En déduire que la restriction de J à V atteint son minimum en un seul point.

II.A.4) Soit $x \in V$ et $(t,h) \in \mathbb{R} \times V$.

a) Calculer $J(x+th) - J(x)$.

b) En déduire que la restriction de J à V est minimale en x si et seulement si

$$a(x) - b \in V^{\perp}. \qquad (2)$$

II.A.5) Ici $n = 3$ et ω est l'élément de E en lequel J est minimale. Pour tout réel $k > J(\omega)$, on note $\mathcal{E}_k$ la surface d'équation $J(x) = k$ et on considère un plan vectoriel Π inclus dans E auquel ω n'appartient pas.

a) Déterminer la nature de la surface $\mathcal{E}_k$ et donner son centre.

b) Montrer qu'il existe une unique valeur de k pour laquelle Π est tangent à la surface $\mathcal{E}_k$.

c) Déterminer cette valeur de k si $\mathcal{E}_k$ et Π sont d'équations respectives :

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x = k$ et $x + y + z = 0$ relativement à la base canonique de E.

II.B - Lagrangien augmenté

Soit r un réel positif et L_r est l'application de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$L_r(x,p) = J(x) + \frac{r}{2}||f(x)||^2 + (p|f(x)).$$

On dit que (x,p) est un point selle de L_r si, pour tout couple (y,q) dans $E \times F$, $L_r(x,q) \leq L_r(x,p) \leq L_r(y,p)$ ou encore $(L_r(x,.)$ est maximale en p et $L_r(.,p)$ est minimale en $x)$.

II.B.1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $L_r(x,.)$ admet un maximum,
- $x \in Ker(f)$,
- $L_r(x,.)$ est constante.

II.B.2) Montrer que :

$L_r(.,p)$ est minimale en x si et seulement si $(a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) = b.$ (3)

II.B.3)

a) Montrer que (x,p) est un point selle de L_r si et seulement si

$$(x \in Ker(f) \quad \text{et} \quad a(x) + f^*(p) = b). \qquad (4)$$

b) En déduire que la restriction de J à $Ker(f)$ est minimale en x si et seulement si il existe un élément p de F tel que (x,p) est un point selle de L_r.

II.B.4) Soit (x,p) un point selle de L_r.

a) Montrer que (x,p') est encore un point selle de L_r si et seulement si $p' - p$ est un élément de $[Im(f)]^{\perp}$.

b) Montrer que, parmi les points selle de L_r du type (x,p'), il en existe un et un seul pour lequel $||p'||$ est minimale et le caractériser.

Partie III - Algorithmes d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz

On reprend les notations de la partie précédente et on note x l'élément de $Ker(f)$ en lequel la restriction de J à $Ker(f)$ est minimale. On note également p un élément de F tel que (x,p) est un point selle de L_r.
ρ désigne la plus grande valeur propre de $a^{-1} \circ f^* \circ f$, p_0 est fixé dans F et $(\gamma_k)_k$ désigne une suite de réels à valeurs dans $[\alpha,\beta]$, où $0 < \alpha < \beta < 2(r + \frac{1}{\rho})$.
On considère la suite $(x_k)_k$ d'éléments de E et la suite $(p_k)_k$ d'éléments de F définies de la façon suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, L_r(.,p_k) \text{ est minimale en } x_k \text{ et } p_{k+1} = p_k + \gamma_k f(x_k).$$

III.A -

III.A.1) On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $y_k = x_k - x$ et $r_k = p_k - p$.

a) Montrer que :

$$r_{k+1} = r_k + \gamma_k f(y_k) \quad \text{et} \quad (a + rf^* \circ f)(y_k) + f^*(r_k) = 0.$$

b) Montrer que :

$$||r_k||^2 - ||r_{k+1}||^2 = \gamma_k \left[2(a(y_k)|y_k) + (2r - \gamma_k)||f(y_k)||^2\right] \geq \alpha \left[2(r + \frac{1}{\rho}) - \beta\right] ||f(y_k)||^2.$$

c) En déduire la convergence de la suite $(||r_k||)_k$ puis celle de la suite $(x_k)_k$ vers x.

III.B -

III.B.1) On pose, pour tout entier k, $p_k = \overline{p_k} + \overline{q_k}$ où $(\overline{p_k}, \overline{q_k}) \in Im(f) \times [Im(f)]^\perp$ et, de même, $p = \overline{p} + \overline{q}$ où $p = (\overline{p}, \overline{q}) \in Im(f) \times [Im(f)]^\perp$.

a) Montrer que la suite $(\overline{q_k})_k$ est constante.

b) Montrer que :

$$f^*(\overline{p_k} - \overline{p}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

c) En déduire que la suite $(p_k)_k$ converge vers $\overline{p} + \overline{q_0}$.

Désormais, on choisit $p_0 = 0$ et la suite $(\gamma_k)_k$ constante égale à γ. Dans ces conditions, la suite $((x_k, p_k))_k$ converge vers $(\overline{x}, \overline{p})$ point selle de L_r avec $||\overline{p}||$ minimale.

III.B.2) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \left(\left[I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f\right]^k \circ (a + rf^* \circ f)^{-1}\right)(b).$$

III.B.3) On suppose que, relativement à la base canonique de E, la matrice de a est diagonale, soit $\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ et que celle de f, relativement aux bases canoniques de E et F, admet pour coefficient générique

$$f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que $I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphisme autoadjoint de E qui laisse stables $Ker(f)$ et $[Ker(f)]^\perp$. On note ψ l'endomorphisme induit sur $[Ker(f)]^\perp$.

b) Déterminer la norme de ψ subordonnée à $||.||$; on la note ϵ.

c) r est supposé fixé. Comment choisir γ pour que ϵ soit minimal ? Quelle est alors sa valeur ?

d) Quelle est alors l'influence de r sur la rapidité de convergence de la suite $(x_k)_k$?

III.B.4) On se place toujours dans les bases canoniques de E et F et on se donne les matrices A, B et F de a, b et f par leur coefficient générique :

$$a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad b_i = 1, \quad f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = m + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que a est effectivement un endomorphisme de E défini positif.

b) Écrire une procédure effectuant lorsqu'on choisit $\gamma = 2r$, le calcul de X_k, matrice de x_k relativement à la base canonique de E (on supposera n, m et r définis numériquement mais on définira les matrices A, B et F).

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PSI

Calculatrices autorisées

Définitions et notations

On rappelle le résultat suivant : Toute partie X **non vide** de $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément noté $\min X$.

On rappelle les points suivants de Maple :

- La liste contenant l'unique élément a est notée $[a]$.
- Le couple (a,b) sera représenté par la liste $[a,b]$.
- Pour ajouter l'élément x (qui peut être un couple) en queue de la liste L on invoque : $L := [\mathrm{op}(L), x]$

Et pour Mathematica :

- La liste contenant l'unique élément a est notée `{a}`.
- Le couple (a,b) sera représenté par la liste `{a,b}`.
- Pour ajouter l'élément x (qui peut être un couple) en queue de la liste L on invoque : `L=Append[L,x]`

On dira qu'une série à termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2).

Les parties I et II sont indépendantes.

Les correcteurs tiendront compte de la présentation, particulièrement de la position correcte des indices.

- version du 2 mars 2009 15h2

Partie I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x. On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection s de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$.

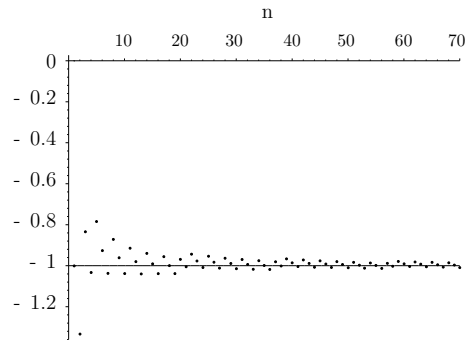
I.A - On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geqslant 0}$, $(q_n)_{n\geqslant 0}$ et $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0$, $S_0 = 0$
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $S_n > x$ alors :
  $q_{n+1} = 1 + q_n, \quad p_{n+1} = p_n, \quad s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$
  sinon : $q_{n+1} = q_n, \quad p_{n+1} = 1 + p_n, \quad s_{n+1} = 2p_{n+1}$
  Dans les deux cas : $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1) Écrire une fonction `suite` qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie l'affichage de la liste (ou tableau si l'on préfère) $[s_1, s_2, \ldots, s_n]$.

I.A.2) En modifiant la fonction précédente de façon à ce qu'elle retourne le dessin simultané de la liste des points de coordonnées $(n, S_n)_{n\leqslant 70}$ et de la droite horizontale d'ordonnée x (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient pour $x = -1, \quad n = 70$ le dessin suivant :



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

I.B - On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $s(n) = s_n$.

Prouver, pour $n \geqslant 1$, les propriétés suivantes :

$$\{s(1), s(2), \ldots, s(n)\} = \{2, 4, \ldots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \ldots, 2q_n - 1\}$$

$$p_n + q_n = n$$

$$S_n = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)}$$

En déduire que s est injective.

I.C -

I.C.1) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2) On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croît vers $+\infty$.

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée.

Utiliser le I.C.1) pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

I.C.3) Justifier rapidemment que (q_n) tend vers $+\infty$.

I.C.4) Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur lui-même.

I.D -

I.D.1) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$|S_{n+1} - x| \leqslant |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leqslant |u_{s(n+1)}|$$

I.D.2) En déduire que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que

$$|S_{n+1} - x| \leqslant |u_{s(n+1)}|$$

I.D.3) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$.

I.D.4) Soit $n \geqslant n_0$. On note $v_n = \max\big(|S_n - x|,\ |u_{2p_{n+1}}|,\ |u_{2q_{n+1}-1}|\big)$.

Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5) Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

I.E -

I.E.1) Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \ \text{ quand } n \to +\infty.$$

I.E.2) Donner un développement analogue pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

I.E.3)

a) Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$, l'égalité :

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

b) En déduire que :

$$S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln 2 + o(1).$$

c) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

d) Déterminer la limite de :

$$\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \cdots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Partie II - Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II.A - Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1).

II.B - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.B.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une limite.

II.B.2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N, la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie (P_2).

II.C - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n\, u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant (P_1).

II.D - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n\,\varepsilon_n$ diverge. Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit :

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$.
- Pour $n \geqslant 1$: $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geqslant p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$

Dans tous les cas : $A_n = A_{n-1} + a_n\,\varepsilon_n$.

II.D.1) Dans cette question seulement on suppose que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{9}{4(n+1)}$.

Déterminer les 6 premiers termes des suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Ecrire une procédure *exemple* qui prend en argument l'entier n et retourne la liste :

- en Maple : $[[0, p_0, \varepsilon_0, A_0], [1, p_1, \varepsilon_1, A_1], \ldots, [n, p_n, \varepsilon_n, A_n]]$
- en Mathematica : $\{\{0, p_0, \varepsilon_0, A_0\}, \{1, p_1, \varepsilon_1, A_1\}, \ldots, \{n, p_n, \varepsilon_n, A_n\}\}$

II.D.2)

a) Démontrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que :

$p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbf{N} \ / \ n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geqslant 0 \end{cases}.$$

b) Dans le cas général, calculer p_{n_k}, ε_{n_k}.

Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n\,a_n$ diverge.

c) Déterminer n_1,n_2 et n_3 pour l'exemple de la question III.B.1).

II.D.3) Dans cette question seulement on suppose que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

a) Écrire une fonction `indexer` qui prend en argument l'entier n et qui retourne :

- en Maple, la liste $[[0, n_0], [1, n_1], \ldots, [q, n_q]]$
- en Mathematica la liste $\{\{0, n_0\}, \{1, n_1\}, \ldots, \{q, n_q\}\}$

où q est le plus grand des entiers k tel que $n_k \leqslant n$. Par exemple l'appel de `indexer`(10000) retourne :

$[[0,0],[1,1],[2,2],[3,51]]$ $\quad$ $\Big(\text{resp. } \{\{0,0\},\{1,1\},\{2,2\},\{3,51\}\}\Big)$

b) Soit $k \geqslant 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité :

$$k - 1 \leqslant A_{n_k-1} \leqslant k - 1 + \frac{1}{2^{k-1}\,n_k}$$ En déduire que $n_{k+1} - 2 > n_k$.

c) Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$ en fonction de k, n_k et n_{k+1}. En déduire, pour $k \geqslant 3$, l' inégalité :

$$\frac{1}{2^k}\ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leqslant A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leqslant \frac{1}{2^k}\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right).$$

d) Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geqslant 3$, l' inégalité :

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leqslant \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leqslant 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

e) En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $(\ln n_k - 2^k)$; puis prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n_k \underset{k\to+\infty}{\sim} C\,\exp\left(2^k\right).$$

en déduire que : $$A_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}.$$

puis que : $$A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n)}{\ln 2}.$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n\,a_n$ converge.

a) Prouver que la série $\sum \varepsilon_n\,|a_n|$ converge.

b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

II.F - Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n\,x_n$.

II.F.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

II.F.2) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n\,(a_{n+1} - a_n)$.

II.F.3) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4) Caractériser les suites vérifiant (P_2).

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PSI

Calculatrices autorisées

Préliminaires

Dans le problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels ; $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel. On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices colonnes réelles d'ordre n.

On peut ainsi écrire le produit scalaire $< X, Y >$ de deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ sous la forme ${}^tXY$ et la norme $||X|| = \sqrt{< X, X >}$ sous la forme $\sqrt{{}^tXX}$.
Pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels, on note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme coefficients diagonaux.
On note $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on note $(x_1, \ldots, x_n)_{\mathscr{B}}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.
Si $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}_2 = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, on note $P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ vers $\mathscr{B}_2$.
Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$ la matrice de l'endomorphisme f par rapport à la base $\mathscr{B}_1$ au départ et $\mathscr{B}_2$ à l'arrivée, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\big(f(e_1)\big)_{\mathscr{B}_2}$, $\big(f(e_2)\big)_{\mathscr{B}_2}$, $\ldots$, $\big(f(e_n)\big)_{\mathscr{B}_2}$.
En particulier, si $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2 = \mathscr{B}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$.

Partie I - Valeurs propres de AB et BA

Soit $n \geqslant 2$ un entier et A, B deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On propose de démontrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

I.A - Cas de la valeur 0.

I.A.1) Démontrer que 0 est valeur propre de AB si, et seulement si, $\det(AB) = 0$.

I.A.2) Démontrer que 0 est valeur propre de AB si, et seulement si, 0 est valeur propre de BA.

I.B - Soit λ une valeur propre réelle non nulle de AB, $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de AB associé à cette valeur propre λ.

I.B.1) Démontrer que les vecteurs ABX et BX sont non nuls.

I.B.2) Démontrer que le vecteur BX est vecteur propre pour la matrice BA.

I.B.3) Démontrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles.

I.C - On suppose que A est inversible. On note I la matrice identité d'ordre n.

I.C.1) En factorisant de deux façons différentes la matrice $ABA - xA$, démontrer que pour tout x réel ou complexe, on a : $\det(AB - xI) = \det(BA - xI)$.

I.C.2) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec le même ordre de multiplicité.

On admet que ce résultat est encore vrai si A n'est pas inversible.

- version du 12 mars 2009 10h51

Partie II - Valeurs singulières d'une matrice

Dans cette partie II, on fixe un entier n, $n \geqslant 2$, une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $r = \text{rg}\,(A)$.
On note f et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont les matrices dans la base canonique $\mathscr{B}$ sont respectivement A et ${}^tAA$.

II.A - Diagonalisation de $A\,{}^tA$ et de ${}^tAA$.

II.A.1)

a) Démontrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\quad AX = 0 \Longrightarrow {}^tAAX = 0$.

b) On suppose que $X \in \mathbb{R}^n$ est tel que ${}^tAAX = 0$.

Calculer ${}^tX\,{}^tAAX$ et en déduire que $AX = 0$.

c) En déduire que Ker $g =$ Ker f puis que $rg(A) = \text{rg}\,({}^tAA)$.

II.A.2) Démontrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont deux matrices symétriques.

II.A.3) En utilisant la partie I, démontrer qu'il existe $P, Q \in O(n)$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

${}^tAA = PD\,{}^tP$ et $A\,{}^tA = QD\,{}^tQ$

On pose $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

II.A.4) Démontrer que D possède exactement r termes diagonaux non nuls.

On suppose par la suite que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont non nuls et donc

$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

II.A.5)

a) En utilisant ${}^tAA = PD\,{}^tP$, démontrer qu'on peut écrire D sous la forme ${}^tMM$, avec $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, +\infty[$.
Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle « valeurs singulières de A » les n nombres σ_i définis par $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

II.A.6) Soient $U, V \in O(n)$.
Démontrer que les valeurs singulières de UAV sont exactement celles de A.

II.A.7) Dans cette question seulement, on suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle.
Déterminer les valeurs singulières de A en fonction des valeurs propres de A.

II.B - On rappelle que $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et ${}^tAA = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ et dans cette section, on note $\rho = \text{rg}\,({}^tAA) = \text{rg}\,(g)$.

II.B.1) Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathscr{B}_1 = (X_1, \ldots, X_n)$ telle que :

- Pour tout entier $i \in [1, \rho]$, ${}^tAAX_i = \lambda_i X_i$;
- $(X_{\rho+1}, \ldots, X_n)$ soit une base de Ker f.

II.B.2) Démontrer que la famille $(AX_1, \ldots, AX_\rho)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et une base de Im (f).

II.B.3) Pour tout entier $i \in [1, \rho]$, calculer $||AX_i||$.

II.B.4) Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$\text{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f) = \text{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

II.B.5) Démontrer qu'il existe deux matrices orthogonales $P_1, P_2 \in O(n)$ telles que

$A = P_1 \cdot \text{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \cdot P_2$.

II.C -

II.C.1) Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{R}^+$ des réels positifs.
Démontrer qu'il existe deux matrices Q_1 et Q_2 dans $O(n)$ telles que :
$A = Q_1 \cdot \text{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \cdot Q_2 \Longleftrightarrow \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les valeurs singulières de A.

II.C.2) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles. Démontrer que :
A et B ont les mêmes valeurs singulières $\Longleftrightarrow \exists (R_1, R_2) \in O(n)^2, A = R_1 B R_2$.

Partie III - Étude géométrique d'un exemple

Dans cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

III.A - Dans cette section, on utilise les notations et résultats de la partie II.

III.A.1) Déterminer le rang de A et calculer ${}^tAA$.

III.A.2) Déterminer les valeurs singulières de A que l'on notera $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

III.A.3) Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tAA$ que l'on notera $\mathscr{B}_1 = (X_1, X_2, X_3)$.
On rangera les vecteurs dans l'ordre décroissant des valeurs propres correspondantes.

III.A.4) Déterminer une base orthonormée $\mathscr{B}_2 = (Y_1, Y_2, Y_3)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

III.A.5) Démontrer que $A = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_2} \cdot \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot {}^tP_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_1}$.
On pose pour la suite $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_1}$, $Q = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_2}$ et $D = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

III.B - On étudie la partie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{S} = \{AX\,;\, X \in \mathbb{R}^3, ||X|| = 1\} = \{f(x)\,;\, x \in \mathbb{R}^3, ||x|| = 1\}.$$

C'est donc l'ensemble décrit par $f(x)$ quand x décrit l'ensemble des vecteurs de norme 1 (sphère unité de $\mathbb{R}^3$).

III.B.1) Démontrer que $\mathcal{S}$ est une partie d'un plan dont on déterminera une base et une équation cartésienne.

III.B.2) Démontrer que $\mathcal{S} = \{QDX', X' \in \mathbb{R}^3, ||X'|| = 1\}$.

III.B.3) Démontrer que dans une base adaptée $\mathscr{B}'$ à déterminer,

$$y = (y_1, y_2, y_3)_{\mathscr{B}'} \in \mathcal{S} \iff \begin{cases} \dfrac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y_2^2}{\sigma_2^2} \leqslant 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

III.B.4) Préciser la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Partie IV - Image de la sphère unité

Dans cette partie, comme dans la Partie III, A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on étudie $\mathcal{S}$ l'ensemble $\mathcal{S} = \{AX\,;\, X \in \mathbb{R}^3, ||X|| = 1\}$.

IV.A -

Dans cette section on suppose que $\mathrm{rg}\,(A) = 3$.

IV.A.1) Démontrer que A admet trois valeurs singulières $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ strictement positives, distinctes ou non.

IV.A.2) Démontrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathscr{B}'$ telle que :

$$y = (y_1, y_2, y_3)_{\mathscr{B}'} \in \mathscr{S} \iff \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{y_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$

IV.A.3) Préciser la nature géométrique de $\mathscr{S}$.

IV.B -

Dans cette section, on suppose que $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.

IV.B.1) Démontrer qu'une seule des valeurs singulières de A est non nulle.
On la note σ_1.

IV.B.2) Démontrer que $\mathscr{S}$ est un segment dont on donnera la longueur.

Partie V - Pseudo-inverse d'une matrice

Soit n un entier, $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, qu'on écrit, comme dans la Partie II, sous la forme $A = Q_1 \cdot \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p, 0, \ldots, 0) \cdot Q_2$, où $Q_1, Q_2 \in O(n)$ sont deux matrices orthogonales et $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ des réels strictement positifs.

On définit le pseudo-inverse A^+de A par

$$A^+ = {}^tQ_2 \cdot \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \cdots, \frac{1}{\sigma_p}, 0, \cdots, 0\right) \cdot {}^tQ_1$$

On pose $P = AA^+$.

V.A - Démontrer que $rg(A) = p$.

V.B - Simplifier le produit matriciel AA^+ et en déduire que, si A est une matrice inversible, $A^+ = A^{-1}$.

V.C - On note f et h les endomorphismes $\mathbb{R}^n$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A et P.

Démontrer que h est un projecteur orthogonal dont on donnera le rang.

V.D - Démontrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(h)$.

V.E - Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé.

On considère le système linéaire $AX = Y$, où $X \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnu. On suppose que ce système n'a pas de solution et, à défaut, on recherche les vecteurs X tels que la norme de $Y - AX$ soit minimale.

Démontrer que $X = A^+Y$ est l'un de ces vecteurs.

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES I

Les calculatrices sont autorisées.

Le problème porte sur l'étude des séries factorielles, séries de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Les parties I et II traitent d'un exemple. Les parties III, IV et V, indépendantes des deux premières, ont pour objet l'étude de propriétés de la somme d'une série factorielle convergente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie I - Préliminaires

I.A - Pour tout entier p naturel non nul, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n,p) = \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)}$$

I.A.1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u(n,p)$ est convergente.

I.A.2) On pose :

$$\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n,p)$$

Calculer $\sigma(1)$.

I.A.3) Pour $p \geq 2$, et pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et $u(n,p)$.

I.A.4) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p, pour $p \geq 2$.

I.B - Soient q un entier ≥ 2 et N un entier naturel ≥ 1.

Donner une majoration du reste

$$R(N,q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$$

en le comparant à une intégrale.

Filière PC

Partie II - Un exemple d'accélération de la convergence

II.A -

II.A.1) Montrer par récurrence l'existence de trois suites (a_p), (b_p) et (c_p) d'entiers naturels définies pour $p \geq 2$ telles que, pour tout réel x strictement positif et pour tout entier p on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}$$

II.A.2) Exprimer a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} à l'aide de p, b_p et c_p.

II.A.3) Montrer que : $\forall p \geq 2$, $b_p \geq c_p \geq 0$.

II.A.4) Calculer a_p, b_p, c_p pour $p = 2, 3$ et 4.

II.B - On désire calculer une valeur décimale approchée de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

II.B.1) En utilisant I.B, déterminer un entier naturel N suffisant pour que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ soit inférieur à } \varepsilon.$$

II.B.2) Donner un majorant simple de :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

et montrer, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de ε avec une valeur de N moins grande que celle trouvée à la question II.B.1.

II.B.3) Donner une valeur décimale approchée à ε près (par défaut) de $\zeta(3)$ en utilisant ce qui précède.

Partie III - Séries factorielles

III.A -

III.A.1) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \; v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x}, \; w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}.$$

Montrer que la série de terme général

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right), \text{ définie pour } n \geq 1, \text{ est convergente.}$$

III.A.2) En déduire qu'il existe $l(x)$ (dépendant de x et strictement positif) tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x).$$

III.B - Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de complexes et x un réel strictement positif. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé AC) si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} a_n v_n(x)$ est AC.

III.C - On désigne désormais par $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ indexées par $\mathbb{N}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ soit AC pour tout réel x strictement positif.

Soit $a = (a_n)_{n \geq 0}$ un élément de $\mathscr{A}$, montrer que :

III.C.1) la fonction f_a définie par :

$$x \mapsto f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$$

est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

III.C.2) la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

III.D -

III.D.1) Donner un exemple d'un élément a de $\mathscr{A}$ avec a_n non nul pour tout entier n.

III.D.2) Donner un exemple d'une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ qui ne soit pas un élément de $\mathscr{A}$.

III.E - Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

III.E.1) Montrer que, pour tout entier n la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x > 0\ ,\ |u'_n(x)| \leq u_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right)$$

III.E.2) En déduire que la fonction f_a est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

N.B. On dira alors que la fonction f_a est développable en série factorielle (sous-entendu ici sur $]0,+\infty[$ et en abrégé DSFA) et on admettra qu'un tel développement est unique.

Partie IV - Représentation intégrale

IV.A -

IV.A.1) Soit n un entier naturel. On pose :

$$\forall k = 0 \ldots n\ ,\ P_k = \prod_{i=0,\, i\neq k}^{n} (X+i)\ .$$

Montrer que les polynômes P_k forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

IV.A.2) En déduire qu'il existe des rationnels indépendants de x notés $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ tels que :

$$\forall x > 0\ ,\ \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{x+k}\ .$$

Exprimer α_k en fonction de k et n.

IV.B - Montrer, pour $x > 0$ et k entier naturel, l'existence de l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1+k} dy$$

et calculer sa valeur en fonction de k et x.

IV.C - Montrer que :

$$\forall x > 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\ .$$

En déduire que, pour tout élément a de $\mathscr{A}$, on a :

$$\forall x > 0\ ,\ f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy\ .$$

IV.D - Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

IV.D.1) Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n y^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On note ϕ_a la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\phi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n .$$

IV.D.2) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^1 (1-y)^{x-1}\phi_a(y)dy$ est définie sur $]0,+\infty[$, DSFA sur ce même intervalle et égale à f_a.

Partie V - Dérivabilité d'une série factorielle

V.A - On reprend les notations des parties III et IV.

V.A.1) Montrer que la fonction $x \mapsto f_a(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x>0,\ f'_a(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\phi_a(y)\ln(1-y)dy .$$

V.A.2) Montrer que la fonction $\psi_a : y \mapsto \phi_a(y)\ln(1-y)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

V.A.3) On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n = \frac{\psi_a^{(n)}(0)}{n!} .$$

Vérifier que $b_0 = 0$ et que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{p=0}^{n-1}\frac{a_p}{n-p} .$$

V.B - Soient $x>0$ et $N\geq 1$. Montrer :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leq \sum_{p=0}^{N-1}|a_p|\left(\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k(k+p+1)^x}\right) .$$

V.C - Montrer que, pour tout entier p tel que $0\leq p\leq N-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{1}{(p+1)^x} + \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(t+p+1)^x} .$$

V.D - Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{(p+1)^x}.$$

V.E - En déduire que la série de terme général $\dfrac{b_n}{(n+1)^x}$ est AC pour $x > 0$.

V.F - Montrer enfin que la fonction f'_a est DSFA sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0,\ f'_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n(x).$$

V.G - Exemple

Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$ est DSFA sur $]0, +\infty[$ et calculer les coefficients notés a'_n et a''_n pour les fonctions f' et f'' pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Vérifier qu'on retrouve ainsi les calculs faits en seconde partie.

••• FIN •••

Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PC

Les calculatrices sont autorisées

Notations et objet du problème

- La notation $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ est notée I.
- Dans tout le problème, on identifie les deux espaces vectoriels $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. De la sorte, si $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on peut former le produit $Mx \in \mathbb{K}^n$, ce qui permet de définir l'endomorphisme f_M canoniquement associé à M par :
$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ f_M(x) = Mx.$$
L'image de f_M, $(\mathrm{Im} f_M)$ sera notée $\mathrm{Im}(M)$ et le noyau de f_M, $(\mathrm{Ker} f_M)$ sera noté $\mathrm{Ker}(M)$.
Pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(M)$ le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On note $\rho(M)$ le rayon spectral de M, c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres de M.
- On dira qu'une suite de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$) converge, ou est convergente, si elle converge pour une norme particulière de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$). On sait qu'elle converge alors pour toute norme de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$) puisque ces espaces sont de dimension finie.
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\ ,\ \rangle$. La norme euclidienne associée est notée $||\ ||$.
Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle f(x), x\rangle \geqslant 0$.
Un endomorphisme symétrique est dit défini positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, x non nul, $\langle f(x), x\rangle > 0$.
On dit de même qu'une matrice symétrique $M \in M_n(\mathbb{R})$ est positive si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est positif, et qu'elle est définie positive si ce même endomorphisme est défini positif.

Dans tout le problème, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur fixé, et l'on étudie des méthodes itératives pour approcher la ou les solutions du système $Ax = b$.

Partie I - La fonctionnelle J

I.A - Question préliminaire

I.A.1) Montrer qu'une matrice symétrique M de $M_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$, et qu'elle est définie positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

I.B - Cas particulier : $n = 2$

Dans cette question, on pose $A = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 75 \\ -75 \end{pmatrix}$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\text{pour tout } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^2,\ F(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle.$$

a) Justifier que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction gradient de F (grad F) est notée ∇F.

b) Prouver que :
$$\forall\, v \in \mathbb{R}^2,\ \nabla F(v) = Av - b.$$

c) En déduire que la fonction F admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.

d) Déterminer la nature géométrique de la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = F(x_1, x_2)$.

e) Déduire de la question précédente que la fonction F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.

I.C - On suppose dans cette question que la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive et on définit l'application J de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle.$$

appelée la *fonctionnelle associée à A*.

- version du 17 mars 2009 9h38

I.C.1) Prouver que, pour tout couple (v,h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle Av, h\rangle = \langle Ah, v\rangle.$$

On pose $\nabla J(v) = Av - b$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

I.C.2)

a) Expliciter la fonction $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\ v, h \in \mathbb{R}^n, J(v+h) = J(v) + \langle \nabla J(v), h\rangle + R(h).$$

Quel est le signe de $R(h)$?

b) On suppose qu'un vecteur $v_0 \in \mathbb{R}^n$ est tel que $J(v) \geqslant J(v_0)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

En observant que $J(v_0 + th) \geqslant J(v_0)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\nabla J(v_0) = 0.$$

I.C.3) On suppose que la matrice A est symétrique définie positive.

a) Montrer qu'il existe un unique $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(v_0) = \inf_{v\in\mathbb{R}^n} J(v)$, et le déterminer en fonction de A et b.

b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$, d non nul.
Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $J(v - rd) = \inf_{\rho\in\mathbb{R}} J(v - \rho d)$.
Exprimer r en fonction de v, d et A.

I.C.4) On suppose encore que la matrice A est définie positive. Déterminer deux constantes $\alpha > 0$ et $m > 0$ en fonction du spectre de A telles que :

$$\langle \nabla J(v) - \nabla J(u), v - u\rangle \geqslant \alpha ||v-u||^2$$

$$||\nabla J(v) - \nabla J(u)|| \leqslant m||v-u||$$

pour tout couple (u,v) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

I.C.5) On suppose que la matrice A est symétrique positive, mais non inversible, et que b appartient à $\mathrm{Im}(A)$. On note u_0 un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $Au_0 = b$.
Déterminer l'ensemble des vecteurs v_0 tels que $J(v_0) = \inf_{v\in\mathbb{R}^n} J(v)$ et préciser sa nature géométrique.

Partie II - Méthode du gradient à pas constant

II.A - Normes matricielles et rayon spectral

Une norme N sur $M_n(\mathbb{C})$ est dite *subordonnée* s'il existe une norme ν sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$,

$$N(M) = \max_{x\in\mathbb{C}^n,\, x\neq 0} \frac{\nu(Mx)}{\nu(x)}.$$

On dit que N est subordonnée à ν.

II.A.1) On définit sur $\mathbb{C}^n$ la norme $||\ ||_\infty$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ ||x||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

On note N_∞ la norme sur $M_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $||.||_\infty$.

Montrer que, pour toute matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, $N_\infty(M) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|$.

II.A.2) Soit N une norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que : $\forall\ A, B \in M_n(\mathbb{C}), N(AB) \leqslant N(A).N(B)$.
En déduire que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, N(A^n) \leqslant (N(A))^n$.

b) Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho(M) \leqslant N(M)$.

II.A.3) Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire $m_{ij} = 0$ si $i > j$).
Soit α un nombre réel strictement positif, et P_α la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1})$, c'est-à-dire dont le i-ème coefficient diagonal est α^{i-1}.

a) Calculer $P_\alpha^{-1} M P_\alpha$.

b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $N_\infty(P_\alpha^{-1} M P_\alpha) \leqslant \rho(M) + \varepsilon$.

II.A.4) Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$ fixé.

a) Prouver l'existence d'une matrice P inversible et d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$N_\infty(P_\alpha^{-1} P^{-1} M P P_\alpha) \leqslant \rho(M) + \epsilon.$$

b) En déduire qu'il existe une norme subordonnée N sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$N(M) \leqslant \rho(M) + \varepsilon.$$

II.A.5) Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $c \in \mathbb{C}^n$. On définit l'application f de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ par :

$$x \mapsto Mx + c.$$

Montrer l'équivalence des assertions (i) et (ii) ci-dessous :

(i) Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par $x_{k+1} = f(x_k)$, est convergente, et sa limite est indépendante de x_0.

(ii) $I - M$ est inversible et $\rho(M) < 1$.

Il pourra être utile d'introduire un réel $\epsilon > 0$ et de choisir une norme subordonnée N sur $M_n(\mathbb{C})$ telle qu'on ait l'inégalité $N(M) \leqslant \rho(M) + \epsilon$ pour la matrice M considérée.

II.B - Méthode du gradient à pas constant

Soit A une matrice symétrique positive, mais pas nécessairement inversible, b un vecteur appartenant à l'espace $\mathrm{Im}(A)$, et J la fonctionnelle associée à A.
On note x_0 un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $b = Ax_0$
On désigne par S une matrice symétrique définie positive donnée.

II.B.1) Montrer que l'application définie par $\phi(u,v) = \langle Su, v\rangle$, pour tout couple (u,v) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, fournit un produit scalaire sur l'espace $\mathbb{R}^n$.

II.B.2) Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire ϕ défini à la question précédente.
En déduire qu'ils sont supplémentaires.

II.B.3) Montrer que, dans $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$, le système linéaire $Au = b$ possède une unique solution notée u'. Décrire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^n$.

II.B.4) Étant donné un nombre réel γ, on définit la suite récurrente

$$u_{k+1} = u_k - \gamma S^{-1}\nabla J(u_k)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ étant arbitrairement choisi.

a) Montrer que la composante du vecteur u_k sur le sous-espace $\mathrm{Ker}(A)$, dans la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(S^{-1}A) \oplus \mathrm{Ker}(A)$, est indépendante de k ; on la note w.

b) Pour tout k, u_k s'écrit donc $u_k = w + u'_k$ avec $u'_k \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)$. Préciser l'application $f : \mathrm{Im}(S^{-1}A) \to \mathrm{Im}(S^{-1}A)$ telle que $u'_{k+1} = f(u'_k)$ pour tout k.

c) Montrer que les valeurs propres complexes de la matrice $S^{-1}A$ sont toutes réelles positives ou nulles.
Il pourra être utile de montrer que pour toute matrice X de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, ${}^t\overline{X}SX > 0$.

d) Montrer qu'on définit un automorphisme linéaire g de $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ en posant $g(x) = S^{-1}Ax$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)$.

On note Λ_n la plus grande valeur propre de $S^{-1}A$, et l'on suppose, jusqu'à la fin de cette partie, que $0 < \gamma < \dfrac{2}{\Lambda_n}$.

e) Dans cette question, on note *id* l'endomorphisme identité de l'espace $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$. Montrer que le polynôme caractéristique de $id - \gamma g$ est scindé sur $\mathbb{R}$, et que le rayon spectral de $id - \gamma g$ est strictement inférieur à 1.

f) En déduire que la suite $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans le sous-espace $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$. On note u' sa limite. On peut donc écrire :

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = u' + w.$$

g) Quelle relation le vecteur u' vérifie -t-il ?

Partie III - Méthode du gradient à pas optimal

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive. On note $v_0 \in \mathbb{R}^n$ le vecteur tel que $Av_0 = b$.
On construit une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

- on choisit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et l'on pose $d_0 = \nabla J(u_0)$;
- en supposant u_k déjà construit, on définit u_{k+1} en fonction de u_k de la façon suivante :
  on pose $d_k = \nabla J(u_k)$ et on détermine $r_k \in \mathbb{R}$ tel que $J(u_k - r_k d_k) = \inf_{\rho\in\mathbb{R}} J(u_k - \rho d_k)$
  (cf. I.C.3.b).
  On pose alors $u_{k+1} = u_k - r_k d_k$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie, ainsi que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

III.A -

III.A.1) Montrer que, pour tout entier k, $\langle d_{k+1}, d_k\rangle = 0$.

III.A.2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ dépendant du spectre de A tel que :

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) \geqslant \frac{\alpha}{2}||u_{k+1} - u_k||^2.$$

III.A.3) Prouver que la suite $(J(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Montrer alors que $\lim_{k\to\infty} ||u_{k+1} - u_k|| = 0$.

III.A.4) Montrer que $||d_k|| \leqslant ||d_k - d_{k+1}||$, puis que $\lim_{k\to+\infty} d_k = 0$.

III.A.5) Montrer que $\langle \nabla J(u_k), u_k - v_0\rangle \geqslant \alpha||u_k - v_0||^2$. Prouver finalement que $\lim_{k\to\infty} ||u_k - v_0|| = 0$.

III.B - Un exemple : $n = 2$, $c > 0$ est différent de 1, A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, et $b = 0$. On suppose que $u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ n'a aucune composante nulle. On construit la suite (u_k) par la méthode décrite dans cette partie. On note $u_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$

III.B.1) Expliciter les composantes de u_{k+1} en fonction de celles de u_k et de c. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les deux composantes de u_k sont différentes de 0.

III.B.2) Montrer que le produit des coefficients directeurs de u_{k+1} et u_k est une constante indépendante de k, que l'on déterminera. On rappelle que le coefficient directeur de $u_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ est $t_k = \dfrac{y_k}{x_k}$.

III.B.3) Montrer que u_{k+2} et u_k sont colinéaires, et calculer le coefficient de colinéarité. Illustrer géométriquement le comportement de la suite (u_k) pour $c > 1$.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière TSI

Calculatrices autorisées

Partie I - Développement limité d'une intégrale

On considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto x \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

I.A -

I.A.1) Déterminer avec soin l'ensemble de définition de f.

I.A.2) Étudier les variations de f sur cet ensemble.

I.A.3) Après avoir minoré $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-1,0\right]$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

I.A.4) Étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$ de la courbe représentant f.

I.B - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier relatif k tel que $k > -n$, les réels $x_k = \dfrac{k}{n}$.

I.B.1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $y_k = \dfrac{k}{n}\left(\dfrac{1}{2n} + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}}{n+i}\right) + \frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}{2(n+k)}\right)$.

Montrer que y_k est une approximation de $f(x_k)$, en indiquant le principe de cette approximation (méthode des trapèzes). Il n'est pas demandé d'établir une majoration de l'erreur commise.

I.B.2) Établir une formule donnant, selon le même procédé, une approximation de $f(x_k)$ lorsque $-n < k < 0$. On notera encore y_k cette approximation.

I.B.3) Les entiers n et m strictement positif étant préalablement fixés, écrire en utilisant la syntaxe de *Maple* ou de *Mathematica* une suite d'instructions calculant les y_k pour $-n < k \leqslant m$.
Les instructions écrites devront minimiser le temps de calcul (en évitant les calculs répétés).

I.B.4) Lorsque $n = 4$ et $m = 8$, calculer effectivement les y_k et construire la représentation graphique de f sur $\left]-1,2\right]$. On admettra que les approximations $f(x_k) \simeq y_k$ résultant de ce choix de n sont suffisamment précises sur cet intervalle.

I.C -

I.C.1) Montrer qu'il existe une suite réelle $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k + o\left(x^n\right).$$

I.C.2) Calculer ce développement limité pour $n = 5$.

I.C.3) Pour $n \geqslant 2$, exprimer λ_n en fonction de n sous forme d'une somme.

I.C.4) Établir, pour tout $n \geqslant 1$, une expression de λ_{n+1} en fonction de n et λ_n.

I.C.5) Écrire, en utilisant la syntaxe de *Maple* ou de *Mathematica*, une suite d'instructions calculant, à partir d'une valeur entière $n \geqslant 2$ donnée, la partie régulière du développement limité d'ordre n de $f(x)$ en 0.

Les instructions devront calculer ce développement à l'aide des résultats obtenus ci-dessus sur les λ_n, sans recourir aux fonctions prédéfinies du logiciel concernant la dérivation ou les développements limités et en optimisant le temps de calcul.

Partie II - Une équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle :

$$(1+x)\,y' = x\,y.$$

On note φ la solution de cette équation sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$ vérifiant $\varphi(0) = 1$.

II.A -

II.A.1) Justifier *a priori* (c'est-à-dire sans calcul) l'existence et l'unicité de φ.

II.A.2) Calculer explicitement $\varphi(x)$.

II.B - Pour montrer que φ est développable en série entière au voisinage de 0, on suppose d'abord qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un intervalle ouvert I contenant 0, tels que :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour tout } x \in I.$$

- version du 12 mars 2009 11h29

II.B.1) Montrer, à l'aide de l'équation différentielle $(1+x)\,y' = x\,y$, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie nécessairement, pour $n \geqslant 1$, une relation de récurrence entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1} que l'on explicitera, et préciser les valeurs numériques de a_0 et a_1.

II.B.2) Montrer que cette relation et les valeurs de a_0 et a_1 définissent une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que cette suite est bornée.

II.B.3) En déduire que φ est bien développable en série entière au voisinage de 0.

II.B.4) Montrer que pour $|x| > 1$, la série $\sum a_n x^n$ est divergente et en déduire le rayon de convergence de cette série entière.

II.C - À partir de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au II.B.2), on pose pour tout $n \geqslant 1$:

$$b_n = a_n + a_{n-1}.$$

II.C.1) Établir une relation entre b_n, b_{n+1} et n, puis calculer, pour tout $n \geqslant 1$, b_n en fonction de n.

II.C.2) En déduire, sous forme d'une somme, une expression de a_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 2$.

II.C.3) Si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est celle définie au I.C.1), démontrer la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \lambda_n = \frac{a_{n-2}}{n-1}.$$

II.D - On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\,u_{n+1} + n\,u_n - u_{n-1} = 0.$$

II.D.1) Écrire selon la syntaxe de *Maple* ou de *Mathematica* une fonction ou une procédure calculant, à partir de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u_n lorsque u_0 et u_1 sont donnés.

II.D.2) Montrer que E, muni des opérations usuelles sur les suites réelles, forme un espace vectoriel réel.

II.D.3) À l'aide de l'application de E vers $\mathbb{R}^2$ définie par : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$, démontrer que E est un plan vectoriel.

II.D.4) Déterminer l'ensemble des suites géométriques contenues dans E.

II.D.5) En utilisant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au II.B.2), déterminer une base de E et en déduire, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E, une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et $n \in \mathbb{N}$.

Partie III - Une équation différentielle d'ordre 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(x+1)\,y'' - x\big(x^2+2x+2\big)\,y' + \big(x^2+2x+2\big)\,y = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

III.A - Solutions polynomiales

III.A.1) Montrer que, si l'équation $(\mathscr{E})$ admet une solution polynomiale non nulle, celle-ci est de degré 1.

III.A.2) Déterminer toutes les solutions polynomiales de $(\mathscr{E})$.

III.B - Résolution de l'équation différentielle

III.B.1) À l'aide d'une des solutions trouvées au III.A.2), montrer que la résolution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}^*$ se ramène à la résolution de l'équation différentielle $(1+x)\,y' = x\,y$ étudiée dans la partie II.

III.B.2) En déduire, à l'aide de la fonction f de la partie I, une expression de la solution générale de $(\mathscr{E})$ sur chacun des intervalles $\left]-1,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$.

III.B.3) Déterminer toutes les solutions de l'équation $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$. L'équation $(\mathscr{E})$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ et, si oui, lesquelles ?

III.C - Solutions sur l'intervalle $]-1,+\infty[$

III.C.1) Quel est, selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre des solutions de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$ vérifiant : $y(0) = \alpha$?

III.C.2) Établir que, pour tout $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$, il existe une et une seule solution de $(\mathscr{E})$ sur $\left]-1,+\infty\right[$ vérifiant les conditions suivantes : $y'(0) = \beta$ et $y''(0) = \gamma$.

• • • FIN • • •

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière TSI

Calculatrices autorisées

Dans tout le problème, (Π) est un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $P_1, \ldots, P_k$ sont k points de ce plan, **non contenus dans une même droite passant par O**.

On rappelle que, si une ellipse admet dans un certain repère orthonormal direct une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, son aire est égale à πab et les points qui sont à l'intérieur de cette ellipse sont ceux dont les coordonnées dans ce repère vérifient : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$.

On note $(\vec{\Pi})$ le plan vectoriel euclidien engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On dira qu'une ellipse est convenable si elle est centrée en O et si tous les points $P_1, \ldots, P_k$ sont à l'intérieur de l'ellipse ou sur l'ellipse elle-même (les axes d'une telle ellipse ne sont pas nécessairement dirigés par $\vec{i}$ et $\vec{j}$).

Une ellipse convenable sera dite optimale si son aire est inférieure ou égale à celle de toute autre ellipse convenable.

Le but du problème est de prouver qu'il existe une ellipse optimale, et une seule.

Pour n entier strictement positif, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles $n \times n$ et $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. Si A appartient à $M_n(\mathbb{R})$, on note $a_{i,j}$ le coefficient de A qui se trouve à la i-ème ligne et à la j-ème colonne.

Note : on identifie une matrice de $M_1(\mathbb{R})$ avec son unique élément $a_{1,1}$.

Partie I - Matrices symétriques

I.A - Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

I.A.1) Former le polynôme caractéristique de A.

I.A.2) En déduire la somme et le produit des deux valeurs propres (réelles ou complexes) de A en fonction de la trace de A et du déterminant de A.

I.A.3) On suppose de plus que A est symétrique. Démontrer que A admet deux valeurs propres réelles strictement positives si et seulement si son déterminant et sa trace sont strictement positifs.

Les résultats de la fin de cette partie I sont établis pour un entier n , $n \geqslant 2$ mais ne seront utilisés, dans la suite du problème, que pour $n = 2$.

I.B - Soit (i, j) un couple d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. On note $M_{i,j}$ la matrice, appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, dont tous les termes sont nuls, à l'exception de $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$ qui sont égaux à 1.

I.B.1) On suppose que $n = 3$.

a) Il y a 6 couples (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$. Écrire les 6 matrices $M_{i,j}$.

b) Démontrer que les 6 matrices précédentes forment une base de $S_3(\mathbb{R})$.

I.B.2) On revient au cas général : $n \geqslant 2$.

a) Combien y-a-t-il de matrices $M_{i,j}$?

b) Démontrer que tout $A \in S_n(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire des matrices $M_{i,j}$.

c) Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$?

I.C - On identifie tout élément de $\mathbb{R}^n$ à un vecteur colonne V à n lignes. On note ${}^tV$ le transposé d'un tel vecteur.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On lui associe la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall\, V \in \mathbb{R}^n,\ q(V) = {}^tVA\,V.$$

I.C.1) Pour V et V' dans $\mathbb{R}^n$, exprimer l'unique terme de ${}^tVA\,V'$ en fonction de $q(V)$, $q(V')$ et $q(V + V')$.

I.C.2) Pour i et j entiers, fixés entre 1 et n, comment choisir V et V' pour que l'unique terme de ${}^tVA\,V'$ soit égal à $a_{i,j}$?

I.C.3) Soient A_1 et A_2 deux matrices dans $S_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, on ait ${}^tVA_1\,V = {}^tVA_2\,V$. Démontrer que $A_1 = A_2$.

- version du 2 mars 2009 13h57

I.C.4) Soient A_1 et A_2 deux matrices dans $S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A_1 sont strictement positives et que pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, tel que ${}^tVA_1\,V = 1$, on ait aussi ${}^tVA_2\,V = 1$.

Soit $V \in \mathbb{R}^n$, V non nul.

a) Démontrer qu'il existe un vecteur W non nul tel que ${}^tVA_1\,V = {}^tW\,D\,W$, où D est la matrice diagonale ayant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme termes diagonaux.

b) En déduire que ${}^tVA_1\,V$ est un nombre réel strictement positif.

On note r^2 ce nombre.

c) En considérant ${}^t\left(\frac{V}{r}\right)\,A_1\,\frac{V}{r}$, montrer que ${}^tVA_1\,V = {}^tVA_2\,V$.

d) Démontrer que $A_1 = A_2$.

Partie II - Quelques propriétés de l'ellipse

À tout endomorphisme symétrique f de $(\overrightarrow{\Pi})$ on associe la courbe $\mathcal{C}_f$, ensemble des points M du plan Π tels que le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM})$ soit égal à 1.

II.A -

II.A.1) Démontrer qu'il existe une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$ de $(\overrightarrow{\Pi})$ telle que $\mathcal{C}_f$ admette, dans le repère $(O, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$, une équation de la forme $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$.

II.A.2) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ est une ellipse si et seulement si les valeurs propres de f sont deux réels strictement positifs.

II.B - Réciproquement, soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, dans le plan (Π).

II.B.1) Démontrer qu'il existe un endomorphisme f de $\overrightarrow{\Pi}$, symétrique et à valeurs propres strictement positives et tel que $\mathcal{E}$ soit la courbe $\mathcal{C}_f$ associée à f.

On pourra définir cet endomorphisme par sa matrice dans une base orthonormale directe bien choisie de $\overrightarrow{\Pi}$.

II.B.2) En utilisant le résultat de I.C-, montrer que cet endomorphisme est unique.

II.C - f étant un endomorphisme symétrique de $\overrightarrow{\Pi}$, on note M_f la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

II.C.1) Démontrer que les trois matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre dans $S_2(\mathbb{R})$.

II.C.2) En déduire qu'on peut associer à f un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que la matrice M_f s'écrive $M_f = \begin{pmatrix} \gamma - \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma + \alpha \end{pmatrix}$

II.C.3) Démontrer que f admet deux valeurs propres réelles et strictement positives si et seulement si le triplet (α, β, γ) associé à f vérifie les deux propriétés ci-dessous :

$$\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad \gamma > 0.$$

II.D - Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, dans le plan (Π) et f l'unique endomorphisme symétrique qui lui est associé (donc $\mathcal{E} = \mathcal{C}_f$).

Soit(α, β, γ) le triplet associé à f (donc associé à $\mathcal{E}$).

II.D.1) En se plaçant dans un repère particulier, montrer que les points qui sont à l'intérieur de $\mathcal{E}$ ou sur $\mathcal{E}$ elle-même sont les points M du plan tels que

$$\overrightarrow{OM} \cdot f(\overrightarrow{OM}) \leqslant 1.$$

II.D.2) En déduire que ce sont les points M du plan dont les coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ vérifient

$$(\gamma - \alpha)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 - 2\beta xy \leqslant 1,$$

II.D.3) En reprenant le repère particulier, exprimer l'aire de $\mathcal{E}$ en fonction de $\mathrm{Det}(f)$, déterminant de f dans une base orthonormale directe.

II.D.4) En déduire que cette aire est égale à $\dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}}$.

Partie III - Existence d'une ellipse optimale

III.A -

III.A.1) Justifier que, si les trois points O, P_i, P_j sont alignés, la suppression dans l'ensemble $\mathcal{L} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ de l'un (bien choisi) des deux points P_i ou P_j ne change pas l'ensemble des ellipses convenables.

On suppose donc que pour tous i et j distincts, O, P_i, P_j ne sont pas alignés.

III.A.2) Il en résulte que les points P_i sont tous distincts de O. À chaque point $P_i \in \mathcal{L}$ on attribue alors un couple (θ_i, ρ_i) de coordonnées polaires dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, avec $\rho_i > 0$.

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, associée à un triplet (α, β, γ) . Démontrer que P_i est à l'intérieur de $\mathcal{E}$ ou sur $\mathcal{E}$ elle-même si et seulement si

$$\gamma \leqslant \alpha \cos 2\theta_i + \beta \sin 2\theta_i + \frac{1}{{\rho_i}^2}$$

III.A.3) Quelle est la position de P_i quand cette inégalité est une égalité ?

III.B - Démontrer qu'il existe au moins une ellipse convenable.

Dans la suite de cette partie, $\mathcal{E}_0$ est une ellipse convenable quelconque, fixée définitivement, associée au triplet $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

III.C -

III.C.1) Démontrer que pour tout $r \geqslant 1$, le triplet $(\alpha_0, \beta_0, r\gamma_0)$ est associé à une ellipse $\mathcal{E}_1$ de centre O, d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_0$.

III.C.2) Démontrer qu'on peut, de plus, choisir r de sorte que cette ellipse $\mathcal{E}_1$ soit convenable et passe par l'un des points $P_1, \ldots, P_k$.

On suppose, quitte à réordonner les points $P_1, \ldots, P_k$, que ce point est P_1 et que l'on a choisi la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$ de sorte que $\theta_1 = 0$.

On note $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ le triplet $(\alpha_0, \beta_0, r\gamma_0)$ associé à $\mathcal{E}_1$.

III.D -

III.D.1) Démontrer que, pour tout $\lambda \geqslant 0$, le triplet $(\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1 + \lambda)$ est associé à une ellipse $\mathcal{E}_2$, de centre O, passant par P_1 et dont l'aire est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_1$.

III.D.2) Démontrer que $1 - \cos(2\theta_i)$ est strictement positif pour tout i de 2 à k.

III.D.3) Démontrer qu'on peut, de plus, choisir λ de sorte que $\mathcal{E}_2$ soit convenable et passe par l'un des points $P_2, \ldots, P_k$.

On suppose, quitte à réordonner les points $P_2, \ldots, P_k$, que $\mathcal{E}_2$ passe par P_2.

On note $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ le triplet $(\alpha_1 + \lambda, \beta_1, \gamma_1 + \lambda)$ associé à $\mathcal{E}_2$.

III.E - On étudie l'ensemble des triplets (α, β, γ) qui vérifient

$$\gamma = \alpha \cos 2\theta_i + \beta \sin 2\theta_i + \frac{1}{{\rho_i}^2} \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2.$$

III.E.1) Démontrer que ce sont les triplets de la forme $\big(g(\beta), \beta, h(\beta)\big)$, où g et h sont deux fonctions que l'on précisera.

III.E.2) Démontrer que, pour un tel triplet, $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ est une fonction du second degré de β, dont le terme de plus haut degré est $-\beta^2$.

III.E.3) Démontrer qu'un tel triplet est associé à une ellipse convenable d'aire inférieure ou égale à celle de $\mathcal{E}_2$ si et seulement si β appartient à un certain intervalle fermé borné non vide (que l'on ne demande pas de préciser).

III.E.4) En déduire que, parmi les ellipses convenables passant par P_1 et P_2, il en existe une d'aire minimale.

III.F - Déduire de ce qui précède qu'il existe une (au moins) ellipse optimale et qu'elle passe par deux (au moins) des points P_i.

Partie IV - Unicité de l'ellipse optimale

Pour pouvoir raisonner géométriquement, on interprète (α, β, γ) comme les coordonnées d'un point d'un espace rapporté à un repère orthonormal $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ (il n'y a aucun lien entre cet espace et le plan (Π)).

On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des points de cet espace dont le triplet (α, β, γ) des coordonnées est associé à une ellipse convenable.

Pour la commodité du langage, on suppose que l'axe $(\Omega, \vec{K})$ est vertical ascendant ; on pourra donc utiliser les mots « au-dessus » et « au-dessous » pour situer un point par rapport à une surface, afin d'en déduire une description géométrique d'une partie de l'espace.

IV.A - Soit $\mathcal{H}_0$ la surface d'équation $Z^2 = X^2 + Y^2$ dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

IV.A.1) Quelles sont ses sections par les plans d'équations $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = 1$?

IV.A.2) Quelle est la nature de $\mathcal{H}_0$?

On note $\mathcal{H}_0^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}_0$ qui vérifient $Z \geqslant 0$.

IV.A.3) Donner, sans justification, la position par rapport à $\mathcal{H}_0^+$ des points tels que le triplet (α, β, γ) soit associé à une ellipse.

IV.B - Pour i entre 1 et k, on note $\mathcal{T}_i$ la surface d'équation

$$Z = X \cos 2\theta_i + Y \sin 2\theta_i + \frac{1}{{\rho_i}^2} \text{ dans le repère } (\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$$

IV.B.1) Quelle est la nature de $\mathcal{T}_i$?

IV.B.2) Donner sans justification la position par rapport à $\mathcal{T}_i$ des points de l'espace qui vérifient la relation $Z \leqslant X \cos 2\theta_i + Y \sin 2\theta_i + \frac{1}{{\rho_i}^2}$.

IV.C -

IV.C.1) Déduire de ce qui précède une description géométrique de l'ensemble $\mathcal{K}$.

IV.C.2) Justifier que si deux points M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{K}$, le milieu du segment M_1M_2 appartient à $\mathcal{K}$.

Dans la suite de cette partie, ℓ est un réel strictement positif. On note $\mathcal{H}_\ell$ la surface d'équation

$$Z^2 - X^2 - Y^2 = \ell.$$

et ${\mathcal{H}_\ell}^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}_\ell$ qui vérifient $Z > 0$.

IV.D -

IV.D.1) Quelles sont les sections de $\mathcal{H}_\ell$ par les plans d'équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \sqrt{\ell}$, $Z = 2\sqrt{\ell}$?

IV.D.2) Quelle est la nature de $\mathcal{H}_\ell$? On demande une réponse précise mais sans justification.

IV.D.3) Représenter la partie de $\mathcal{H}_\ell$ comprises entre les plans $Z = 0$ et $Z = 2\sqrt{\ell}$.

IV.E - Soient M_1 et M_2 deux points différents de ${\mathcal{H}_\ell}^+$, M_3 le milieu du segment M_1M_2 et $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les coordonnées de M_3.

IV.E.1) Donner, sans justification, la position de M_3 par rapport à ${\mathcal{H}_\ell}^+$.

IV.E.2) En déduire que ${\gamma_3}^2 - {\alpha_3}^2 - {\beta_3}^2 > \ell$.

IV.F - Déduire de ce qui précède que l'ellipse optimale est unique.

Partie V - Exemples

V.A - On suppose ici que l'ensemble $\mathcal{L} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ admet un axe de symétrie Δ passant par O.

V.A.1) En utilisant le résultat de la partie IV, montrer que Δ est également axe de symétrie pour l'ellipse optimale.

V.A.2) Application : On suppose que $k = 2$ et que les coordonnées de P_1 et P_2 dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont respectivement $(2, 1)$ et $(2, -1)$.

a) Justifier que l'équation dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de l'ellipse optimale est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

b) Déterminer a et b.

V.B - On suppose ici que $k = 4$ et que P_1, P_2, P_3, P_4 ont respectivement pour coordonnées $(3, 0)$, $(3, \sqrt{3})$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

V.B.1) Justifier qu'on peut supprimer le point P_4.

V.B.2) Donner un système de coordonnées polaires pour P_1, P_2, P_3.

V.B.3) Comment s'écrivent ici les trois inégalités du III.A.2) ?

V.B.4) Démontrer qu'il n'existe pas d'ellipse de centre O, passant par P_1 et P_3 et contenant P_2.

On admet que, de même, il n'existe pas d'ellipse de centre O, passant par P_2 et P_3 et contenant P_1.

V.B.5) Exprimer $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ en fonction de β lorsque les deux premières inégalités du III.A.2) sont des égalités.

V.B.6) Pour quelle valeur de β cette fonction est-elle maximale ?

V.B.7) Donner une équation cartésienne de l'ellipse optimale et la tracer en s'aidant, par exemple, de la calculatrice.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2010

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière MP

Les calculatrices sont autorisées

Dans tout le problème l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes est considéré comme le plan affine euclidien muni de son repère orthonormé canonique $(0, 1, \mathrm{i})$ (où $\mathrm{i}^2 = -1$).

- On notera K l'ensemble des triplets (α, β, γ) de $\mathbf{R}^3$ constitués de trois réels positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
- Si $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, on notera $\widehat{abc}$ le "triangle plein" défini par :
  $\widehat{abc} = \{\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c \;/\; (\alpha, \beta, \gamma) \in K\}$.

  Dans tout le problème on notera τ_0, τ_1 et τ les triangles pleins définis par :
  $\tau_0 = \widehat{-10\mathrm{i}}$.
  $\tau_1 = \widehat{01\mathrm{i}}$.
  $\tau = \widehat{-11\mathrm{i}}$.
- On notera également ϕ_0 et ϕ_1 les applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ définies par (en notant $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z) :
  $\phi_0(z) = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\,\overline{z} + \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}$ et $\phi_1(z) = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,\overline{z} + \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.
- La notation $\{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ désignera l'ensemble des suites $(r_n)_{n\geq 1}$ d'entiers naturels tels que $r_n \in \{0, 1\}$ pour tout entier naturel non nul n.
- La norme de la convergence uniforme sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{C}$ est notée $\|\quad\|_\infty$.
- La partie entière du réel x est notée $[x]$. Si n est un entier naturel on posera, pour tout réel x et tout entier naturel non nul n :
  $r_n(x) = [2^n\, x] - 2\,[2^{n-1}\, x]$.
- On notera $\mathbf{Z}\left[\dfrac{1}{2}\right]$ l'ensemble des rationnels de la forme $\dfrac{k}{2^n}$ où $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.
- On rappelle enfin que, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une famille de parties de $\mathbf{C}$ indexées sur $\mathbf{N}^*$, on a :
  $\bigcap_{n\geq 1} X_n = \{z \in \mathbf{C} \;/\; \forall n \in \mathbf{N}^*,\ z \in X_n\}$

L'objectif du problème est la construction d'une application f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbf{C}$ dont l'image $f([0, 1])$ est le triangle plein τ et l'étude de quelques unes de ses propriétés.

- version du 1er mars 2010 9h35

Partie I - Préliminaires géométriques

I.A -

I.A.1) Établir que $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$.

I.A.2) Représenter sur une même figure τ_0, τ_1, τ.

I.A.3)

a) Soit $a \in \mathbf{C}$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Prouver que l'image z' du complexe z par la réflexion dont l'axe est la droite passant par a et dirigée par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ vérifie la relation :

$z' - a = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\,\overline{(z-a)}$

b) Établir une relation analogue à celle de la question précédente entre un complexe z et son image z' par l'homothétie de centre a et de rapport $\rho > 0$.

c) Démontrer que ϕ_0 est la composée d'une réflexion dont on précisera l'axe et d'une homothétie de rapport strictement positif à préciser et dont le centre appartient à l'axe de la réflexion. Prouver une propriété analogue pour ϕ_1. Ces décompositions sont-elles uniques ?

I.A.4) Que vaut l'image d'un triangle plein $\widehat{abc}$ par ϕ_0 et par ϕ_1 ? Déterminer $\phi_0(\tau)$ et $\phi_1(\tau)$.

I.B - (Diamètre d'un triangle plein)

I.B.1)

a) Démontrer que K est un compact de $\mathbf{R}^3$ pour sa topologie usuelle.

b) Démontrer que K est convexe c'est à dire que, pour tout réel $t \in [0, 1]$ et tout couple (u, v) d'éléments de K, $tu + (1-t)v$ appartient à K.

c) Établir que, si $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, $\widehat{abc}$ est un compact convexe de $\mathbf{C}$ muni de sa topologie usuelle.

d) Avec les mêmes notations prouver l'existence de :

$\delta(\widehat{abc}) = \max\{|z' - z| \;/\; (z, z') \in \widehat{abc}^{\,2}\}$

I.B.2)

a) Démontrer que, si l'on fixe $z \in \mathbf{C}$ et $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$

$\max\{|z' - z| \;/\; z' \in \widehat{abc}\} = \max(|z-a|, |z-b|, |z-c|)$.

b) En déduire une expression simple de $\delta(\widehat{abc})$.

I.B.3) Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ un élément de $\{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$. Pour chaque entier naturel non nul n, on note $\tilde{\tau}_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(\tau)$.
Montrer que $\bigcap_{n\geq 1} \tilde{\tau}_n$ est réduit à un seul point appartenant à τ.

Partie II - Construction de l'application f

II - Dans la suite on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications g continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ telles que $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. Si $g \in \mathcal{E}$, on note Tg l'application de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$Tg(x) = \phi_0(g(2x)) \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } Tg(x) = \phi_1(g(2x-1)) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right].$$

II.1) Déterminer l'unique élément f_0 de $\mathcal{E}$ qui soit affine.

II.2) Montrer que $Tg \in \mathcal{E}$ pour tout $g \in \mathcal{E}$.

II.3) Soient g_1 et g_2 deux éléments de $\mathcal{E}$. Prouver que :

$$||Tg_2 - Tg_1||_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} ||g_2 - g_1||_\infty \ .$$

II.4) On définit maintenant une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ en choisissant f_0 affine comme ci-dessus et $f_{n+1} = Tf_n$ pour tout entier naturel n.

a) Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $f \in \mathcal{E}$.

b) Prouver que $Tf = f$.

c) Prouver que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = -\overline{f(1-x)}$ et interpréter géométriquement cette relation.

Partie III - Propriétés de f

III.A - Image de f

III.A.1) Soit $(r_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$

a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{r_n}{2^n}$ converge et que sa somme x appartient à $[0,1]$.

b) En posant pour tout entier naturel p, $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{r_{n+p}}{2^n}$, prouver la relation :

$$f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \phi_{r_p}(f(x_p))$$

pour tout entier naturel non nul p.

III.A.2) Inversement, soit $x \in [0,1[$.

a) Établir que, pour tout entier naturel non nul n, $r_n(x) \in \{0,1\}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul N et tout réel $x \in [0,1[$:

$$\frac{[2^N x]}{2^N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n} \quad \text{puis} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}.$$

c) Montrer que si, en outre, $x \in \mathbf{Z}\left[\dfrac{1}{2}\right]$ alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $r_n(x) = 0$ pour tout entier naturel $n > N$.

d) Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$. Reconnaître $\phi_0 \circ \phi_0$ et en déduire $f\left(\dfrac{1}{2^k}\right)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

III.A.3)

a) Montrer que $f\left([0,1] \cap \mathbf{Z}\left[\dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \tau$.

b) Montrer que $f([0,1]) \subset \tau$.

III.A.4) Inversement, soit $z \in \tau$.

a) Montrer qu'on peut définir deux suites $(z_n)_{n\geq 0}$ et $(r_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante :

- $z_0 = z$ et, si $n \geq 1$:
- si $z_{n-1} \in \tau_0$ alors $r_n = 0$ et $z_n = (\phi_0)^{-1}(z_{n-1})$
- sinon $r_n = 1$ et $z_n = (\phi_1)^{-1}(z_{n-1})$.

Prouver que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, z_n appartient τ.

b) Prouver que $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{r_n}{2^n}\right) = z$ (on pourra exprimer z en fonction de z_n et des ϕ_{r_i}).

c) Ecrire une fonction qui prend en argument un complexe z (que l'on supposera dans τ) et un réel ϵ et qui renvoie une valeur approchée à ϵ près d'un antécédent de z.

III.A.5)

a) Prouver que f n'est pas injective (on pourra utiliser la relation $f(1-x) = -\overline{f(x)}$).

b) Plus généralement montrer qu'il n'existe aucune bijection continue de $[0,1]$ sur τ (on pourra utiliser un argument de connexité par arcs).

III.A.6)

a) Pour $(i,j) \in \{0,1\}^2$, déterminer l'expression complexe de $\phi_i \circ \phi_j$, la reconnaître, préciser son point fixe et l'image de τ. Faire un dessin.

b) Soient $r_1, r_2, \ldots, r_p$ des éléments de $\{0,1\}$. Prouver que $\phi = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_p}$ possède un unique point fixe que l'on ne cherchera pas nécessairement à exprimer simplement.

c) Exhiber, à l'aide de l'application f, un point fixe de ϕ.

d) Montrer que l'ensemble X des complexes z qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications ϕ_0 et ϕ_1 est dense dans τ.

III.B - Dérivabilité de f

III.B.1) Supposons que f soit dérivable sur $[0,1]$.
Soient $x \in [0,1]$, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ deux suites d'élements de $[0,1]$, convergentes vers x et telles que $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$ et $\alpha_n < \beta_n$ pour tout n.
Montrer que la suite de terme général $\dfrac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$ converge vers $f'(x)$.

III.B.2) Soit $x \in [0,1]$

a) Si $x \in [0,1[$, en choisissant :

$$\alpha_n = \frac{r_1(x)}{2} + \cdots + \frac{r_n(x)}{2^n} \text{ et } \beta_n = \alpha_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

prouver que f n'est pas dérivable en x.

b) Prouver que f n'est pas dérivable en 1.

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES II

Les calculatrices sont autorisées

Notations :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.
- On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Partie I -

I.A - On fixe une application φ de E^2 dans $\mathbb{K}$. On suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\varphi(x + \alpha y, z) = \varphi(x, z) + \alpha\varphi(y, z)$ et $\varphi(x, z) = \varphi(z, x)$.

I.A.1) Pour tout élément x de E, on note $h(x)$ l'application de E dans E telle que $\forall y \in E$, $h(x)(y) = \varphi(x, y)$.

a) Montrer que, pour tout x de E, $h(x)$ est élément du dual de E, noté E^*.

b) Montrer que h est une application linéaire de E dans E^*.

I.A.2) Si A est une partie de E, on note $A^{\perp\varphi} = \{x \in E / \forall a \in A \ \varphi(x, a) = 0\}$. Montrer que $A^{\perp\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera $A^{\perp}$ au lieu de $A^{\perp\varphi}$.

I.A.3) On dit que φ est non dégénérée si et seulement si $E^{\perp\varphi} = \{0\}$.
Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si h est un isomorphisme.

I.A.4) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On note $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e.

a) Montrer que la matrice de h dans les bases e et e^* est :

$$\mathrm{mat}(h, e, e^*) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Cette dernière matrice sera également appelée la matrice de φ dans la base e et notée $\mathrm{mat}(\varphi, e)$

b) Soit $(x, y) \in E^2$. On note X et Y les matrices colonnes dont les coefficients sont les composantes de x et y dans la base e.

Montrer que $\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y$ où $\Omega = \mathrm{mat}(\varphi, e)$ et où ${}^tX$ désigne la matrice ligne obtenue en transposant X.

Filière MP

I.B - Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, on note q_φ l'application de E dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in E$, $q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$. On dit que q_φ est la forme quadratique associée à φ. On note $Q(E)$ l'ensemble des q_φ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

I.B.1) Soit $q \in Q(E)$.

Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur E, notée φ, telle que $q = q_\varphi$. On dira que φ est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q. On dira que q est non dégénérée si et seulement si φ est non dégénérée. Si e est une base de E, on notera $\mathrm{mat}(q, e) = \mathrm{mat}(\varphi, e)$. On l'appellera la matrice de q dans la base e.

I.B.2) Soit q une forme quadratique sur E. Soit E' un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et soit q' une forme quadratique sur E'.
On appelle isométrie de (E, q) dans (E', q') tout isomorphisme f de E dans E' vérifiant : pour tout $x \in E$, $q'(f(x)) = q(x)$. On dira que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie de (E, q) dans (E', q').
Montrer que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une base e de E et une base e' de E' telles que $\mathrm{mat}(q, e) = \mathrm{mat}(q', e')$.

I.B.3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $c = (c_1, \ldots, c_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$.

$$\text{Pour tout } x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{K}^{2p}, \text{ on pose } q_p(x) = 2\sum_{i=1}^{p} x_i x_{i+p}.$$

a) Montrer que q_p est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^{2p}$ et calculer $\mathrm{mat}(q_p, c)$.

b) On appelle *espace de Artin (ou espace artinien)* de dimension $2p$ tout couple (F, q), où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2p$, et où q est une forme quadratique sur F telle que (F, q) et $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$ sont isométriques.
Montrer que dans ce cas, q est non dégénérée.
Lorsque $p = 1$, on dit que (F, q) est un plan artinien.

c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tout

$$x = \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbb{C}^{2p}, \text{ on pose } q(x) = \sum_{k=1}^{2p} x_k^2$$

Montrer que $(\mathbb{C}^{2p}, q)$ est un espace de Artin.

d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour tout

$$x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{R}^{2p}, : \text{on pose } q'(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} x_i^2 .$$

Montrer que $(\mathbb{R}^{2p}, q')$ est un espace de Artin.

e) Si (F, q) est un espace de Artin de dimension $2p$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de F de dimension p tel que la restriction de q à G est identiquement nulle.

Partie II -

Pour toute la suite de ce problème, on suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, et on note q sa forme quadratique.

II.A -

II.A.1) Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On note encore $e^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale de e. Soit $p \in \{1, ..., n\}$. On note F l'espace engendré par $e_1, ..., e_p$.

a) Montrer que $F^\perp$ est l'image réciproque par h de $\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, ..., e_n^*)$, où h est définie au I.A.1.

b) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

c) Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.

II.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II.A.3) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note φ_F la restriction de φ à F^2. On dira que F est singulier si et seulement si φ_F est dégénérée.
Montrer que F est non singulier si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $F \cap F^\perp = \{0\}$;
- $E = F \oplus F^\perp$;
- $F^\perp$ est non singulier.

II.A.4) On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(x,y) \in F \times G$, $\varphi(x, y) = 0$.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et non singuliers, montrer que $F \oplus G$ est non singulier.

II.B - Soit q' une seconde forme quadratique sur E dont la forme bilinéaire symétrique associée est notée φ'. Comme au I.A.1, on note, pour tout $(x,y) \in E^2$, $h(x)(y) = \varphi(x,y)$ et $h'(x)(y) = \varphi'(x,y)$.

Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On dit que e est q-orthogonale si et seulement si, pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$, avec $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

II.B.1) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x,y) = x^2 - y^2$ et $q'(x,y) = 2xy$.

Déterminer une base q-orthogonale et une base q'-orthogonale.

II.B.2) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et pour q' définies à la question II.B.1 ?

II.B.3) Supposons que e est à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.
Montrer que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, e_i est un vecteur propre de $h^{-1} \circ h'$.

II.B.4) On suppose que $h^{-1} \circ h'$ admet n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour q'.

II.C -

II.C.1) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ et tel que $x \neq 0$.

On se propose de démontrer qu'il existe un plan $\Pi \subset E$ contenant x et tel que $(\Pi, q_{/\Pi})$ soit un plan artinien (où $q_{/\Pi}$ désigne la restriction de l'application q au plan Π).

a) Démontrer qu'il existe $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) = 1$

b) On pose $y = z - \frac{q(z)}{2}x$. Calculer $q(y)$.

c) Conclure.

II.C.2) Soit F un sous-espace vectoriel singulier de E. On suppose que $(e_1, ..., e_s)$ est une base de $F \cap F^\perp$. On note G un supplémentaire de $F \cap F^\perp$ dans F.

a) Montrer que G est non singulier.

b) Démontrer par récurrence sur la dimension de $F \cap F^\perp$ (en commençant par $\dim(F \cap F^\perp) = 1$, puis $\dim(F \cap F^\perp) > 1$) qu'il existe s plans $P_1, ..., P_s$ de E tels que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

1) Pour tout $i \in \{1, ..., s\}$, $(P_i, q_{/P_i})$ est un plan artinien contenant e_i

2) Pour tout $(i,j) \in \{1, ..., s\}^2$ avec $i \neq j$, P_i est orthogonal à P_j.

3) Pour tout $i \in \{1, ..., s\}$, P_i est orthogonal à G.

II.C.3) Montrer que $\overline{F} = G \oplus P_1 \oplus ... \oplus P_s$ est non singulier.
On dira que $\overline{F}$ est un complété non singulier de F.

II.C.4) Montrer que si $q_{/F} = 0$, alors $\dim(F) \leq \frac{n}{2}$.

II.C.5) On suppose que $n = 2p$. Montrer que (E,q) est un espace de Artin si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension p tel que $q_{/F} = 0$.

Partie III -

On note $O(E,q)$ l'ensemble des isométries de (E,q) dans lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes f de E vérifiant :

pour tout $x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$.

III.A -

III.A.1) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que $f \in O(E,q)$ si et seulement si, pour tout $(x,y) \in E^2$: $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E et si $f \in O(E,q)$, alors $f(F^\perp) = (f(F))^\perp$.

b) Soit e une base de E. Calculer la matrice de la forme bilinéaire :

$(x,y) \mapsto \varphi(f(x), f(y))$ en fonction de $\mathrm{mat}(f,e)$ et de $\mathrm{mat}(\varphi,e)$.

c) Posons $M = \mathrm{mat}(f,e)$ et $\Omega = \mathrm{mat}(\varphi,e)$.

Montrer que $f \in O(E,q)$ si et seulement si $\Omega = {}^tM\Omega M$.

d) Montrer que si $f \in O(E,q)$, alors $\det(f) \in \{1,-1\}$. On notera :

$$O^+(E,q) = \{f \in O(E,q) / \det(f) = 1\} \text{ et } O^-(E,q) = \{f \in O(E,q) / \det(f) = -1\}.$$

III.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

a) Montrer que $s \in O(E,q)$ si et seulement si F et G sont orthogonaux (pour φ).

b) En déduire que les symétries de $O(E,q)$ sont les symétries par rapport à F parallèlement à $F^\perp$, où F est un sous-espace non singulier de E.

c) Lorsque H est un hyperplan non singulier, on appellera réflexion selon H la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^\perp$. Montrer que toute réflexion de E est un élément de $O^-(E,q)$.

d) Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $q(x) = q(y)$ et $q(x-y) \neq 0$.

On note s la réflexion selon $H = \{x-y\}^\perp$. Montrer que $s(x) = y$.

III.B -

III.B.1) Supposons que E est un espace artinien de dimension $2p$ et que F est un sous-espace de E de dimension p tel que $q/_F = 0$.

Si $f \in O(E,q)$ avec $f(F) = F$, montrer que $f \in O^+(E,q)$.

III.B.2) Soit F un sous-espace de E tel que $\overline{F} = E$ (où $\overline{F}$ est un complété non singulier de F). Montrer que si $f \in O(E,q)$ avec $f/_F = \mathrm{Id}_F$ (où Id_F est l'application identité de F dans F), alors $f \in O^+(E,q)$.

III.B.3) Soit $f \in O(E,q)$. On suppose que pour tout $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, on a $f(x) - x \neq 0$ et $q(f(x)-x) = 0$.
On se propose de démontrer que $f \in O^+(E,q)$ et que E est un espace de Artin.

a) Montrer que $\dim(E) \geq 3$.

b) On note $V = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $q_{/V} = 0$.

c) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. Notons $H = \{x\}^\perp$. Montrer que $q_{/H}$ n'est pas identiquement nulle.
En déduire qu'il existe $y \in E$ tel que $q(x+y) = q(x-y) = q(y) \neq 0$.

d) On note $U = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $q_{/U} = 0$.

e) Montrer que $U^\perp = V = U$.

f) En déduire que E est un espace de Artin et que $f \in O^+(E,q)$.

Partie IV -

IV.A - On souhaite démontrer le *théorème de Cartan-Dieudonné*, dont voici l'énoncé : « si $f \in O(E,q)$, f est la composée d'au plus n réflexions, où $n = \dim(E)$, en convenant que Id_E est la composée de 0 réflexion.»

IV.A.1) Montrer le théorème de Cartan-Dieudonné lorsque $n = 1$. On veut ensuite raisonner par récurrence. On suppose donc que $n > 1$ et que le théorème de Cartan-Dieudonné est démontré en remplaçant E par tout espace vectoriel de dimension $n-1$.

IV.A.2) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$ avec $q(x) \neq 0$.

IV.A.3) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $q(f(x)-x) \neq 0$.

IV.A.4) Conclure dans les autres cas.

IV.B - On se propose de démontrer le *théorème de Witt*, dont voici l'énoncé : « soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E tels qu'il existe une isométrie f de $(F, q_{/F})$ dans $(F', q_{/F'})$ (la définition d'une isométrie a été donnée au I.B.2). Alors il existe $g \in O(E,q)$ telle que $g_{/F} = f$.»

IV.B.1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où F et F' sont non singuliers.

IV.B.2) On suppose que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') = 1$. Soit $x \in F$ avec $x \neq 0$. Posons $y = f(x)$.

a) Montrer que $q(x+y)$ ou $q(x-y)$ est non nul.

b) Montrer le théorème de Witt dans ce cas, en utilisant la question III.A.2-d).

IV.B.3) On suppose maintenant que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') > 1$.

a) Montrer qu'il existe F_1 et F_2 non singuliers, tels que $F_1 \perp F_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, avec $\dim(F_1) = \dim(F) - 1$.

b) Supposons qu'il existe $g \in O(E,q)$ telle que $g/_{F_1} = f/_{F_1}$. Notons $F'_1 = f(F_1)$. Montrer que $f(F_2) \subset F'^{\perp}_1$ et que $g(F_2) \subset F'^{\perp}_1$.

c) Montrer qu'il existe

$$h \in O(F'^{\perp}_1, q/_{F'^{\perp}_1}) \text{ telle que } h/_{g(F_2)} = (f \circ g^{-1})/_{g(F_2)}.$$

d) Montrer qu'il existe $k \in O(E,q)$ telle que $k/_F = f$.

IV.B.4) Démontrer le théorème de Witt.

••• FIN •••

Concours Centrale - Supélec 2010

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PSI

Calculatrices autorisées

Le problème porte sur des déclinaisons de la lettre « C » dans différents domaines des mathématiques. Les trois parties du problème sont largement indépendantes.

Partie I - Étude d'un « C » matriciel

On considère la matrice à coefficients réels $C \in \mathscr{M}_7(\mathbb{R})$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ la base canonique de $\mathbb{R}^7$, et c l'endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ dont la matrice dans la base canonique est C. Selon l'usage, on identifie les matrices colonnes à 7 lignes à coefficients réels et les vecteurs de $\mathbb{R}^7$.

On note f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 les vecteurs colonnes de la matrice C.

I.A - Image et noyau de *c*

Déterminer une base du noyau et une base de l'image de c, ainsi que le rang de c.

I.B - Restriction de *c*

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^7$ engendré par les trois premiers vecteurs colonnes f_1, f_2 et f_3 de C.

I.B.1) Montrer que F est stable par c.

I.B.2) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F, et calculer la matrice Φ dans cette base de l'endomorphisme φ de F induit par c.

I.C - Détermination sans calcul du spectre de Φ

Dans cette question, on se propose de calculer le spectre de Φ sans calculer son polynôme caractéristique.

I.C.1) Pourquoi 1 est-il valeur propre de Φ ?

I.C.2) Peut-on déduire du seul calcul de la trace de Φ que Φ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

I.C.3) Calculer Φ^2. À partir des informations complémentaires obtenues par le calcul de la trace de Φ^2, déterminer le spectre de Φ.

La matrice Φ est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

I.D - Étude du caractère diagonalisable de *C*

I.D.1) Déduire des questions précédentes le spectre de C. On précisera l'ordre de multiplicité des valeurs propres.

I.D.2) La matrice C est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$? Si oui, indiquer une matrice diagonale semblable à C.

I.E - Étude d'une équation fonctionnelle

Notation : si f est une fonction de classe C^1 d'un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$) vers $\mathbb{R}$, on note, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant d$, $\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à sa i-ème variable. Ainsi, la notation $\partial_i f(x_1, \ldots, x_d)$ désigne la valeur de la dérivée partielle de f par rapport à sa i-ème variable évaluée au point $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathscr{U}$.

> Dans cette section, on se propose d'étudier les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^7$ vers $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition $f \circ c = f$, c'est-à-dire telles que $f(x_3 + x_4, x_2 + x_5, x_1, x_1, x_1, x_2 + x_5, x_3 + x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in \mathbb{R}^7$.

I.E.1) Quelle structure possède l'ensemble $\mathscr{S}$ des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^7$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f \circ c = f$?

I.E.2) Montrer qu'une telle fonction vérifie $f \circ c^n = f$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

I.E.3) Soit $f \in \mathscr{S}$. Calculer la matrice jacobienne de $f \circ c$ en $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$. En déduire un système d'équations reliant les dérivées partielles $\partial_1 f(X), \ldots, \partial_7 f(X)$ de f en un point X de $\mathbb{R}^7$.

I.E.4) Pour $f \in \mathscr{S}$, calculer la matrice jacobienne de $f \circ c^2$ en $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$. Compléter le système d'équations reliant les dérivées partielles $\partial_1 f(X), \ldots, \partial_7 f(X)$ de f en un point X de $\mathbb{R}^7$ obtenu à la question précédente.

I.E.5) **APPLICATION** : sans calcul supplémentaire, déterminer les formes linéaires f sur $\mathbb{R}^7$ qui appartiennent à $\mathscr{S}$.

- version du 18 février 2010 10h20

Partie II - Équation différentielle pour la lettre « C »

Dans toute la suite du problème, on note $\mathscr{C}$ l'image dans $\mathbb{R}^2$ de l'application

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, 2\sin t).$$

Dans cette partie, on étudie l'équation différentielle

$$y(x)y'(x) = -4x. \qquad (E)$$

II.A - Transformation de solutions

Montrer que si f est une solution de (E) sur un intervalle J, et si a est un réel non nul, alors la fonction h définie par $h(x) = af\left(\frac{x}{a}\right)$ est aussi une solution de (E) sur un intervalle que l'on précisera.

II.B - Le « C » solution

On note g la fonction d'une variable réelle à valeurs réelles dont le graphe est $\gamma\left(\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]\right)$.

II.B.1) Déterminer l'ensemble de définition Δ de g, ainsi qu'une expression de g.

II.B.2) Vérifier que la restriction de g au plus grand intervalle ouvert inclus dans Δ est une solution de (E).

II.B.3) Est-ce une solution maximale ? Sinon, déterminer une solution maximale m dont le graphe inclut celui de g.

II.C - Le théorème de Cauchy-Lipschitz - Solutions maximales

II.C.1) Rappeler l'énoncé du théorème d'existence et d'unicité des solutions maximales d'une équation différentielle scalaire non linéaire soumise aux conditions de Cauchy.

II.C.2) Expliquer comment, et éventuellement dans quelle mesure, ce théorème s'applique à (E).

II.C.3) Les solutions maximales données par ce théorème sont-elles des solutions maximales de (E) ?

II.C.4) Déduire des questions précédentes les solutions maximales de (E).

II.D - Développement en série entière d'une solution

II.D.1) Montrer que la solution m déterminée à la question III.B.3) est développable en série entière au voisinage de 0. Calculer ce développement et préciser son rayon de convergence.

II.D.2) En déduire les développements en série entière de toutes les solutions maximales de (E) ; préciser les rayons de convergence de ces séries entières.

Partie III - Des courbes pour la lettre « C »

III.A - Topologie de $\mathscr{C}$

III.A.1) Représenter $\mathscr{C}$.

III.A.2) Préciser les propriétés topologiques suivantes de $\mathscr{C}$.

a) Est-ce un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

b) Un fermé ?

c) Une partie bornée ?

d) Un compact ?

e) Une partie convexe ?

III.B - Paramétrisation complexe de $\mathscr{C}$

On rappelle que $\mathscr{C}$ a été définie dans la partie II comme l'image de l'application

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, 2\sin t).$$

Dans cette question, on va chercher une paramétrisation complexe de $\mathscr{C}$, de la forme

$$z : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{C}, t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)},$$

où ρ et θ sont deux fonctions continues de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ vers $\mathbb{R}$, la fonction ρ étant à valeurs strictement positives.

III.B.1) Calculer $\rho(t)$ pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

III.B.2) Représenter sur la calculatrice l'arc paramétré

$$\mathscr{G} : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{C}, t \mapsto \rho(t)e^{it},$$

et reproduire sommairement la courbe sur la copie. Quelle lettre cette courbe évoque-t-elle ?

III.B.3) À partir de l'expression de $\gamma(t)$, calculer $\tan\theta(t)$.

III.B.4)

a) Représenter la fonction $t \mapsto \arctan(2\tan t)$ sur la partie de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ sur laquelle cette fonction est définie.

b) Modifier cette fonction pour déterminer la fonction continue θ cherchée.

On vérifiera le résultat en représentant à l'aide de la calculatrice la courbe paramétrée z.

III.B.5) Indiquer une suite d'instructions *Maple* ou *Mathematica* permettant d'obtenir ce tracé.

III.C - Une famille de courbes paramétrées pour la lettre « C »

Dans cette question, on va construire une famille de courbes déduites de celle de la question V.A, mais donnant un aspect visuel différent de la lettre « C ».

Dans ce qui suit, la notation $\mathrm{E}(x)$ désignera la partie entière du réel x.

On définit les applications :

- $\alpha : \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, (n,t) \mapsto \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2n}\mathrm{E}\left(\frac{2n}{3\pi}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)$
- $\omega : \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, (n,t) \mapsto \cos^2\left(\frac{2n}{3}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

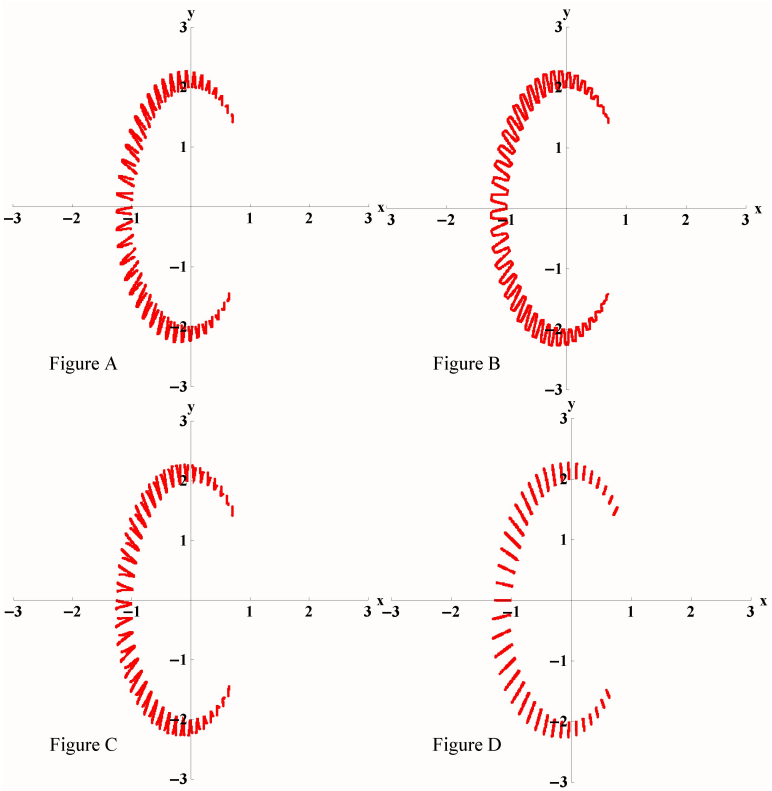
III.C.1) Étudier rapidement α et ω, puis représenter sur un même graphique les deux fonctions $t \mapsto \alpha(10,t)$ et $t \mapsto \omega(10,t)$.

III.C.2) Représenter la fonction $\psi : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{3}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

III.C.3) On définit la fonction :

$$w : \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{C}, (n,t) \mapsto \rho(t)\left(1 + \psi(t)\omega(n,t)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\alpha(n,t))}.$$

On a représenté ci-contre cette courbe, lorsque $n = 40$. Mais la courbe a été mélangée avec d'autres courbes représentant la lettre « C ». Identifier lequel des quatre graphiques représente la fonction $t \mapsto w(40,t)$, et expliquer pourquoi.



III.C.4) Écrire une séquence d'instructions *Maple* ou *Mathematica* permettant de créer la séquence des 100 premières courbes (on pourra créer une animation).

III.D - Calcul d'aire

Dans cette question, on se propose de calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{H}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant tous les points $w(n,t)$ lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$ et t décrit $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$. Ce domaine est délimité par deux arcs paramétrés définis par

$$z : I \to \mathbb{C}, t \mapsto \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)} = \sqrt{1 + 3\sin^2 t}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\arctan(2\tan t) + \pi\mathrm{E}\left(\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$v : I \to \mathbb{C}, t \mapsto \sqrt{1 + 3\sin^2 t}\left(1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{2}{3}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\arctan(2\tan t) + \pi\mathrm{E}\left(\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right)}.$$

Pour calculer cette aire, on va utiliser la formule de Green-Riemann. Le bord du domaine étant donné par un arc paramétré complexe de la forme $v : t \mapsto \sigma(t)e^{i\mu(t)}$, on va d'abord traduire ce théorème dans le cas particulier des domaines donnés sous cette forme.

III.D.1) Rappeler l'énoncé du théorème de Green-Riemann. Expliquer comment ce théorème se traduit dans le cas d'un calcul d'aire.

III.D.2) Rappeler la formule donnant le produit scalaire de deux nombres complexes. En déduire l'expression du produit scalaire $\langle u \circ v(t), v'(t)\rangle$, lorsque u et v sont les applications $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto iz$ et $v : t \mapsto \sigma(t)e^{i\mu(t)}$, où σ et μ sont deux fonctions définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et de classe C^1.

III.D.3) Si $d(t) = \arctan(2\tan(t))$, simplifier $\dfrac{1}{2}(1 + 3\sin^2 t)d'(t)$.

III.D.4) Déduire des questions précédentes une expression de $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale. Simplifier cette intégrale grâce à l'identité obtenue en III.D.3). Calculer enfin $\mathscr{A}$.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2010

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PSI

Calculatrices autorisées

Définitions et notations

Dans tout le texte, n est un entier strictement positif et E est un espace euclidien de dimension n ; on note $< x, y >$ le produit scalaire de deux éléments x et y de E ; La norme utilisée est la norme euclidienne associée.

- $\mathscr{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Si f et g sont dans $\mathscr{L}(E)$, fg désigne la composée $f \circ g$ des applications et f^* désigne l'endomorphisme adjoint de f.
- Le symbole 0 désigne indifféremment l'élément nul de $\mathbb{R}$, de E ou de $\mathscr{L}(E)$.
- $GL(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E. C'est un groupe pour la composition des applications. L'application identité est notée Id_E.
- On appelle *endomorphisme antisymétrique* de E tout endomorphisme de E tel que $f^* = -f$. L'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. On pourra utiliser cette propriété sans démonstration.
- On appelle similitude de E tout endomorphisme f de E du type λg avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in O(E)$, où $O(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. On rappelle que $O(E)$ est un groupe pour la composition des applications. On désigne par $\mathrm{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E.

Objectif du problème

Le but du problème est de calculer l'entier d_n défini de la manière suivante :

E étant un espace euclidien de dimension n, d_n est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ c'est-à-dire d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ formé de similitudes.

Note : on peut démontrer – et nous l'admettrons – que la notation d_n est licite, car cet entier ne dépend effectivement que de la dimension de E.

Partie I - Premières propriétés

I.A - Étude de $\mathrm{Sim}(E)$

I.A.1) Montrer que l'ensemble des similitudes non nulles est un sous-groupe de $GL(E)$ pour la composition des applications.

I.A.2) Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) h est élément de $\mathrm{Sim}(E)$;

ii) h^*h est colinéaire à Id_E ;

iii) la matrice de h dans une base orthonormale de E est colinéaire à une matrice orthogonale.

On appelle donc *matrice de similitude* toute matrice colinéaire à une matrice orthogonale : c'est donc la matrice d'une similitude dans une base orthormale.

I.B - Propriétés des endomorphismes antisymétriques

Soit f un endomorphisme antisymétrique de E.

I.B.1) Montrer que : $\forall x \in E, < x, f(x) >= 0$.

I.B.2) Montrer que, si S est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $S^\perp$ est stable par f. Montrer que les endomorphismes induits par f sur S et sur $S^\perp$ sont antisymétriques.

I.B.3) Soit g un endomorphisme antisymétrique de E, tel que $fg = -gf$.

Montrer que : $\forall x \in E, < f(x), g(x) >= 0$.

I.B.4) Que vaut $f^2 = f \circ f$ si f est un automorphisme orthogonal et antisymétrique de E ?

I.C - Encadrement de d_n

I.C.1) Montrer que $d_n \geqslant 1$.

I.C.2) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$.

On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. En considérant $\Phi : f \mapsto f(x)$, application linéaire de V dans E, montrer que $\dim(V) \leqslant n$.

Ainsi $1 \leqslant d_n \leqslant n$.

- version du 11 décembre 2009 14h59

I.C.3) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$. Expliciter un espace vectoriel de dimension 2, formé de matrices de similitudes. En déduire, avec soin, que $d_2 = 2$.

I.C.4) Dans cette question seulement, on suppose n impair. Si f, g appartiennent à $GL(E)$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f + \lambda g$ soit non inversible.

On pourra raisonner en considérant le polynôme caractéristique de fg^{-1}.

En déduire que $d_n = 1$.

I.C.5) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$, de dimension $d \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel W de $\mathscr{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$, de même dimension d, et contenant Id_E.

C'est pourquoi, dans toute la suite, on s'intéressera uniquement à des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$, inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ et contenant Id_E.

I.D - Systèmes anti-commutatifs d'endomorphismes antisymétriques

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ contenant Id_E, inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ et de dimension $d \geqslant 2$.

Soit $(\mathrm{Id}_E, f_1, ..., f_{d-1})$ une base de V.

I.D.1) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$, $f_i^* + f_i$ est colinéaire à Id_E.

I.D.2) Montrer qu'il existe une base $(\mathrm{Id}_E, g_1, ..., g_{d-1})$ de V telle que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$, g_i soit antisymétrique (on cherchera g_i comme combinaison de f_i et id_E).

I.D.3) On fixe une base $(\mathrm{Id}_E, g_1, ..., g_{d-1})$ de V comme définie à la question précédente c'est-à-dire avec pour tout i, g_i antisymétrique.

a) Montrer que pour tout $i \neq j$, $g_i g_j + g_j g_i$ est colinéaire à Id_E.

b) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathscr{L}(E)$ en posant, pour tout f, g de $\mathscr{L}(E)$ $(f|g) = tr(f^* g)$.

On considère, dans la suite de cette question, une base $(h_1, ..., h_{d-1})$ de $\mathrm{Vect}(g_1, ..., g_{d-1})$ orthogonale pour ce produit scalaire.

c) Montrer que les h_i sont antisymétriques et vérifient : $\forall i \neq j, h_i h_j + h_j h_i = 0$.

Que faire pour que les h_i soient aussi des automorphismes orthogonaux ?

I.D.4) Réciproquement, soit $(h_1, ..., h_{d-1})$ une famille de $\mathscr{L}(E)$ telle que les h_i soient des automorphismes orthogonaux antisymétriques vérifiant pour tous $i \neq j$, $h_i h_j + h_j h_i = 0$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, h_1, ..., h_{d-1})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, de dimension d, inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$.

Ainsi, si $\dim(E) \geqslant 2$, sont équivalentes les deux propriétés :
- il existe un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension $d \geqslant 2$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$
- il existe une famille $(f_1, ..., f_{d-1})$ d'automorphismes orthogonaux antisymétriques de E vérifiant :
$$\forall i \neq j, f_i f_j + f_j f_i = 0.$$

Partie II - Étude dans des dimensions paires

II.A - Dans cette section, $\dim(E) = 2p$ où p est un entier impair.

II.A.1) Soit p un entier impair tel que $\dim(E) = n = 2p$. On suppose qu'il existe $d \geqslant 3$ et une famille $(f_1, f_2, ..., f_{d-1})$ d'éléments de $\mathscr{L}(E)$ telle que les f_i soient des automorphismes orthogonaux, antisymétriques vérifiant : $\forall i \neq j, f_i f_j + f_j f_i = 0$.

Soit $x \in E$ de norme 1.

a) Montrer que $(x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x))$ est une famille orthonormale, et que $S = \mathrm{Vect}\big(x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)\big)$ est stable par f_1 et f_2.

b) En déduire que $d_{n-4} \geqslant 3$

II.A.2) Dans cette question, $n = 2p$, avec p entier impair. Montrer que $d_n = 2$.

II.B - Dans cette section, la dimension de E est 4.

II.B.1) On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension 4 inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$.

On considère alors, conformément à I.D.4 une famille (f_1, f_2, f_3) d'éléments de $\mathscr{L}(E)$ telle que les f_i soient des automorphismes orthogonaux, antisymétriques vérifiant : $\forall i \neq j, f_i f_j + f_j f_i = 0$

Soit un vecteur fixé $x \in E$ de norme 1.

a) Justifier que la famille $B = \big(x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)\big)$ est une base de E puis montrer qu'il existe des nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tel que :

$$f_3(x) = \alpha x + \beta f_1(x) + \gamma f_2(x) + \delta f_1 f_2(x).$$

Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et que $\delta \in \{-1, 1\}$.

b) Montrer que $f_3 = \delta f_1 f_2$. Quitte à changer f_3 en son opposé, on suppose dans la suite que $f_3 = f_1 f_2$.

c) Si x_0, x_1, x_2, x_3 sont des nombres réels, donner la matrice $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ dans B de l'endomorphisme $x_0 \mathrm{Id}_E + x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$.

II.B.2) Vérifier que pour tout $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ est une matrice de similitude. Qu'en conclure ?

II.C - Dans cette section, la dimension de E est 12

On suppose qu'il existe dans $\mathscr{L}(E)$, une famille (f_1, f_2, f_3, f_4) d'automorphismes orthogonaux antisymétriques vérifiant : $\forall i \neq j,\ f_i f_j + f_j f_i = 0$.

II.C.1) En utilisant f_4, montrer que f_3 ne peut être égal à $\pm f_1 f_2$.

II.C.2) Montrer que $f_1 f_2 f_3$ est un automorphisme orthogonal, symétrique et non colinéaire à Id_E.

II.C.3) Quel est le spectre de $f_1 f_2 f_3$?

Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 tel que $< f_1 f_2 f_3(x), x >= 0$.

On fixe un tel x pour la suite.

II.C.4) Montrer que $F = (x, f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_1 f_2(x), f_1 f_3(x), f_2 f_3(x), f_1 f_2 f_3(x))$ est une famille orthonormale.

II.C.5) On pose $V = \mathrm{Vect}(F)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 8.

a) Montrer que $V^\perp$ est stable par f_1, f_2, f_3.

b) On note f_i' l'endomorphisme induit par f_i sur $V^\perp$, $i = 1, 2, 3$.
Justifier qu'il existe $\delta' \in \{-1, 1\}$ tel que $f_3' = \delta' f_1' f_2'$.

Quitte à remplacer f_3 par $-f_3$, on considère pour la suite que $f_3' = f_1' f_2'$.

c) Soit e fixé dans $V^\perp$, de norme 1. En procédant comme au II.B.1.a) (mais ce n'est pas à refaire), on peut montrer que $(e, f_1(e), f_2(e), f_1 f_2(e))$ et une base orthonormale de $V^\perp$. En remarquant que $f_3(e) = f_1 f_2(e)$, utiliser cette base pour montrer que : $\forall y \in V^\perp,\ f_4(y) \in V$.

Ainsi $W = f_4(V^\perp)$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension 4.

d) Montrer que la somme de W et $V^\perp$ est directe et que $W \oplus V^\perp$ est stable par f_1, f_2, f_3, f_4. Aboutir alors à une contradiction.

II.C.6) En déduire la valeur de d_{12}.

II.D - Dans cette section, la dimension de E est 8

Montrer que, quel que soit $(x_0, ..., x_7) \in \mathbb{R}^8$,

$$\begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_4 & -x_3 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_1 & x_0 & -x_4 & x_2 & -x_5 & x_3 & -x_7 & x_6 \\ x_2 & x_4 & x_0 & -x_1 & -x_6 & x_7 & x_3 & -x_5 \\ x_4 & -x_2 & x_1 & x_0 & x_7 & x_6 & -x_5 & -x_3 \\ x_3 & x_5 & x_6 & -x_7 & x_0 & -x_1 & -x_2 & x_4 \\ x_5 & -x_3 & -x_7 & -x_6 & x_1 & x_0 & x_4 & x_2 \\ x_6 & x_7 & -x_3 & x_5 & x_2 & -x_4 & x_0 & -x_1 \\ x_7 & -x_6 & x_5 & x_3 & -x_4 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de similitude.

Que peut-on en déduire ?

II.E - Conjecture du résultat général

Conjecturer la valeur de d_n dans le cas général.

• • • FIN • • •

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PC

Les calculatrices sont autorisées.

Le but de ce problème est de faire établir le résultat suivant d'approximation polynomiale.
Une fonction f continue sur le segment $[-1,1]$ y est de classe C^∞ si et seulement si il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales, où p_n est de degré n, telle que $\sup_{-1\le x\le 1} |f(x)-p_n(x)|$ tende vers 0 pour $n\to+\infty$ plus vite que n'importe quelle puissance de $1/n$.
L'approche proposée consiste à se ramener à des résultats connus sur l'approximation des fonctions périodiques par leurs séries de Fourier, au moyen des polynômes de Tchebychev, dont on étudiera les principales propriétés dans la partie I.
La partie II établit certaines inégalités dues à Markov et à Bernstein, permettant de majorer la norme infinie de la dérivée d'une fonction polynomiale sur un segment à l'aide de la norme infinie de la fonction polynomiale sur le même segment.
La partie III établit le résultat annoncé concernant l'approximation à l'aide, en particulier, des inégalités de Markov et de Bernstein.

On rappelle qu'une fonction polynomiale non nulle, de degré n, est une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme

$$f:\ x\mapsto f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $a_0,\dots,a_{n-1}$ sont des nombres réels et a_n un nombre réel non nul, nommé «coefficient dominant de f».

Partie I - Polynômes de Tchebychev

I.A - Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on pose $F_n(x)=\cos(n\arccos x)$.

I.A.1)

a) Montrer que les fonctions F_n sont définies sur un même domaine D à préciser.

b) Calculer $F_1(x)$, $F_2(x)$ et $F_3(x)$ pour tout $x\in D$.

c) Calculer $F_n(1)$, $F_n(0)$ et $F_n(-1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d) Préciser les propriétés de parité de F_n en fonction de n.

I.A.2) Calculer $F_{n+1}(x)+F_{n-1}(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in D$.

I.A.3) Déduire de ce qui précède que F_n se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction polynomiale unique, dont on précisera le degré ainsi que le coefficient dominant.
Dans la suite, on notera toujours F_n la fonction prolongée.

I.A.4) Écrire une fonction **tchebychev** qui prend en argument un nombre entier n et qui renvoie l'affichage de l'expression $F_n(x)$. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel usuellement utilisé.

Dans toute la suite de ce problème, on posera $T_0(x)=1$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on notera T_n la fonction polynomiale vérifiant $T_n(x)=2^{1-n}F_n(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

I.A.5) Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_{n+2}(x)=axT_{n+1}(x)+bT_n(x).$$

I.B -

I.B.1) Soit $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que la fonction F_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $x\in]-1,1[$, donner une expression simple de $F_n'(x)$. On justifiera soigneusement le calcul.

I.B.2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\arccos(x)\sim\sqrt{2(1-x)}$ quand $x\to 1$.

b) En déduire le calcul de $F_n'(1)$ et de $F_n'(-1)$.

I.B.3) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout x réel, on a la relation suivante :

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0.$$

- version du 10 mars 2010 10h45

I.C - On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales de degré au plus n.

I.C.1) Montrer que, pour tout couple (f,g) de $E \times E$, la fonction :

$$x \mapsto f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est intégrable sur l'intervalle $]-1,1[$.

I.C.2) La question précédente montre que l'application φ suivante est bien définie :

$$\varphi : \begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx \end{cases}$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Dans la suite, on suppose que l'espace E est muni de ce produit scalaire, que l'on note $(.|.)$.

I.C.3)

a) Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n soit de degré n et de coefficient dominant 1, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n soit orthogonale à tous les éléments de E_{n-1}.

b) Montrer qu'il existe une unique famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales vérifiant les conditions suivantes :

i) la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$;
ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est de degré n et de coefficient dominant 1.

I.C.4) Calculer $(T_m|T_n)$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ?

Partie II - Inégalités de Bernstein et de Markov

II.A -

II.A.1) On cherche à montrer que l'inégalité $|\sin(n\theta)| \leqslant n\sin(\theta)$ est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

a) Montrer que $\sin(n\theta) \leqslant n\sin(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2n}]$.

b) Montrer que, pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$.

c) En déduire que :

$$\forall \theta \in [\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}], 1 \leqslant n sin(\theta).$$

d) Conclure.

e) Pour quelles valeurs de $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ a-t-on $|\sin(n\theta)| = n\sin(\theta)$?

II.A.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)| = 2^{1-n}n^2.$$

Cette borne supérieure est-elle atteinte ? Dans l'affirmative, préciser pour quelles valeurs de x.

II.A.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction polynomiale T_n admet exactement n zéros deux à deux distincts et appartenant à $]-1,1[$. Pour $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, on notera $x_{n,j}$ le j-ième zéro de T_n dans l'ordre croissant. Donner la valeur de $x_{n,j}$.

II.A.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,j}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Montrer que :

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_{n,j}}.$$

II.A.5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,j}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ et $P \in E_{n-1}$.

a) Montrer que :

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(x_{n,j})}{T_n'(x_{n,j})} \frac{T_n(x)}{x - x_{n,j}}$$

b) En déduire que

$$P(x) = \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sqrt{1-x_{n,j}^2} P(x_{n,j}) \frac{T_n(x)}{x - x_{n,j}}.$$

II.B - Inégalité de Bernstein

II.B.1) Montrer que, pour tout $x \in [x_{n,1}, x_{n,n}]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{n}.$$

II.B.2)

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E_{n-1}$ tel que $\sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P(x)| \leq 1$.

Montrer que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq n.$$

(On distinguera trois cas selon que x appartient à l'un des intervalles $[-1, x_{n,1}[$, $[x_{n,1}, x_{n,n}]$ ou $]x_{n,n}, 1]$).

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $P \in E_{n-1}$, on a :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P(x)|.$$

II.B.3) Soit T un polynôme trigonométrique de la forme

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)]$$

où $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une fonction polynomiale B_k de degré $(k-1)$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(k\theta) = B_k(\cos(\theta)) \sin(\theta).$$

b) Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe une fonction polynomiale $P \in E_{n-1}$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait :

$$T(\theta_0 + \theta) - T(\theta_0 - \theta) = 2P(\cos\theta)\sin\theta.$$

c) En déduire que :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|.$$

d) Montrer que :

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T'(\theta)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|.$$

II.C - Inégalité de Markov

Soit $P \in E_n$.
Montrer que :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P'(x)| \leq n^2 \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|.$$

(On pourra faire intervenir le polynôme trigonométrique $T(\theta) = P(\cos(\theta))$).

Partie III - Approximation polynomiale

Dans toute cette partie, on note $C([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs réelles.
On le munit de la norme infinie :

$$\forall f \in C([-1,1]), \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$

On note $C^\infty([-1,1])$ le sous-espace de $C([-1,1])$ constitué des fonctions de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, V_n désigne l'ensemble des restrictions à $[-1,1]$ des éléments de E_n.

Pour toute fonction $f \in C([-1,1])$, on pose

$$d(f, V_n) = \inf_{p\in V_n} \|f - p\|_\infty.$$

On dit qu'une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est à décroissance rapide si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite $(n^k\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites de nombres réels à décroissance rapide.

III.A - Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}$ et $j \in \mathbb{N}$.

III.A.1) Montrer que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^j\alpha_n$ est convergente.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(j) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^j\alpha_p.$$

III.A.2) Montrer que la suite $(R_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.B - Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}$.

III.B.1) Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n F_n(x)$$

est convergente.

Dans la suite de cette question III.B, on définit la fonction f sur le segment $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n F_n(x).$$

III.B.2) Montrer que f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

III.B.3) Montrer que la suite $(d(f,V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

Les notations suivantes seront valables jusqu'à la fin du sujet.

Pour une fonction $h \in C([-1,1])$, on note $\widetilde{h}$ la fonction 2π-périodique suivante :

$$\widetilde{h} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto h(\cos(\theta)) \end{cases}$$

On rappelle que les coefficients de Fourier de $\widetilde{h}$ sont donnés par les formules suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_0(\widetilde{h}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t)dt,$$

$$a_n(\widetilde{h}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t)\cos(nt)dt,$$

$$b_n(\widetilde{h}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t)\sin(nt)dt.$$

III.C - Soit $f \in C^\infty([-1,1])$.

III.C.1) Montrer que la suite $(a_n(\widetilde{f}))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide. Que vaut $b_n(\widetilde{f})$?

III.C.2) Montrer que la série de Fourier de $\widetilde{f}$ converge normalement vers $\widetilde{f}$.

III.C.3) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ à décroissance rapide telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(f)F_n(x)\,,$$

pour tout $x \in [-1,1]$. Donner une expression de $\alpha_n(f)$ en fonction de f et de n.

III.D - Soit $f \in C([-1,1])$.

On suppose que la suite $(d(f,V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.D.1) Montrer qu'on peut construire une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que :

- pour tout entier n, $\deg(p_n) \leqslant n$
- $(\|f-p_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.D.2) Le but de cette question est de montrer que la fonction f est de classe C^∞.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour $P \in E_{k-1}$, $a_k(\widetilde{f}) = a_k(\widetilde{f-P})$.

b) En déduire que la suite $(a_n(\widetilde{f}))_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients de Fourier de la fonction $\widetilde{f}$ est à décroissance rapide.

c) Conclure.

• • • FIN • • •

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques II

PC

2010

4 heures Calculatrices autorisées

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III est pour une large part indépendante des deux autres.

I Systèmes de racines

Les systèmes de racines interviennent dans divers domaines des mathématiques et en cristallographie.

Le couple $(E, \langle .,. \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\| \, . \, \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On rappelle qu'une *réflexion* de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E. Pour tout élément α non nul de E, on note τ_α la réflexion de E par rapport à l'orthogonal de la droite $\mathrm{Vect}(\alpha)$.

I.A – Soit α un élément non nul de E. Montrer, pour tout vecteur x de E, l'identité :

$$\tau_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on appelle *système de racines* de F une partie non vide $\mathcal{R}$ de F vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est fini, engendre F et ne contient pas le vecteur nul ;
2. pour tout α dans $\mathcal{R}$, on a $\tau_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$;
3. pour tout α dans $\mathcal{R}$, les seuls éléments de $\mathcal{R}$ colinéaires à α sont α et $-\alpha$;
4. pour tout couple (α, β) dans $\mathcal{R}^2$, on a $2\dfrac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$.

I.B – On suppose dans cette question que l'espace E est de dimension 1.

Montrer que les systèmes de racines de E sont les ensembles $\{\alpha, -\alpha\}$, avec $\alpha \in E \setminus \{0\}$.

I.C – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n \geq 2$.

Pour tout couple (α, β) de vecteurs non nuls de E, soit $\theta_{\alpha,\beta}$ l'angle géométrique entre α et β, c'est-à-dire l'unique élément de $[0, \pi]$ donné par : $\|\alpha\|.\|\beta\| \cos\theta_{\alpha,\beta} = \langle \alpha, \beta \rangle$.

I.C.1) Soit $\mathcal{R}$ un système de racines de E et soient α, β deux éléments de $\mathcal{R}$ non colinéaires.

a) Montrer, à l'aide de la propriété 4, que : $2\dfrac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\,|\cos\theta_{\alpha,\beta}|.2\dfrac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\,|\cos\theta_{\alpha,\beta}| \leq 3$.

b) On suppose $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. Montrer que le couple (α, β) se trouve dans l'une des configurations recensées dans le tableau ci-dessous (chaque ligne correspondant à une configuration) :

$\theta_{\alpha,\beta}$	$\cos\theta_{\alpha,\beta}$	$\|\beta\|/\|\alpha\|$
$\pi/2$	0	≥ 1
$\pi/3$	$1/2$	1
$2\pi/3$	$-1/2$	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$

I.C.2) Réciproquement, on suppose qu'un couple (α, β) de vecteurs non colinéaires de E se trouve dans l'une des configurations recensées dans le tableau ci-dessus. Montrer que le réel $2\dfrac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ est un entier relatif ; en préciser la valeur.

I.D – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n = 2$.

Pour tout système de racines $\mathcal{R}$ de E, on pose

$$\theta_{\mathcal{R}} = \min\{\theta_{\alpha,\beta} \,|\, (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2,\ \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta\}$$

I.D.1) Montrer que $\theta_{\mathcal{R}}$ est bien défini et est égal à $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ ou $\pi/6$.

I.D.2) Pour chaque valeur de $k \in \{2, 3, 4, 6\}$, représenter graphiquement un système de racines $\mathcal{R}_k$ tel que $\theta_{\mathcal{R}_k} = \pi/k$. *Il n'est pas nécessaire de justifier que les figures tracées représentent bien des systèmes de racines.* Quel est le cardinal de $\mathcal{R}_k$? *Aucune justification n'est attendue.*

I.E – Dans cette question, l'espace E est de dimension $n = 3$.

Soient (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de E et $\mathcal{R}_0 = \{e_i - e_j \,|\, 1 \leq i, j \leq 3,\ i \neq j\}$.

I.E.1) Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie $\mathcal{R}_0$ est un plan vectoriel.

I.E.2) Représenter graphiquement $\mathcal{R}_0$ dans le plan $\mathrm{Vect}(\mathcal{R}_0)$. Reconnaître l'un des systèmes de racines représentés à la question I.D.2.

II Propriétés de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$

- La lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $\mathbb{K}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.
- On note respectivement $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $GL(n, \mathbb{K})$, $\mathcal{D}(n, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ formé des matrices diagonales.
- On désigne par $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ de trace nulle.
- On note I_n la matrice identité et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.
- On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est *nilpotente* s'il existe un entier naturel non nul r tel que $A^r = 0$. De la même manière, on dit qu'un endomorphisme f est *nilpotent* s'il existe un entier naturel non nul r tel que $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{r \text{ fois}} = 0$.
- Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, le *crochet* $[A, B]$ est défini par $[A, B] = AB - BA$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \Phi_A : \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \\ B & \longmapsto & [A, B] \end{array}$$

- On dit qu'un triplet (X, H, Y) de trois matrices non nulles de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est un *triplet admissible* si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$[H, X] = 2X \quad ; \quad [X, Y] = H \quad ; \quad [H, Y] = -2Y$$

On pose :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

II.A – Généralités

II.A.1) Montrer que $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; en préciser la dimension.

II.A.2) Justifier que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, la matrice $[A, B]$ appartient à $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$.

II.B – Un isomorphisme

Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} j : & \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

II.C – Caractérisation des matrices nilpotentes

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La matrice A est nilpotente ;

ii. Le spectre de A est égal à $\{0\}$;

iii. La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II.D – Le cas complexe

On suppose dans cette question que $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{C}$.

II.D.1) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

II.D.2) Ce résultat reste-t-il vrai pour deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{C})$, avec $n \geq 3$?

II.E – Le cas réel

On suppose dans cette question que $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$.

II.E.1) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$. On suppose que son polynôme caractéristique vaut $X^2 + r^2$, où r est un réel non nul.

a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL(2, \mathbb{C})$ vérifiant : $\mathrm{i}rH_0 = P^{-1}AP$. Que vaut la matrice $A^2 + r^2 I_2$?

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associé* à la matrice A, c'est-à-dire qui à un vecteur colonne u de $\mathbb{R}^2$ associe le vecteur Au. Soit w un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Prouver que la famille $\left(\frac{1}{r}f(w), w\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et donner la matrice de f dans cette base.

II.E.2) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

II.E.3) On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa structure affine euclidienne canonique et de son repère canonique. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{R})$, on note $\mathcal{Q}_A$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par l'application j possède le même polynôme caractéristique que A.

a) Soit r un réel strictement positif. Montrer que chacune des parties $\mathcal{Q}_{X_0}$, $\mathcal{Q}_{rJ_0}$ et $\mathcal{Q}_{rH_0}$ est une quadrique dont on précisera une équation.

b) Représenter graphiquement l'allure des quadriques $\mathcal{Q}_{X_0}$,$\mathcal{Q}_{J_0}$ et $\mathcal{Q}_{H_0}$ sur un même dessin.

II.F – Un lemme

Soient A, B et M trois éléments de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$.

II.F.1) Exprimer la trace de la matrice M^2 en fonction du déterminant de M.

II.F.2) Démontrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si la trace de la matrice M^2 est nulle.

II.F.3) On suppose que les matrices A et $[A,B]$ commutent.

Démontrer que la matrice $[A,B]$ est nilpotente.

II.G – Description des triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$

II.G.1) Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}(2,\mathbb{K})$ qui commutent avec X_0. Quelles sont les matrices M de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ qui commutent avec X_0 ?

II.G.2) Soit P une matrice de $GL(2,\mathbb{K})$. Vérifier que $(PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$ est un triplet admissible.

On se propose de démontrer que, réciproquement, tous les triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ sont de cette forme.

Pour toute la suite de la question II.G, soient X, H, Y trois éléments de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ tels que (X,H,Y) forme un triplet admissible.

II.G.3) Montrer en utilisant les questions II.F et II.C qu'il existe une matrice $Q \in GL(2,\mathbb{K})$ vérifiant $X = QX_0Q^{-1}$.

On fixe pour la suite de la question II.G une telle matrice $Q \in GL(2,\mathbb{K})$.

II.G.4) On définit les vecteurs $u = Q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $v = Q\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

a) En calculant le vecteur $[H,X]u$ de deux manières différentes, démontrer que u est un vecteur propre de la matrice H.

b) En calculant le vecteur $[H,X]v$ de deux manières différentes, prouver l'existence d'un scalaire t vérifiant l'identité : $H = Q\begin{pmatrix}1 & t\\0 & -1\end{pmatrix}Q^{-1}$.

c) Trouver une matrice $T \in GL(2,\mathbb{K})$ commutant avec X_0 et vérifiant la relation $H = QTH_0(QT)^{-1}$.

On pose désormais $P = QT$.

II.G.5) Soit $Y' \in \mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ telle que (X,H,Y') soit un triplet admissible.

a) Déduire de la question II.G.1 les matrices de $\mathcal{M}_0(2,\mathbb{K})$ qui commutent avec X.

b) Calculer les matrices $\Phi_X(Y-Y')$ et $\Phi_H(Y-Y')$.

c) En déduire que l'on a $Y' = Y$.

II.G.6) Démontrer l'identité $(X,H,Y) = (PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$.

III Systèmes de racines et triplets admissibles d'un sous-espace de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$

III.A – Diagonalisation simultanée

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

III.A.1) Soient f un endomorphisme de V diagonalisable et W un sous-espace non nul de V stable par f. Montrer que l'endomorphisme de W induit par f est diagonalisable.

III.A.2) Soient f et g deux endomorphismes de V qui commutent, c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

III.A.3) Soit I un ensemble non vide et soit $\{f_i \,|\, i \in I\}$ une famille d'endomorphismes de V diagonalisables commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle les matrices des endomorphismes f_i, pour $i \in I$, sont diagonales. *Indication : on pourra traiter d'abord le cas où tous les endomorphismes f_i sont des homothéties, puis raisonner par récurrence sur la dimension de V.*

III.B – Application

On reprend dans cette partie les notations de la partie II.

Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$ stable par crochet, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A},\ [A,B]\in\mathcal{A}$$

On note $\mathcal{E}$ l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}(n,\mathbb{K})$.

III.B.1) Soit H un élément de $\mathcal{E}$.

a) Calculer l'image par Φ_H de la base canonique de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$. En déduire que Φ_H est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$.

b) Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{A}$ dans laquelle les matrices des endomorphismes de $\mathcal{A}$ induits par les Φ_H, pour $H\in\mathcal{E}$, sont diagonales.

Pour toute application λ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{K}$, on pose :

$$\mathcal{A}_\lambda=\{M\in\mathcal{A}\,|\,\Phi_H(M)=\lambda(H)M \text{ pour tout } H\in\mathcal{E}\}$$

III.B.2) Soit λ une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{K}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

b) Montrer que si $\mathcal{A}_\lambda$ est non réduit à $\{0\}$, alors λ est une forme linéaire de $\mathcal{E}$.

On note $\mathcal{E}^*$ l'espace vectoriel des formes linéaires de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments λ de $\mathcal{E}^*\setminus\{0\}$ tels que $\mathcal{A}_\lambda$ est différent de $\{0\}$.

III.C – Un exemple

On reprend dans cette question les notations des parties I et II ainsi que de la question III.B. On suppose désormais

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & -{}^tA\end{pmatrix}\,|\,(A,B,C)\in(\mathcal{M}(2,\mathbb{R}))^3,\ B={}^tB \text{ et } C={}^tC\right\}$$

où, pour tout $M\in\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$, le symbole ${}^tM$ désigne la transposée de M.

On a donc $\mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & -D\end{pmatrix}\,|\,D\in\mathcal{D}(2,\mathbb{R})\right\}$.

III.C.1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4,\mathbb{R})$ stable par crochet. Montrer qu'on a $\mathcal{A}_0=\mathcal{E}$, où $\mathcal{A}_0$ désigne $\mathcal{A}_\lambda$ lorsque λ est la forme linéaire nulle. Donner une base de $\mathcal{A}_0$.

III.C.2) Pour $k\in\{1,2\}$, on note e_k l'élément de $\mathcal{E}^*$ qui à toute matrice $\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & -D\end{pmatrix}$,

où $D=\begin{pmatrix}d_1 & 0\\ 0 & d_2\end{pmatrix}\in\mathcal{D}(2,\mathbb{R})$, associe le coefficient d_k.

a) Vérifier que (e_1,e_2) forme une base de $\mathcal{E}^*$.

On munit $\mathcal{E}^*$ de l'unique produit scalaire faisant de (e_1,e_2) une base orthonormale.

b) Soit $\mathcal{R}=\{e_1-e_2,e_2-e_1,e_1+e_2,-e_1-e_2,2e_1,-2e_1,2e_2,-2e_2\}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{R}$ est un système de racines de $\mathcal{E}^*$. *On pourra pour cela dessiner la partie $\mathcal{R}$ dans le plan euclidien $\mathcal{E}^*$ et reconnaître l'un des systèmes de racines rencontrés dans la question I.D*

III.C.3) Soit $\alpha\in\mathcal{R}$. Déterminer par le calcul le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_\alpha$. Vérifier que $\mathcal{A}_\alpha$ est une droite vectorielle.

III.C.4) Établir la relation $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0\oplus\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{R}}\mathcal{A}_\alpha$.

III.C.5) Démontrer l'égalité $\mathcal{S}(\mathcal{A})=\mathcal{R}$.

III.C.6) On pose désormais $\alpha=e_1-e_2$, $\beta=2e_2$, $H_\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $H_\beta=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

a) En utilisant les résultats de la question III.C.3, montrer qu'il existe un couple $(X_\alpha,X_{-\alpha})\in\mathcal{A}_\alpha\times\mathcal{A}_{-\alpha}$ et un couple $(X_\beta,X_{-\beta})\in\mathcal{A}_\beta\times\mathcal{A}_{-\beta}$ tels que $(X_\alpha,H_\alpha,X_{-\alpha})$ et $(X_\beta,H_\beta,X_{-\beta})$ soient des triplets admissibles de $\mathcal{A}$.

On fixe deux tels triplets admissibles.

b) Montrer que $\mathcal{A}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4,\mathbb{R})$ stable par crochet et contenant les matrices X_α, H_α, $X_{-\alpha}$, X_β, H_β et $X_{-\beta}$.

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2010

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière TSI

Calculatrices autorisées

Définitions et notations :

- on dit qu'un nombre réel x est rationnel s'il existe deux entiers relatifs p et q (avec q non nul) tels que $x = \dfrac{p}{q}$;
- on dit qu'un nombre réel x est irrationnel s'il n'est pas rationnel ;
- l'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$;
- pour tout nombre réel x, on appelle partie entière de x et on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur à x. On a donc $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leqslant x < 1 + E(x)$.

Lorsque l'énoncé demande d'écrire un algorithme, ce dernier peut être rédigé à la convenance du candidat, dans un langage algorithmique naturel, dans un langage d'un logiciel de calcul formel utilisé en classes préparatoires, ou dans un autre langage de programmation en spécifiant lequel.

Partie I - Fonctions homographiques

I.A - Une équation différentielle

Pour tout nombre réel a fixé, on considère l'équation différentielle

$$(E_a) \qquad (x-a)y'' + 2y' = 0$$

où y est une fonction inconnue de la variable x de classe C^2 sur un intervalle réel et à valeurs réelles.

I.A.1) On suppose que a est strictement positif.

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on définit une fonction y comme la somme de la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$ (avec $R > 0$).

a) Déterminer pour tout $x \in]-R, R[$ l'expression de $(x-a)y''(x) + 2y'(x)$ comme somme d'une série entière.

b) Dans cette question, on suppose que y est solution de (E_a).

Déterminer une relation de récurrence, vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \geqslant 1$.

Pour $n \geqslant 1$, déterminer a_n en fonction de n et de a_1 puis exprimer y à l'aide des fonctions usuelles.

c) En déduire les fonctions développables en série entière qui sont solutions de (E_a) sur $]-a, a[$.

Montrer qu'elles forment un espace vectoriel de dimension 2 et en donner une base.

En déduire l'ensemble des solutions de (E_a) sur $]-a, a[$.

I.A.2) On suppose que a est un nombre réel quelconque.

Résoudre (E_a) sur $]-\infty, a[$, puis sur $]a, +\infty[$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

I.B - Une famille de fonctions

On considère $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels tels que γ n'est pas nul.

On pose alors pour tout x réel différent de $\dfrac{-\delta}{\gamma}$

$$g(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

I.B.1) À quelle condition g est-elle constante ?

On suppose dans la suite que cette condition n'est jamais remplie.

I.B.2)

a) Déterminer des nombres réels u, v, w tels que :

pour tout x réel différent de $\dfrac{-\delta}{\gamma}$, $g(x) = u + \dfrac{v}{x+w}$.

b) En déduire le sens de variation de g sur chacun de ses intervalles de définition.

I.B.3) On suppose dans cette question que v est strictement positif.

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé.

On considère la courbe (C) d'équation $xy = 1$, la courbe (D) d'équation $xy = v$ et la courbe (Γ) d'équation $g(x) = y$ dans ce repère.

a) Trouver une homothétie h telle que $h(C) = D$.

b) Trouver une translation t telle que $t \circ h(C) = \Gamma$.

c) À quelle condition sur v l'application $t \circ h$ est-elle une homothétie différente de l'identité ? Déterminer alors son centre et son rapport.

I.B.4) Déterminer un réel a pour lequel la fonction g est solution de (E_a) sur des intervalles que l'on précisera.

- version du 18 février 2010 9h22

Partie II - Fractions continues

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - E(x)}$.

II.A - Étude de f

II.A.1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

Montrer que f est périodique de période 1.

II.A.2) On considère un certain entier relatif k.
Déterminer des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que la restriction de f à $]k, k+1[$ coïncide avec celle de la fonction g (telle qu'elle est définie au **I.B**) à ce même intervalle.

II.A.3) Étudier f ; on précisera en particulier ses variations, son ensemble image et on tracera son graphe dans un repère orthonormé.

II.A.4) Démontrer que pour tout nombre x irrationnel (resp. rationnel non entier), $f(x)$ est irrationnel (resp. rationnel).

II.B - Une suite récurrente

On pose $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 > 0$ et on s'intéresse lorsque cela est possible à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$

II.B.1) On suppose dans cette question que $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, x_n est bien défini.

II.B.2) On suppose dans cette question que $x_0 \in \mathbb{Q}$ et que pour tout entier naturel n, x_n est bien défini.
On considère u_0 et v_0 deux entiers naturels non nuls tels que $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_n \in \mathbb{Q}$ et que pour $n \geqslant 1$, $x_n > 1$.

b) On définit par récurrence deux suites d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = v_n$ et v_{n+1} égal au reste de la division euclidienne de u_n par v_n lorsque v_n est non nul et 0 sinon.
Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel n, $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

c) Démontrer que la suite (v_n) est strictement décroissante.
L'hypothèse du B.2) est-elle possible ?
Que peut-on en conclure ?

II.B.3) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur x_0 pour que, pour tout entier naturel n, x_n soit bien défini.

II.C - Le cas irrationnel

On fixe dans toute cette partie $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x_0 > 0$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au B.1) et, pour tout entier naturel n, on pose $a_n = E(x_n)$.
La suite des entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée développement en fraction continue de x_0.

II.C.1) Écrire un algorithme d'arguments x_0 et n donnant a_n.

II.C.2) On pose dans cette question $x_0 = \sqrt{2}$ (on admet que c'est un irrationnel).

a) Tester l'algorithme du II.C.1) ci-dessus sur une calculatrice pour $x_0 = \sqrt{2}$ et n valant successivement $0, 1, 2, 3, 4$ pour calculer successivement a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4.
Quelle conjecture peut-on formuler ?

b) Calculer exactement les valeurs de x_0, x_1, x_2. En déduire que la suite (x_n) est stationnaire puis démontrer la conjecture du a).

c) *Les limites de la calculatrice*
Tester sur une calculatrice l'algorithme pour $x_0 = \sqrt{2}$ et $n = 30$.
Que penser du résultat obtenu ?

d) Reprendre les trois questions précédentes avec $x_0 = \sqrt{3}$ (on admet que c'est un irrationnel).

II.C.3) On définit deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1$$

et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

a) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls.

b) Démontrer que la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

En déduire que pour tout entier naturel n, $q_n \geqslant n$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

d) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_0 = \frac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}.$$

II.C.4) On définit une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul

$$r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

b) Montrer que la série de terme général $(r_n - r_{n-1})$ est alternée et convergente.

c) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

d) On note r la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, r est compris entre r_n et r_{n+1} et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left| r - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{q_n^2}.$$

e) Écrire un algorithme d'arguments x_0 et n donnant la valeur de r_n.
Le tester dans l'exemple $x_0 = \sqrt{2}$ et donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de r_2 et r_3.
Que peut-on conjecturer sur la valeur de r ?

II.D - On considère un nombre irrationnel x_0, deux nombres entiers α et δ strictement positifs et on pose $\beta = 1 + \alpha\delta$ et $\gamma = 1$.

II.D.1) Démontrer que le nombre réel $y_0 = g(x_0)$ (avec g défini comme au **I.B**) est bien défini et qu'il est irrationnel.

II.D.2) On note respectivement $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en fraction continue de x_0 et y_0 définis au **II.C**.
Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $a_{n-1} = b_n$.

II.E - Le cas quadratique

On considère deux entiers α et δ strictement positifs et on pose :

$$\Delta = (\delta + \alpha)^2 + 4.$$

On pose comme au **II.D**, $\beta = 1 + \alpha\delta$ et $\gamma = 1$, g étant définie comme au **I.B**.

II.E.1) Démontrer que Δ n'est pas le carré d'un entier. On en déduit et on l'admettra que $\sqrt{\Delta}$ est un nombre irrationnel.

II.E.2) Démontrer que l'équation du second degré

$$x^2 + (\delta - \alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0$$

possède deux solutions réelles distinctes toutes les deux irrationnelles dont l'une, notée z_0, est strictement positive.

II.E.3) Démontrer que $z_0 = g(z_0)$.

II.E.4) Que peut-on en déduire quant au développement en fraction continue du nombre z_0 ?

II.E.5) Que peut-on dire du développement en fraction continue de $\sqrt{p^2+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$?

• • • FIN • • •

Concours Centrale - Supélec 2010

Épreuve : MATHÉMATIQUES II **Filière** TSI

Calculatrices autorisées

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, la base canonique de E, notée $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$, étant orthonormale. $L(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles.

Partie I -

Dans toute cette partie, on étudie des endomorphismes de E qui admettent une seule droite (vectorielle) stable et un seul plan (vectoriel) stable.

Rappel : un sous-espace F de E est stable par un endomorphisme f si $f(F) \subset F$.

I.A - Soit $f \in L(E)$. Soit $a \in E$ un vecteur non nul de E et $D = Vect(a)$, la droite vectorielle de vecteur directeur a.

I.A.1) Montrer que D est stable par f si et seulement si a est vecteur propre de f.

I.A.2) En déduire que tout endomorphisme f de E admet au moins une droite stable.

I.A.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat précédent reste-t-il vrai dans $\mathbb{R}^n$, quel que soit n ?

I.B - Soit $f \in L(E)$ et P un plan stable par f. On note $\widetilde{f}$ l'endomorphisme de P induit par f sur P, défini par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in P$.

I.B.1) Montrer que le polynôme caractéristique de $\widetilde{f}$ divise celui de f.

I.B.2) Montrer que si $\widetilde{f}$ possède une droite stable, alors f possède au moins deux droites stables en général, sauf dans un cas particulier que l'on précisera.

I.C - Soit F un espace vectoriel réel de dimension 2 et $g \in L(F)$. On suppose que g ne possède pas de valeur propre réelle et on note M la matrice de g dans une base de F.

I.C.1) Soit g' l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{C}^2$, $\varepsilon_1 = (a, b)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$ vérifiant : $g'(\varepsilon_1) = \alpha\varepsilon_1$ et $g'(\overline{\varepsilon_1}) = \overline{\alpha} \times \overline{\varepsilon_1}$ où $\overline{\varepsilon_1} = (\overline{a}, \overline{b})$.

I.C.2) Montrer que $(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon}_1, \varepsilon_1 - \overline{\varepsilon}_1)$ est une base de $\mathbb{C}^2$. Quelle est la matrice de g' dans cette base ?

I.C.3) Montrer qu'il existe $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ inversible et $(X, Y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, tels que :

$$M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

On ***admettra*** que de la même manière :

il existe $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que :

$$M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

I.D -

I.D.1) Soit $f \in L(E)$ admettant un seul plan stable et une seule droite stable non incluse dans ce plan. Montrer qu'il existe une base de E où la matrice de f s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & X & -Y \\ 0 & Y & X \end{pmatrix}, \text{ avec } (\lambda, X, Y) \in \mathbb{R}^3, Y \neq 0.$$

I.D.2) Soit $f \in L(E)$ de matrice M dans la base canonique $\mathscr{B}_c$ de E.
Soit P un plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans cette base, $n = (a, b, c)$ étant un vecteur non nul de E.

$$\text{On note } n' = (a', b', c') \text{ avec } \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Montrer que, si P est stable par f, pour tout u élément de P, n' est orthogonal à u. En déduire que P est stable par f si et seulement si n' est vecteur propre de l'endomorphisme de matrice ${}^tM$ dans $\mathscr{B}_c$.

I.D.3) Soit $f \in L(E)$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

i) f admet une unique droite stable.

ii) f admet un unique plan stable.

iii) Le polynôme caractéristique de f admet une seule racine réelle soit simple, soit triple et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

- version du 28 janvier 2010 8h55

Partie II -

II.A - Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

II.A.1) Déterminer le polynôme caractéristique de M.

II.A.2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, une valeur propre de M. Déterminer l'espace propre attaché à cette valeur propre. Préciser en particulier sa dimension.

II.A.3) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur son polynôme caractéristique pour que M soit diagonalisable.

II.A.4) Soit $f \in L(E)$ de matrice M dans $\mathscr{B}_c$. A quelle condition f admet-elle une droite stable et une seule ?

II.B - Étude d'un exemple :

Soit f de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

II.B.1) Montrer que f possède un unique plan stable noté P_t et une unique droite stable notée D_t que l'on déterminera.

II.B.2) Montrer que Δ, réunion de toutes les droites D_t, $t \in \mathbb{R}$, est incluse dans la surface Σ d'équation $y^2 = xz$. Quelle est la nature de la surface Σ ? Déterminer l'ensemble $\Sigma \setminus \Delta$, complémentaire de Δ dans Σ.

II.B.3) Tracer la courbe intersection de (Σ) et du plan d'équation $z = 1$. En déduire une représentation de (Σ).

II.C - On considère la surface (S_1) d'équation $y^2 = 4xz$.

II.C.1) Déterminer la nature de (S_1) et l'équation du plan tangent en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la surface. Vérifier que ce plan contient toujours le point $(0, 0, 0)$.

II.C.2) Montrer que si $x_0 \neq 0$, il existe un réel t tel que le plan tangent en M_0 à (S_1) soit P_t.

II.D - On cherche ici des surfaces de $\mathbb{R}^3$ possédant la même propriété que (S_1).

Soit f une application de classe C^2 définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit S_f la surface d'équation $z = f(x, y)$.

II.D.1) Écrire l'équation du plan tangent en un point quelconque M_0 de S_f, le point M_0 ayant pour coordonnées x_0, y_0 et $z_0 = f(x_0, y_0)$.

II.D.2) Écrire les conditions portant sur f et ses dérivées premières pour qu'en tout point le plan tangent soit un des plans de la famille $(P_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

II.D.3) On note, pour x fixé, $u : y \longmapsto f(x, y)$.
Montrer qu'on a alors : $u''(y)(y - 2xu'(y)) = 0$.

II.D.4) On suppose ici $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Déterminer les fonctions f telles qu'en tout point (x, y) de U,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{2x}.$$

II.D.5) Déterminer les surfaces correspondant à cette condition.

Partie III -

On considère dans cette partie l'endomorphisme g_r de E défini pour tout r de $\mathbb{R}$, non nul, par sa matrice $B(r)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On donne $B(r) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ r^2 & 0 & -r \\ r & r & 0 \end{pmatrix}$.

III.A - Déterminer le polynôme caractéristique de g_r. Déterminer ses éléments propres.

III.B - On note, pour tout $r \in \mathbb{R}$, Δ_r l'unique espace propre de g_r.
Soit Γ l'intersection de l'ensemble des droites Δ_r avec le plan d'équation $z = 1$.

III.B.1) Montrer qu'une représentation paramétrique de Γ est :

$$x = \frac{r^2 + 4}{r(2 + r^2)}, \quad y = \frac{r}{r^2 + 2}.$$

III.B.2) Soit Γ' l'ensemble d'équation cartésienne $y(x + y)^2 = x - y$.
Comparer Γ et Γ'.

III.B.3) On considère la base orthonormée

$$I = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, J = \frac{-e_1 + e_2}{\sqrt{2}}.$$

Déterminer l'équation de Γ' dans cette nouvelle base (les nouvelles coordonnées seront notées X, Y).

Partie IV -

Dans cette partie, on associe à tout triplet $V = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice :

$$A_V = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

IV.A -

IV.A.1) Montrer que si $u \in \mathbb{C}$ est tel que $u^3 = 1$, alors le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_V.

IV.A.2) En déduire une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ inversible et indépendante de V, telle que $P^{-1}A_V P$ soit diagonale, et préciser les valeurs propres de A_V.

IV.A.3) Soit $J = A_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer la matrice A_V au moyen des matrices I_3, J et J^2. Préciser comment les valeurs propres de A_V se déduisent de celles de J.

On notera $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

IV.A.4) Soit f_V l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A_V dans la base canonique. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f_V ait une et une seule droite stable ainsi qu'un et un seul plan stable.

IV.A.5) Donner une expression factorisée de $\det(A_V)$, au moyen de deux termes réels. On pourra utiliser les résultats de la question IV.A.2).

IV.B - Montrer que $g : V \mapsto A_V$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^3$ et $\{A_V, V \in \mathbb{R}^3\}$.

IV.C - Soit $\mathcal{S} = \{V \in \mathbb{R}^3 \,|\, \det(A_V) = 1\}$.

IV.C.1) Déterminer la nature de la courbe intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan :

$$\Pi_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = \lambda\}$$

selon le réel λ.

En déduire que $\mathcal{S}$ est une surface de révolution, dont on précisera l'axe.

IV.C.2) À tout $V = (x, y, z)$ et $V' = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$, on associe $V * V' = V'' = (x'', y'', z'')$ tel que :

$$x'' = xx' + yz' + zy', \quad y'' = xy' + yx' + zz', \quad y'' = xz' + yy' + zx'.$$

Comment peut-on interpréter $A_{V''}$ en fonction des matrices A_V et $A_{V'}$? Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour la loi $*$, et que $(\mathcal{S}, *)$ est un groupe commutatif.

IV.C.3) Soit $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{C}, |u| = 1\}$. Pour $(u, t) \in \mathbb{R} \times \mathbf{U}$, on pose :

$$F(t, u) = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t(u + \overline{u}), \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t(\mathrm{j}^2 u + \mathrm{j}\,\overline{u}), \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t(\mathrm{j}\,u + \mathrm{j}^2\,\overline{u})\Big).$$

Montrer F est une bijection de $\mathbb{R} \times \mathbf{U}$ sur $\mathcal{S}$.

IV.C.4) Calculer $F(t, u) * F(t', u')$. Que peut-on en déduire ?

• • • FIN • • •

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques I

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2011

Développement asymptotique du reste des séries de Riemann convergentes

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste $R_n(\alpha)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli.

Dans la dernière partie, on étudie de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Rappels et notations

On note $[x]$ la partie entière d'un réel x.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n=O(u_n)$ si

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\Rightarrow|v_n|\leqslant M|u_n|$$

I Étude préliminaire

I.A – Convergence des séries de Riemann

I.A.1) Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a,+\infty[$, où $a\in\mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k\in[a+1,+\infty[$, on a $\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqslant f(k)\leqslant\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx$.

I.A.2) En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha\in\mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

I.A.3) Pour tout réel $\alpha>1$, montrer que $1\leqslant S(\alpha)\leqslant1+\frac{1}{\alpha-1}$.

I.B – Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1) En utilisant l'encadrement de la question **I.A.1**, montrer que $R_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+O\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$.

I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{k^\alpha}-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}}+A_k$

où A_k est un réel vérifiant $0\leqslant A_k\leqslant\frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3) En déduire que

$$R_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+\frac{1}{2n^\alpha}+O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va donner une méthode plus rapide.

BY-NC-SA

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A – Nombres de Bernoulli

II.A.1) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe C^∞ sur I, la fonction g définie sur I par $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie

$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

où les $b_{l,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

II.A.2) Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geqslant 1$, $a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$. En déduire que $|a_p| \leqslant 1$ pour tout entier naturel p. Déterminer a_1 et a_2.

II.A.3) *a)* Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(e^z - 1)\varphi(z)$. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.

c) Montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Calculer a_4.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B – Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette **question II.B**, on fixe un entier naturel non nul p et on note $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que $g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k)$.

II.B.1) En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leqslant Ak^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2) En déduire le développement asymptotique du reste

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big) + O\Big(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$, donnée par

$$\widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big)$$

II.B.3) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100$: $\widetilde{S}_{100,4}(3) = 1{,}202056903159594277\ldots$ tandis que $S(3)$ vaut $1{,}202056903159594285\ldots$ (constante d'Apéry). La méthode de la partie **II** semble satisfaisante, mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $O\Big(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$. C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.A – Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes

$$A_0 = 1,\ A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad \text{(III.1)}$$

Les polynômes $B_n = n! A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par les **conditions III.1** ; préciser le degré de A_n ; calculer A_1, A_2 et A_3.

BY-NC-SA

b) Montrer que $A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que $A_n(0) = A_n(1)$ et que $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n(X) = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2}\frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$$

puis que, si $n \geqslant 1$,

$$\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$$

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $c_n = a_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) Montrer que la série $\sum_n A_n(t)z^n$ converge pour tout réel $t \in [-1,1]$ et tout complexe z vérifiant $|z| < 1$.

Sous ces conditions, on pose $f(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée en fonction de $f(t,z)$. En déduire que, si $|z| < 1$ et $z \neq 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1}.$$

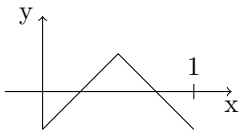
c) Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 2\pi$, on a $\dfrac{ze^{z/2}}{e^z-1} + \dfrac{z}{e^z-1} = 2\dfrac{z/2}{e^{z/2}-1}$.

En déduire, pour tout entier naturel n, $A_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n$.

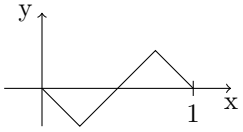
III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

On établit ici une majoration des polynômes de Bernoulli sur $[0,1]$.

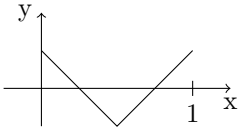
a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, les variations des polynômes A_n sur $[0,1]$ correspondent schématiquement aux quatre cas ci-dessous :



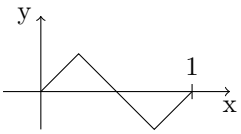
$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$



$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$



$n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$



$n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$

En d'autres termes, pour $n \geqslant 2$, on a :

1. Si $n \equiv 2 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n(\frac{1}{2})$; de plus, la fonction A_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
2. Si $n \equiv 0 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n(\frac{1}{2})$; de plus, la fonction A_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
3. Si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
4. Si $n \equiv 3 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n < 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, montrer que $|A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leqslant \dfrac{|a_{2n}|}{2}$.

III.B – Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1) Soit f une fonction complexe de classe C^∞ sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\, dt$$

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer que pour tout entier naturel impair $q = 2p+1$

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\big(f'(0) + f'(1)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

III.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

BY-NC-SA

En appliquant, pour $k \geqslant n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k+t)$, montrer

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

où on a posé $A^*_j(t) = A_j(t - [t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\left| \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leqslant \left| \frac{a_{2p}}{2} \right| \left| f^{(2p+1)}(n) \right|$$

III.B.3) Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du **II.B.2**, le terme $O\Big(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$ peut s'écrire sous forme d'une intégrale.

IV Compléments sur l'erreur

Dans cette partie, on fixe un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)\, x^{\alpha-1}}$.

IV.A – Encadrement de l'erreur

IV.A.1) Soit g une fonction continue par morceaux croissante sur $[0,1]$.
En remarquant $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$, montrer que
– si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t) dt \geqslant 0$;
– si $n \equiv 3 \bmod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t) dt \leqslant 0$.

IV.A.2) En reprenant les notations de **II.B.2**, montrer que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$

$$\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$$

et que

$$\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$$

En déduire que l'erreur $\left| S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) \right|$ est majorée par $\left| a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n) \right|$.

IV.A.3) Dans cette question, on reprend le cas de **II.B.3**. Sachant que $6! a_6 = \dfrac{1}{42}$, retrouver que l'erreur $|S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3)|$ est majorée par une expression de l'ordre de 10^{-17}.

IV.B – Séries de Fourier

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ et tout réel x, on pose $\widetilde{A}_p(x) = A_p\left(\dfrac{x}{2\pi} - \left[\dfrac{x}{2\pi}\right]\right)$.

IV.B.1) Montrer que $\widetilde{A}_p$ est 2π-périodique et continue par morceaux.

IV.B.2) À l'aide de la question **III.B.1**, déterminer les coefficients de Fourier de $\widetilde{A}_p$:

$$\widehat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{A}_p(t) e^{-inx} dx$$

IV.B.3) Étudier la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{A}_p$.

IV.B.4) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, en déduire que $a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1} \dfrac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}$.

IV.C – Comportement de l'erreur

IV.C.1) Montrer que, pour tous entiers n, $p \geqslant 1$

$$\left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1) S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}$$

IV.C.2) Que dire de l'approximation de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ lorsque, n étant fixé, p tend vers $+\infty$? Pour le calcul numérique de $S(\alpha)$, comment doit-on choisir n et p ?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2011

Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul n, on note :
- $[\![1;n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est positive (respectivement définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geqslant 0 \quad \text{(respectivement } {}^tXAX > 0 \text{ si } X \neq 0).$$

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier naturel p, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p est noté $\mathbb{R}_p[X]$.

Objectifs

La première partie a pour but de démontrer une caractérisation des matrices réelles définies positives, à l'aide des déterminants de certaines matrices extraites.

La deuxième partie aborde l'étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire défini à l'aide d'une intégrale.

La troisième partie introduit les matrices de Hilbert et leur inverse, dont certaines propriétés sont étudiées dans la **partie IV**.

I Caractérisation des matrices symétriques définies positives

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.A.1) Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

I.A.2) Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

I.B – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1;n]\!]$, on note $A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre i extraite de A, constituée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A.

Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ \det(A^{(i)}) > 0.$$

I.B.1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, montrer que la matrice $A^{(i)}$ est définie positive et en déduire que $\det(A^{(i)}) > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dira qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

I.B.2) Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, montrer directement que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive.

I.B.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive. On considère une matrice A de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que A n'est pas définie positive.

a) Montrer alors que A admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.

b) En déduire qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que ${}^tXAX < 0$.

c) Conclure.

I.C – Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive} \iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ \det(A^{(i)}) \geqslant 0 \ ?$$

I.D – Écrire une procédure, dans le langage Maple ou Mathematica, qui prend en entrée une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et qui, en utilisant la caractérisation du **I.B**, renvoie « true » si la matrice M est définie positive, et « false » dans le cas contraire.

BY-NC-SA

II Étude d'une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

De plus, on pose :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

II.A – Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

II.B – On note $P_n^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois de P_n.

Déterminer le degré de $P_n^{(n)}$ et calculer $P_n^{(n)}(1)$.

On définit la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n = \dfrac{1}{P_n^{(n)}(1)} P_n^{(n)}. \end{cases}$$

II.C – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle Q, L_n\rangle = 0$.

Indication : on pourra intégrer par parties.

II.D –

II.D.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(u)\,du$.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

II.D.2) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation : $\langle L_n, L_n\rangle = \dfrac{1}{2n+1}$.

II.E – Déterminer une famille de polynômes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de K_n vaut n et son coefficient dominant est strictement positif ;

ii. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Justifier l'unicité d'une telle famille.

II.F – Calculer K_0, K_1 et K_2.

III Matrices de Hilbert

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice H_n par :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où $(H_n)_{i,j}$ désigne le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n.

On note de plus $\Delta_n = \det(H_n)$.

III.A – Étude de quelques propriétés de H_n

III.A.1) Calculer H_2 et H_3. Montrer que ce sont des matrices inversibles et déterminer leur inverse.

Dans les questions suivantes de **III.A**, on désigne par n un entier naturel non nul.

III.A.2) Montrer la relation :

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!}\,\Delta_n$$

Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres.

III.A.3) En déduire l'expression de Δ_n en fonction de n (on fera intervenir les quantités $c_m = \displaystyle\prod_{i=1}^{m-1} i!$ pour des entiers m adéquats).

III.A.4) Prouver que H_n est inversible, puis que $\det(H_n^{-1})$ est un entier.

III.A.5) Démontrer que H_n admet n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité) strictement positives.

BY-NC-SA

III.B – Approximation au sens des moindres carrés

On note $C^0([0;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. On convient d'identifier l'espace $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace vectoriel de $C^0([0;1],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout entier naturel i, le polynôme X^i est confondu avec la fonction polynomiale définie par $X^i(t) = t^i$ pour tout $t \in [0,1]$.

On étend à $C^0([0;1],\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de la **partie II** en posant

$$\forall f, g \in C^0([0;1],\mathbb{R}), \quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $C^0([0;1],\mathbb{R})$.)

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire : pour toute fonction $f \in C^0([0;1],\mathbb{R})$, on a donc

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

III.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\|\Pi_n - f\| = \min_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|$$

III.B.2) Montrer que la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

III.B.3) Montrer que H_n est la matrice du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

III.B.4) Calculer les coefficients de Π_n à l'aide de la matrice H_{n+1}^{-1} et des réels $\langle f, X^i\rangle$.

III.B.5) Déterminer explicitement Π_2 lorsque f est la fonction définie pour tout $t \in [0,1]$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

IV Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

IV.A – Somme des coefficients de H_n^{-1}

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$

IV.A.1) Calculer s_1, s_2 et s_3. Conjecturer de manière générale la valeur de s_n en fonction de n.

IV.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(a_p^{(n)})_{0\leqslant p\leqslant n-1}$ vérifiant le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_0^{(n)} + \dfrac{a_1^{(n)}}{2} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{n} = 1 \\ \dfrac{a_0^{(n)}}{2} + \dfrac{a_1^{(n)}}{3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{n+1} = 1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \dfrac{a_0^{(n)}}{n} + \dfrac{a_1^{(n)}}{n+1} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{2n-1} = 1 \end{cases}$$

b) Montrer que $s_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme S_n par : $S_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}X + \cdots + a_{n-1}^{(n)}X^{n-1}$.

Dans les questions suivantes de **IV.A**, on désigne par n un entier naturel non nul.

IV.A.3) Montrer que

$$\forall Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle S_n, Q\rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$$

IV.A.4) Exprimer s_n à l'aide de la suite de polynômes $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie à la **question II.E**.

IV.A.5) Pour tout $p \in [\![0; n-1]\!]$, calculer $K_p(1)$.

IV.A.6) Déterminer la valeur de s_n.

BY-NC-SA

IV.B – Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

IV.B.1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\binom{2p}{p}$ est un entier pair.

En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1;n]\!]$, alors $\binom{n+p}{p}\binom{n}{p}$ est un entier pair.

IV.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'on peut écrire :

$$K_n = \sqrt{2n+1}\,\Lambda_n$$

où Λ_n est un polynôme à coefficients entiers que l'on explicitera.
Parmi les coefficients de Λ_n, lesquels sont pairs ?

IV.B.3)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $h_{i,i}^{(-1,n)}$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$; on donnera en particulier une expression très simple de $h_{1,1}^{(-1,n)}$ et $h_{n,n}^{(-1,n)}$ en fonction de n.

b) Calculer $h_{i,j}^{(-1,n)}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$; en déduire que les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.

c) Montrer que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ est divisible par 4 pour tout couple $(i,j) \in [\![2;n]\!]^2$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrices autorisées

2011

Le but de ce problème est d'établir ***partie V*** une identité relative à la fonction Gamma, due à Euler, puis d'en présenter ***partie VI*** une application à la distribution de Bolzmann dans un gaz de particules.

I La fonction Gamma

On définit la fonction Γ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

I.A – Montrer que la fonction $t \to e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

I.B – Justifier que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

I.C – Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

I.D – Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$.

II Formule de Stirling

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose :

$$u_k = \ln k - \int_{k-1}^{k} \ln t\, dt$$

II.A – À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$u_k = \frac{1}{2}\left(\ln k - \ln(k-1)\right) - \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

II.B – Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note :

$$w_k = \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} w_k$.

En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + a + v_n$$

où $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

II.C – En utilisant encore une intégration par parties, montrer que :

$$\left| w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right| \leqslant \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$$

II.D – En déduire que

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leqslant \frac{1}{12n^2}$$

puis que :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans la suite on admettra que $a = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ et on pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

BY-NC-SA

III L'identité d'Euler

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{III.1}$$

On désigne par $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $(I_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(J_n(x))_{n\geqslant 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$$

III.A – Montrer que pour tout entier n, $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

III.B – Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

III.C – Montrer que, pour tout entier n, $n \geqslant 0$,

$$\forall x > 0, \qquad J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

III.D – En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

III.E – Établir l'identité d'Euler (**III.1**).

IV Une intégrale à paramètre

Dans toute la suite, on définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto u - [u] - 1/2 \end{aligned}$$

où la notation $[u]$ désigne la partie entière de u.

IV.A – Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1,1]$.

IV.B – Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$$

est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique de période 1.

IV.C – À l'aide d'une intégration par parties, justifier, pour $x > 0$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

IV.D – L'application $u \longmapsto \dfrac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

IV.E – Soit φ l'application définie pour tout $x > 0$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

En reprenant l'intégration par parties de la **question IV.C**, démontrer que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\,du$$

BY-NC-SA

V Une autre identité due à Euler

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$:

$$\ln\Gamma(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\,du$$

où h est l'application définie à la **partie IV**.

On fixe donc $x > 0$ et pour tout entier naturel n, on définit $F_n(x)$ par :

$$F_n(x) = \ln\left(\frac{n!n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\right)$$

V.A – Montrer que pour tout entier naturel i :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t\,dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\,du$$

V.B – En déduire que :

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

où

$$G_n(x) = \ln n! + (x+1)\ln n - \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x$$

V.C –

V.C.1) En utilisant la formule de Stirling, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi}$$

V.C.2) En déduire que :

$$\ln\Gamma(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

V.D – Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\,du$$

VI Distribution de Bolzmann

VI.A – Soient ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 quatre nombres réels strictement positifs deux à deux distincts et deux nombres réels strictement positifs E et N. Soit Ω la partie, supposée non vide, formée des quadruplets $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4 = E \end{cases}$$

VI.A.1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^4$.

Montrer que f admet un maximum sur Ω.

On note alors $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega$ un point en lequel ce maximum est atteint.

VI.A.2) Montrer que si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ alors x_3 et x_4 peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_3 &= ux_1 + vx_2 + w \\ x_4 &= u'x_1 + v'x_2 + w' \end{aligned}$$

où l'on donnera explicitement u, v, u', v' en fonction de ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

VI.A.3) En supposant qu'aucun des nombres a_1, a_2, a_3, a_4 n'est nul, déduire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u\frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + u'\frac{\partial f}{\partial x_4}(a) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + v\frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + v'\frac{\partial f}{\partial x_4}(a) &= 0 \end{aligned}$$

BY-NC-SA

VI.A.4) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,0,u,u')$ et $(0,1,v,v')$ admet un sous-espace supplémentaire orthogonal engendré par les vecteurs $(1,1,1,1)$ et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$.

VI.A.5) En déduire l'existence de deux réels α, β tels que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$ on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha + \beta\varepsilon_i$$

VI.B – On définit la fonction F pour tout $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ de $\mathbb{R}^4_+$ par

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\sum_{i=1}^{4} \ln\Gamma(1+x_i)$$

On suppose qu'il existe $\overline{N} = (N_1,N_2,N_3,N_4) \in \Omega$, les nombres N_1,N_2,N_3,N_4 étant tous les quatre non nuls, tel que

$$\max_{x\in\Omega} F(x) = F(\overline{N})$$

Montrer l'existence de deux nombres réels λ et μ vérifiant pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$:

$$\ln N_i + \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+N_i)^2}\,du = \lambda + \mu\varepsilon_i$$

VI.C – Pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, on pose

$$\theta(N_i) = \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+N_i)^2}\,du$$

VI.C.1) Montrer que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$

$$0 < \theta(N_i) < \frac{1}{N_i}$$

VI.C.2) Montrer l'existence d'un réel K strictement positif tel que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$

$$N_i = Ke^{\mu\varepsilon_i}e^{-\theta(N_i)}$$

Commentaire

Les calculs précédents interviennent dans la modélisation de gaz de particules : $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_4$ correspondent à quatre niveaux différents d'énergies et $N_1,\ldots,N_4$ aux nombres de particules qui se trouvent respectivement au niveau $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_4$ (pour un total de N particules et une énergie totale E). Sous réserve d'équiprobabilité des répartitions, la probabilité d'être dans la configuration (x_1,x_2,x_3,x_4) est donnée par $N!/(N_1!\,N_2!\,N_3!\,N_4!)$.

En mécanique statistique, on pose comme principe que les particules vont se répartir de manière à ce que cette probabilité soit maximale. Cela revient à chercher la répartition qui maximise la somme $-\sum_{i=1}^{4}\ln(N_i!)$, assujettie aux conditions de **VI.A**. *Il découle alors du dernier résultat établi dans le problème, la* **loi de répartition de Bolzmann**, *à savoir que pour tous j, k, $j \neq k$, si N_j et N_k sont assez grands : $N_j/N_k \simeq e^{\mu(\varepsilon_j-\varepsilon_k)}$. D'autre part, un calcul utilisant conjointement la formule de Bolzmann donnant l'expression statistique de l'entropie $S = -k_B\ln(N!/(N_1!\cdots N_4!))$ et la relation $dS = dE/T$ (pour une transformation à volume constant) permet d'établir que $\mu = -1/k_BT$.*

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2011

4 heures Calculatrices autorisées

Représentation connaissant les distances mutuelles

Notations

Dans tout le problème, n et p désignent des entiers naturels $\geqslant 1$.

On note la matrice colonne $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On définit les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$J = Z\,{}^tZ \qquad \text{et} \qquad P = I_n - \frac{1}{n}J$$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique que l'on notera $< \cdot, \cdot >$ et l'espace de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini par

$$\forall (M,N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \qquad (M \mid N) = \operatorname{tr}\left({}^tMN\right)$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices à valeurs propres positives ou nulles.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I Centrage de matrices

I.A – Soit π l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la représentation dans la base canonique est la matrice P.

Montrer que π est un projecteur orthogonal et en préciser les éléments caractéristiques.

I.B – On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \Phi(M) = PMP$$

I.B.1) Montrer que Φ est un projecteur orthogonal dans l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\cdot \mid \cdot))$.

I.B.2) Montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MZ = 0 \text{ et } {}^tMZ = 0\}$.

I.C – Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$S(M) = MZ = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n m_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(M)_1 \\ \vdots \\ S(M)_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma(M) = < Z, S(M) >$$

Montrer que

$$\Phi(M) = M - \frac{1}{n}\left(S(M)\,{}^tZ + Z\,{}^tS(M)\right) + \frac{\sigma(M)}{n^2}J$$

II Produit scalaire à partir des distances mutuelles (relation de Torgerson)

Soient $U_1, U_2, \cdots, U_n$, n éléments de $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\sum_{i=1}^n U_i = 0$.

Géométriquement, $U_1, U_2, \cdots, U_n$ désignent des points d'isobarycentre l'origine.

On définit la matrice des distances mutuelles au carré, élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de la façon suivante :

BY-NC-SA

$$M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

On note U la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ admettant pour vecteurs colonnes les éléments $U_1, U_2, \cdots, U_n$ de $\mathbb{R}^p$. (On pourra noter commodément $U = (U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n)$).

II.A – Montrer que ${}^tUU = -\frac{1}{2}\Phi(M)$

II.B – En déduire, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, une expression du produit scalaire $< U_i, U_j >= {}^tU_iU_j$ en fonction de

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{n}\left(S(M)_i + S(M)_j\right) + \frac{1}{n^2}\sigma(M)$$

et de m_{ij} (relation de Torgerson).

Ainsi la matrice des distances mutuelles au carré permet de retrouver la matrice des produits scalaires ${}^tUU \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III Condition pour qu'une matrice soit une matrice de distances mutuelles au carré

Soit $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} \geqslant 0$ et $m_{ii} = 0$.

III.A – On suppose dans cette question qu'il existe $U_1, U_2, \cdots, U_n$ éléments de $\mathbb{R}^p$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$.

III.A.1) Montrer que les valeurs propres de $\Phi(M)$ sont toutes réelles et négatives ou nulles.

III.A.2) On suppose de plus (quitte à effectuer une translation) que les $(U_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont centrés, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$.

Montrer que $\mathrm{rg}(U) = \mathrm{rg}(U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n) = \mathrm{rg}\left(\Phi(M)\right)$ et que $p \geqslant \mathrm{rg}\left(\Phi(M)\right)$.

III.B – Réciproquement, on suppose que les valeurs propres de $\Phi(M)$ sont toutes négatives ou nulles et on pose $\Psi(M) = -\frac{1}{2}\Phi(M)$ et $r = \mathrm{rg}(\Psi(M))$.

III.B.1) Montrer qu'il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tUU = \Psi(M)$.

III.B.2) On note $U_1, U_2, \cdots, U_n$ les colonnes de la matrice U.

On cherche à montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$.

a) Montrer que les (U_i) sont centrés, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$.

b) Montrer que la matrice $N = (n_{ij})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ n_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$$

vérifie $\Psi(N) = \Psi(M)$.

c) Montrer que $M = N$ et conclure.

IV Étude d'un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie, on considère quatre points distincts A, B, C et D dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ tels que $AB = BC = CD = DA = 1$. On pose $AC = a > 0$ et $BD = b > 0$.

On se propose de trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que ces quatre points existent, dans un premier temps par un raisonnement géométrique puis en utilisant les résultats des parties précédentes.

IV.A – Étude géométrique

On suppose que les quatre points A, B, C et D existent.

IV.A.1) On suppose que les quatre points A, B, C et D sont coplanaires. Quelle relation vérifient alors a et b ?

IV.A.2) On suppose que les quatre points distincts A, B, C et D ne sont pas coplanaires. On note I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

a) Montrer que (IJ) est la perpendiculaire commune aux droites (AC) et (BD).

b) En projetant les points B et D sur le plan contenant (AC) et perpendiculaire à (IJ), montrer que $a^2 + b^2 < 4$.

On étudie maintenant la réciproque.

IV.A.3) Montrer que si des réels strictement positifs a et b vérifient la relation $a^2 + b^2 \leqslant 4$, alors il existe bien quatre points distincts A, B, C et D dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ vérifiant $AB = BC = CD = DA = 1$, $AC = a$ et $BD = b$.

BY-NC-SA

IV.B – Étude algébrique

On se propose de retrouver les résultats précédents en utilisant les parties **II** et **III**.

Pour simplifier l'écriture des relations, on notera U_1, U_2, U_3 et U_4 les quatre points A, B, C et D de l'espace $\mathbb{R}^3$ vérifiant $U_1U_2 = U_2U_3 = U_3U_4 = U_4U_1 = 1$, $U_1U_3 = a$ et $U_2U_4 = b$.

IV.B.1) On reprend les notations des parties précédentes avec ici $n = 4$.

On pose $M = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$.

Écrire la matrice M puis calculer $S(M)$ et $\sigma(M)$.

IV.B.2) Montrer que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de vecteurs propres de la matrice $\Psi(M)$ et déterminer les valeurs propres de la matrice $\Psi(M)$.

IV.B.3) Déterminer le rang de $\Psi(M)$ selon les valeurs prises par a et b.

IV.B.4) Quelle égalité vérifie les réels a et b lorsque les points U_1, U_2, U_3 et U_4 sont coplanaires ?

IV.B.5) Retrouver que les réels strictement positifs a et b vérifient $a^2 + b^2 \leqslant 4$.

IV.B.6) Réciproquement, si $a^2+b^2 \leqslant 4$, donner une famille de points U_1, U_2, U_3 et U_4 vérifiant les contraintes de distances mutuelles.

V Cas où il n'existe pas de points représentant une matrice de distances mutuelles

On considère dans cette partie une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} \geqslant 0$ et $m_{ii} = 0$.

On suppose que $\Psi(M)$ possède au moins une valeur propre strictement négative. Dans la suite, on étudie trois transformations permettant de modifier « légèrement » la matrice M pour obtenir une nouvelle matrice de distances mutuelles au carré.

V.A – Par les moindres carrés

V.A.1) On cherche à prouver qu'il existe une unique matrice symétrique T_0 à valeurs propres positives ou nulles qui minimise $\|\Psi(M) - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ lorsque T décrit $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer que

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \|{}^tQAQ\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \|A\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

b) Justifier l'existence d'une matrice $Q_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice ${}^tQ_0\Psi(M)Q_0$ soit diagonale.

c) Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\|\Psi(M) - T_0\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ minimise $\|\Psi(M) - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ lorsque T décrit $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est que la matrice ${}^tQ_0T_0Q_0$ soit diagonale.

d) Prouver l'existence et l'unicité de la matrice T_0 cherchée.

V.A.2) On suppose dans cette question que T_0 est non nulle. On veut montrer qu'il existe un entier $p \in [\![1, n-1]\!]$ minimal que l'on précisera tel que l'on puisse déterminer des vecteurs $U_1, U_2, \cdots, U_n$ éléments de $\mathbb{R}^p$ satisfaisant la condition $\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$ et pour lesquels la matrice $\widetilde{M} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ vérifie la relation $\Psi(\widetilde{M}) = T_0$.

On reprend les notations de la **partie II** et on note $U = (U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n)$.

a) Montrer que l'entier p vérifie $p \geqslant \mathrm{rg}(T_0)$ et que $\mathrm{rg}(T_0) \in [\![1, n-1]\!]$.

b) Construire une matrice $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tUU = T_0$ pour $r = \mathrm{rg}(T_0)$.

Indication. En supposant que ${}^tQ_0T_0Q_0$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \Delta & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $\Delta \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, diagonale à valeurs non nulles, on cherchera U sous la forme $U = ((\Delta_1)\ (0)) \times Q_0 \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ avec $\Delta_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, diagonale.

c) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$ (on pourra étudier le vecteur UZ).

d) En déduire que $\Psi(\widetilde{M}) = T_0$ avec $\widetilde{M} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et conclure.

BY-NC-SA

V.B – Par décalage de la distance au carré

On pose $\xi_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $N_k = \left(m_{ij} + k\xi_i^j\right)$ avec k un nombre réel strictement positif.

V.B.1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'hyperplan $\mathcal{H}$ de vecteur normal Z (et d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$) est stable par l'endomorphisme canonique associé à la matrice $\Psi(A)$.

V.B.2) Exprimer la matrice N_k en fonction des matrices M, J, I_n et du réel k.

V.B.3) Montrer qu'il existe un réel k_0 minimal que l'on précisera en fonction des valeurs propres de $\Psi(M)$, tel que la matrice $\Psi(N_{k_0})$ soit à valeurs propres positives ou nulles.

V.C – Par décalage de la distance (résultat dû à F. Cailliez, 1983)

On pose $D = (d_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \left(\sqrt{m_{ij}}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à construire une matrice

$$M_c = \left(\left(d_{ij} + c\xi_i^j\right)^2\right)$$

avec $c > 0$ telle que $\Psi(M_c)$ soit à valeurs propres positives ou nulles.

V.C.1) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX\Psi(M_c)X = {}^tX\Psi(M)X + 2c\,{}^tX\Psi(D)X + \dfrac{c^2}{2}{}^tXPX$.

V.C.2) Montrer que si $\lambda_{\min}$ et $\mu_{\min}$ désignent les valeurs propres minimales respectives de $\Psi(M)$ et $\Psi(D)$, alors

$$\forall X \in \mathcal{H}, \qquad {}^tX\Psi(M)X \geqslant \lambda_{\min}{}^tXX \quad \text{et} \quad {}^tX\Psi(D)X \geqslant \mu_{\min}{}^tXX$$

(L'hyperplan $\mathcal{H}$ a été défini à la **question V.B.1**.)

V.C.3) En déduire que pour $c = \widetilde{c} = -2\mu_{\min} + \sqrt{4\mu_{\min}^2 - 2\lambda_{\min}} > 0$, $\Psi(M_c)$ est à valeurs propres positives ou nulles et que pour tout $c > \widetilde{c}$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

V.C.4) Nous allons chercher la constante $c^* > 0$ minimale (si elle existe) vérifiant

- $\Psi(M_{c^*})$ est à valeurs propres positives ou nulles,
- pour tout $c > c^*$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

On sait que c^* est majoré par $\widetilde{c}$.

On considère $\mathcal{A} = \left\{X \in \mathcal{H} \mid \|X\| = 1 \text{ et } 4\left({}^tX\Psi(D)X\right)^2 - 2{}^tX\Psi(M)X \geqslant 0\right\}$ et on définit l'application

$$\alpha : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto -2{}^tX\Psi(D)X + \sqrt{4\left({}^tX\Psi(D)X\right)^2 - 2{}^tX\Psi(M)X} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $X^* \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha(X^*) = \sup_{X\in\mathcal{A}} \alpha(X)$ et $\alpha(X^*) > 0$.

On notera $\alpha^* = \alpha(X^*)$.

V.C.5) Montrer que

- ${}^tX^*\Psi(M_{\alpha^*})X^* = 0$,
- $\Psi(M_{\alpha^*})$ est à valeurs propres positives ou nulles,
- pour tout $c > \alpha^*$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

En conclure que $c^* = \alpha^*$.

V.C.6) Calcul de c^*

a) Montrer que $\Psi(M_{c^*})X^* = 0$.

On pose $Y^* = \dfrac{2}{c^*}\Psi(M)X^*$.

b) Montrer que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice de taille $2n$ $\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix}$ et que c^* est valeur propre de cette matrice.

V.C.7) On considère γ une valeur propre réelle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que ${}^tX_2\Psi(M_\gamma)X_2 = 0$ et que $X_2 \neq 0$. En conclure que $\gamma \leqslant c^*$.

b) Quelle conclusion en déduit-on sur le calcul de la plus petite constante additive c^* ?

Ce sujet s'inspire des techniques du « positionnement multidimensionnel » (Multi Dimensional Scaling en anglais) dans le domaine de l'analyse des données (une branche des mathématiques). Ces méthodes furent particulièrement utilisées avec les avancées de l'informatisation en psychométrie et en biologie (en écologie des populations pour visualiser les associations entre espèces par exemple).

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématique 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — PC — 4 heures — Calculatrices autorisées — 2011

Le but des deux premières parties est d'étudier l'existence d'une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0. Les deux parties suivantes sont consacrées à des classes de fonctions pour lesquelles les dérivées successives en 0 de f déterminent complètement la fonction f.

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans $\mathcal{W}$). On notera $\binom{n}{p}$ ou C_n^p les coefficients binomiaux.

I Intervention des séries entières

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On cherche dans cette partie des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, qui sont somme d'une série entière sur un intervalle $]-\delta,\delta[$ pour au moins un réel $\delta > 0$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = u_n$.

I.A – Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-\delta,\delta[$, avec $\delta > 0$, donner une expression de $f^{(k)}(x)$ sur $]-\delta,\delta[$, et en déduire $f^{(k)}(0)$ en fonction de a_k pour tout $k \geqslant 0$.

I.B – Dans les exemples suivants, proposer une solution f, en précisant une valeur de δ convenable :

I.B.1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

I.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair, $u_n = (-1)^{n/2} n!$, et pour tout n impair, $u_n = 0$.

I.C – Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n)!$, montrer qu'aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution du problème.

II Le théorème de Borel

II.A – Une fonction en cloche

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

II.A.1)

a) Montrer que pour tout naturel p il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0,1[, \qquad g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q'_{p-1}.

b) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p-2$.

c) Écrire dans le langage de calcul formel de votre choix un algorithme d'argument un entier p renvoyant la valeur de Q_p en fonction d'une indéterminée X.

On pourra utiliser la commande renvoyant, à partir d'une expression E et d'une variable x, la valeur de la dérivée de cette expression par rapport à cette variable que l'on pourra noter **diff(E,x)** *ou* **D[E,x]** *selon le langage choisi.*

II.A.2)

a) Montrer que pour tout entier naturel p

$$\lim_{x\to 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x\to 1^-} g^{(p)}(x) = 0.$$

b) En déduire que $g \in \mathcal{W}$.

II.B – Une fonction en plateau

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par $h(x) = \dfrac{\int_{x-1}^{1} g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt}$.

II.B.1) Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, constante sur $]-\infty,1]$ et sur $[2,\infty[$.

II.B.2) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x.

a) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.

b) Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1,1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.

BY-NC-SA

c) Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel

$$\lambda_p = \max_{k\in\{0,\dots,p-1\}} \max_{x\in[-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|$$

II.C – Le théorème de Borel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad g_0(x)=\varphi(x) \quad \text{et si } n\geqslant 1 \quad g_n(x)=\frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n = \max(1,4^n|u_n|\lambda_n)$.

II.C.1)

a) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\frac{1}{\beta_n},\frac{1}{\beta_n}\right]$.

II.C.2) Soit n et j des entiers naturels tels que $j<n$.

a) Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad g_n^{(j)}(x)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\varphi^{(i)}(\beta_n x)\frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.$$

b) En déduire que $g_n^{(j)}(0)=0$.

c) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x|\geqslant\frac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x)=0$.

d) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x|\leqslant\frac{1}{\beta_n}$, on a $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right|\leqslant 2^{-(n+1)}$.

II.C.3) Déduire des questions précédentes que pour n, $j\in\mathbb{N}$,

$$g_n^{(j)}(0)=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq n\\ 1 & \text{si } j=n\end{cases}$$

II.C.4) En considérant $\sigma=\sum_{n=0}^{\infty}u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall j\in\mathbb{N}$, $f^{(j)}(0)=u_j$ (théorème de Borel).

III Un autre élément de $\mathcal{W}$

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante de limite nulle, et telle que la série $\sum a_n$ converge.

III.A – Une fonction affine par morceaux

On pose pour tout x réel

$$f_0(x)=\frac{1}{2a_0^2}\left(|x+a_0|+|x-a_0|-2|x|\right).$$

III.A.1) Montrer que f_0 est nulle en dehors de $[-a_0,a_0]$, préciser sa valeur sur $[-a_0,0]$ et $[0,a_0]$, justifier sa continuité et tracer rapidement son graphe.

III.A.2) On pose $k=\frac{1}{a_0^2}$.

a) Pour tout réel x, montrer que $|f_0(x)|\leqslant\frac{1}{a_0}$.

b) Montrer que f_0 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.B – La première étape

On pose pour tout x réel

$$f_1(x)=\frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1}f_0(t)\,dt$$

III.B.1) Montrer que f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout x réel.

III.B.2) Montrer que f_1 est nulle en dehors de $[-a_0-a_1,a_0+a_1]$.

III.B.3) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f_1(x)|\leqslant\frac{1}{a_0}$ et $|f_1'(x)|\leqslant\frac{1}{a_0a_1}$.

III.B.4) Montrer que f_1 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

BY-NC-SA

III.C – Une suite de fonctions

On définit par récurrence une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions par f_0 et f_1 définies comme dans les questions précédentes et, pour tout naturel $n \geqslant 2$ et tout x réel,

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,dt$$

III.C.1) Montrer que f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_n'(x)$ pour tout x réel.

III.C.2) Montrer que f_n est nulle en dehors de $[-\sum_{i=0}^n a_i, \sum_{i=0}^n a_i]$.

III.C.3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$ et que, si $p \leqslant n$, on a $\left|f_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.

III.C.4) Montrer que f_n est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.C.5) Montrer que pour tout naturel n

$$\int_{-S}^{S} f_n(t)\,dt = 1 \quad \text{où } S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

III.D – La limite

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} k_n$ où $k_n = f_n - f_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

III.D.1)

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, montrer que $|k_n(x)| \leqslant \dfrac{k}{2}a_n$.

b) En déduire la convergence normale de la série de fonctions $\sum k_n$.

Pour tout réel x, on note

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x)$$

III.D.2)

a) Montrer que pour tout x réel, $f_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera $w(x)$ et qui vérifie $w(x) = f_0(x) + s(x)$.

b) Pour tout réel x réel, montrer que $|w(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$.

c) Montrer que w est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que w est nulle en dehors du segment $[-S, S]$.

III.D.3)

a) Montrer que

$$\int_{-S}^{S} w(t)\,dt = 1.$$

b) En déduire que w n'est pas constante nulle sur $\mathbb{R}$.

III.D.4)

a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 2}(f_n' - f_{n-1}')$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w, f_1 et $\sum_{n=2}^{\infty}(f_n - f_{n-1})$.

c) En déduire que w est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $|w'(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1}$.

III.D.5) Soit $p \geqslant 2$.

a) Montrer que $\sum_{n\geqslant p+1}(f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w, f_p et $\sum_{n=p+1}^{\infty}(f_n - f_{n-1})$.

c) En déduire que w est de classe C^p sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel , $|w^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.

BY-NC-SA

IV Classes quasi-analytiques

On considère une suite réelle $M = (M_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant les trois conditions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n > 0 \qquad \text{(IV.1)}$$

$$M_0 = 1 \qquad \text{(IV.2)}$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1} \qquad \text{(IV.3)}$$

On note $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ pour lesquelles il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ (dépendantes de f) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n.$$

L'ensemble $\mathcal{C}(M)$ est dit classe associée à la suite M.
La classe $\mathcal{C}(M)$ est dite quasi-analytique si

$$\forall f \in \mathcal{C}(M) \qquad (\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0) \Rightarrow f = 0.$$

IV.A – Quelques propriétés d'une classe

IV.A.1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(M)$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ appartient aussi à $\mathcal{C}(M)$.

IV.A.2) Vérifier que $\mathcal{C}(M)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

IV.A.3)

a) Montrer que pour tous n, $k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$, on a $M_k M_{n-k} \leqslant M_n$. On pourra étudier, pour p fixé, la monotonie de la suite $(M_n/M_{n-p})_{n\geqslant p}$.

b) En déduire que le produit de deux éléments quelconques de $\mathcal{C}(M)$ est un élément de $\mathcal{C}(M)$.

IV.B – Un exemple de classe quasi-analytique

On note U la suite définie par $U_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.B.1) Montrer que la suite U vérifie les conditions **IV.1**, **IV.2** et **IV.3**.

IV.B.2) Soit $f \in \mathcal{C}(U)$; on fixe $A > 0$, $B > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant AB^n n!$$

a) Dans cette question et la suivante, on suppose que le réel α vérifie $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(\alpha) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \int_\alpha^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2B} \Rightarrow f(x) = 0$.

c) Montrer que $\mathcal{C}(U)$ est une classe quasi-analytique.

IV.C –

IV.C.1) Montrer que si $\mathcal{C}(M)$ est quasi-analytique, alors $\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{W} = \{0\}$.

IV.C.2) Montrer la réciproque ; on pourra montrer, lorsque $\mathcal{C}(M)$ n'est pas quasi-analytique, l'existence d'une fonction $g \neq 0$ dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, nulle sur $]-\infty, 0]$, puis considérer $h : x \mapsto g(x)g(c-x)$ pour un $c \in \mathbb{R}$ bien choisi.

IV.D –

On se donne une suite réelle $M = (M_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant les trois conditions **IV.1**, **IV.2** et **IV.3** et on considère les assertions :

$$\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{M_n}\right)^{1/n} \text{ converge} \qquad \text{(IV.4)}$$

$$\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{M_{n-1}}{M_n} \text{ converge} \qquad \text{(IV.5)}$$

$$\text{la classe } \mathcal{C}(M) \text{ n'est pas quasi-analytique} \qquad \text{(IV.6)}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\alpha_n = M_{n-1}/M_n$.

IV.D.1) Exprimer M_n en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et en déduire que **IV.4** $\Rightarrow$ **IV.5**.

IV.D.2) Démontrer en utilisant la **partie III** que **IV.5** $\Rightarrow$ **IV.6**.

On peut montrer à l'aide d'outils mathématiques plus élaborés que **IV.6** $\Rightarrow$ **IV.4**, *ce qui donne une caractérisation des classes quasi-analytiques. Ce résultat constitue une partie du théorème de Denjoy-Carleman.*

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématique 2

PC

2011

4 heures Calculatrices autorisées

Notations

- Dans tout le problème, n est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients réels.
- En particulier, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. Selon l'usage, on pourra librement identifier les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.
- On note $M_{i,j}$ le coefficient sur la i-ème ligne et j-ème colonne d'une matrice M.
- L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. En particulier, si $(V,W) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on pose

$$\langle V,W\rangle = \sum_{i=1}^{n} V_{i,1}W_{i,1} \qquad \text{et} \qquad \|V\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} V_{i,1}^2\right)^{1/2}$$

- La notation ${}^tM$ désigne la transposée d'une matrice M, $\mathrm{rg}(M)$ son rang et, lorsque M est carrée, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace. On rappelle que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$.
- On note également $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre n, $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant négatif.
- Par définition, une rotation est un automorphisme orthogonal de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

Objectif du problème

On se donne des vecteurs $X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_m$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on cherche à déterminer, si c'est possible, une rotation r de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$r(X_i) = Y_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

Cela revient à déterminer une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ réalisant

$$WX_i = Y_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

Sans hypothèse sur les vecteurs X_i et Y_i, une telle rotation n'a pas de raison d'exister, ni d'être unique. C'est pourquoi on s'intéressera plutôt, dans la suite, au problème plus faible suivant : trouver une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$, autrement dit telle qu'en un sens les WX_i soient « aussi proches que possible » des Y_i.

I Questions préliminaires

I.A – Généralités sur les matrices orthogonales

I.A.1) Quel est le déterminant d'une matrice de $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$? de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$? On justifiera les réponses.

I.A.2) $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ est-il un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

I.A.3) Montrer que les valeurs absolues des coefficients d'une matrice orthogonale sont inférieures ou égales à 1.

I.B – Un exemple numérique

Dans cette section, $n = m = 2$. On pose

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

On introduit les affixes respectives des vecteurs X_1, X_2, Y_1, Y_2 :

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

BY-NC-SA

I.B.1) Exprimer ces affixes sous forme trigonométrique puis simplifier pour tout réel θ la quantité

$$f(\theta) = |\beta_1 - e^{i\theta}\alpha_1|^2 + |\beta_2 - e^{i\theta}\alpha_2|^2$$

I.B.2) Déterminer les valeurs de θ qui minimisent $f(\theta)$. Illustrer le résultat par un dessin.

II Un problème d'optimisation

Dans cette partie, on fixe des éléments $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on se propose d'obtenir une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ et, dans certains cas, une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$.
Dans toute cette partie, on note X (respectivement Y) la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $X_1, \ldots, X_m$ (respectivement $Y_1, \ldots, Y_m$).

II.A – Un produit scalaire matriciel

II.A.1) Montrer que l'application

$$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}, \quad (M,N) \mapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On pose désormais

$$\langle M,N\rangle_F = \mathrm{tr}({}^tMN) \quad \text{et} \quad \|M\|_F = \langle M,M\rangle_F^{1/2}$$

II.A.2) Montrer que, pour toute matrice $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2 = \|WX - Y\|_F^2$$

II.A.3) Simplifier $\langle WM, WN\rangle_F$ et $\|WM\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(M,N) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$.

II.A.4) Simplifier aussi $\langle MW, NW\rangle_F$ et $\|MW\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $(M,N) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$.

II.B – Dans cette section, on suppose que $m = n$.

II.B.1) Calculer $\|W\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

II.B.2) Montrer que si une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.B.3) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C – Dans cette section, m et n ne sont plus supposés égaux.

II.C.1) Justifier l'existence d'une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\|WX - Y\|_F^2$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \|WX - Y\|_F^2 \leqslant \|ZX - Y\|_F^2$$

II.C.2) Montrer que les matrices $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\|WX - Y\|_F^2$ sont les matrices $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle WX, Y\rangle_F$.

II.C.3) Déterminer à l'aide de X et Y une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle WX, Y\rangle_F = \langle W, A\rangle_F$$

II.D – Dans cette section, Δ désigne une matrice diagonale d'ordre n à coefficients positifs.

II.D.1) Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta\rangle_F$.

II.D.2) On suppose de plus que les coefficients diagonaux de la matrice Δ vérifient :

$$\Delta_{1,1} \geqslant \ldots \geqslant \Delta_{r,r} > 0 \text{ et } \Delta_{i,i} = 0 \quad \text{pour } r+1 \leqslant i \leqslant n$$

(avec éventuellement $r = n$ dans le cas où tous les coefficients diagonaux de Δ sont non nuls). Déterminer toutes les matrices $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta\rangle_F$.

II.E – Dans cette section, on admet que A peut s'écrire sous la forme $Q\Delta({}^tP)$ avec $(Q,P) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des coefficients diagonaux vérifiant $\Delta_{1,1} \geqslant \ldots \geqslant \Delta_{n,n} \geqslant 0$. Ce résultat sera démontré dans la **partie III**.

II.E.1) Déterminer à l'aide de P et Q une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A\rangle_F$, et appartenant à $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det P \cdot \det Q > 0$.

II.E.2) Montrer que si $\det A > 0$, il existe une unique matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A\rangle_F$, au sens où

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}), \quad \langle W, A\rangle_F \geqslant \langle Z, A\rangle_F$$

BY-NC-SA

II.E.3) Dans cette question, on suppose que $\Delta_{n,n} = 0$. Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta \rangle_F$.

II.E.4) Dans cette question, on suppose que $\det A = 0$ et que $\det P \cdot \det Q < 0$. Déduire de la question précédente une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A \rangle_F$.

III Une décomposition matricielle

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat admis dans la partie précédente.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $r \geqslant 1$.

III.A – Soit $B = ({}^tM)M$.

III.A.1) Montrer que B est une matrice symétrique réelle. Que peut-on en déduire ?

III.A.2) Montrer que B est positive, c'est-à-dire que pour tout $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $({}^tV)BV \geqslant 0$. En déduire que les valeurs propres de B sont positives.

III.A.3) Montrer que $\ker B = \ker M$. En déduire que $\mathrm{rg}(B) = r$. (M étant une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose $\ker M = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0\}$.)

III.B – Dans la suite de cette partie, on note :

- f l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à M,
- g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à B,
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes ou non) de g rangées par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_p$$

- et enfin $(v_1, \ldots, v_p)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de g associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

III.B.1) On pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $u_i = \frac{1}{\mu_i} f(v_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Montrer que $(u_1, \ldots, u_r)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$.

III.B.2) Soit $\Delta = (\Delta_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice dont les seuls coefficients non nuls sont $\Delta_{1,1}, \ldots, \Delta_{r,r}$ qui valent $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telles que

$$M = Q\Delta P^{-1} = Q\Delta({}^tP)$$

IV Sur la trace des matrices orthogonales

Dans cette partie, on étudie la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, ce qui va permettre d'aboutir dans les cas laissés en suspens dans la **partie II** à une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$.

IV.A –

IV.A.1) Déterminer la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

IV.A.2) Soit E un espace vectoriel euclidien, et w un automorphisme orthogonal de E. Justifier que les seules valeurs propres possibles pour w sont 1 et -1.

IV.A.3) Montrer que -1 est valeur propre de toute matrice $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

IV.A.4) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E, stable par un automorphisme orthogonal w de E, alors l'orthogonal de F est aussi stable par w.

IV.A.5) Montrer que pour tout $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, il existe $P_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $W_1 \in \mathcal{O}_{n-1}^+(\mathbb{R})$ tels que

$$W = P_1 \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W_1 \end{pmatrix} ({}^tP_1)$$

où $0_{k,l}$ désigne la matrice nulle dans $\mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$.

IV.A.6) Conclure sur la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

IV.B – On rappelle que minimiser $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ revient à maximiser $\langle W, A \rangle_F$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une certaine matrice qui peut s'écrire sous la forme $Q\Delta({}^tP)$ avec $(P, Q) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, à coefficients diagonaux vérifiant

$$\Delta_{1,1} \geqslant \ldots \geqslant \Delta_{n,n} \geqslant 0$$

IV.B.1) Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta \rangle_F$ en commençant par écrire $\langle W', \Delta \rangle_F$ à l'aide de $\mathrm{tr}(W')$ et des coefficients $W'_{i,i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

IV.B.2) En déduire, lorsque $\det P \cdot \det Q < 0$, une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A \rangle_F$.

BY-NC-SA

V Calcul numérique

Dans cette partie, on étudie un algorithme permettant de calculer de manière approchée une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ pour certaines matrices Y.

V.A – Étude d'une suite de réels

On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels vérifiant :

$$x_0 > 0 \quad \text{et } x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2 + 3}{3x_k^2 + 1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

V.A.1) Écrire une instruction en Maple ou Mathematica permettant de calculer les trente premiers termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ telle que $x_0 = 0{,}1$.

V.A.2) Représenter graphiquement le comportement d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ pour un $x_0 > 0$ quelconque. On effectuera les calculs nécessaires à une représentation soignée.

V.A.3) Démontrer la convergence d'une telle suite et préciser sa limite.

V.B – Étude d'une suite de matrices

On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i. Z_0 est inversible ;

ii. $Z_{k+1} = Z_k({}^tZ_kZ_k + 3I_n)(3{}^tZ_kZ_k + I_n)^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n).

V.B.1) Montrer que pour toute matrice $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $3{}^tZZ + I_n$ est bien inversible.

V.B.2) Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. D'après la deuxième partie, Z_0 peut s'écrire sous la forme $QD({}^tP)$ avec $(Q, P) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{P}_k$ ainsi : « Z_k peut s'écrire sous la forme $QD_k({}^tP)$ avec D_k diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs ». Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

V.B.3) Déterminer la limite de la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

V.C – Une application

On fixe $X_1, \ldots, X_m$ des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on note X la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $X_1, \ldots, X_m$. On fixe également $W_0 \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, et on pose $Y_0 = W_0X$. On suppose de plus la matrice X de rang n.

V.C.1) Montrer qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ contenant Y_0 tel que pour tout $Y \in \mathcal{U}$, l'on ait $\det(Y({}^tX)) > 0$.

V.C.2) Dans le cas où $Y \in \mathcal{U}$, quelle valeur donner à Z_0 pour que la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ converge vers $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématique 1

TSI 2011

4 heures Calculatrices autorisées

Dans ce problème, on s'intéresse aux fonctions vérifiant le système de conditions suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x+1) + f(x) = \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où φ est une fonction décroissante sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{R}_+$, vérifiant la condition $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

Dans la première partie, on montre l'existence et l'unicité de f vérifiant le système (1). Dans les deux parties suivantes, on étudie des exemples.

I Existence et unicité de la solution du système (1)

I.A – Unicité

Soient f et g deux solutions du système (1).

I.A.1) Soit $x \in I$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x + n \in I$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = g(x) + (-1)^n \left(f(x+n) - g(x+n)\right)$$

I.A.2) En déduire, par un passage à la limite, que $f = g$ sur I.

I.B – Existence

I.B.1) Soit $x \in I$.

Montrer que la série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \varphi(x+k)$ converge.

I.B.2) On pose, pour x dans I, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi(x+k)$.

a) Vérifier que :

$$\forall x \in I, \quad f(x+1) + f(x) = \varphi(x)$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) - \varphi(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$$

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et conclure.

II Premier exemple

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Un polynôme sera noté indifféremment P ou $P(X)$.

II.A – Étude d'une application linéaire

Soit θ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \theta(P)(X) = \frac{1}{e} P(X+1) + P(X)$$

où e désigne $\exp(1)$.

II.A.1) Montrer que θ réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

II.A.2) Vérifier que θ conserve le degré, c'est-à-dire vérifie, pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, $\deg\left(\theta(P)\right) = \deg(P)$.

BY-NC-SA

II.A.3) En déduire que θ est injective.

II.A.4) Montrer que la restriction de θ à $\mathbb{R}_n[X]$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ noté θ_n.

II.A.5) Montrer que θ_n est bijectif.

II.A.6) En déduire que, pour tout Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\frac{1}{e}P(X+1)+P(X)=Q(X)$$

II.A.7) Montrer que, si la fonction φ est de la forme $x \mapsto Q(x)\exp(-x)$ où Q est dans $\mathbb{R}[X]$, la solution du système (1) est de la forme $x \mapsto P(x)\exp(-x)$ où P vérifie $\theta(P)=Q$.

II.B – Exemple

Jusqu'à la fin de cette partie, on s'intéresse à l'unique polynôme P_n tel que :

$$\frac{1}{e}P_n(X+1)+P_n(X)=X^n$$

c'est-à-dire tel que $\theta(P_n)=X^n$ (où $n \in \mathbb{N}$).

II.B.1) Soit n dans $\mathbb{N}^*$

a) Montrer que :

$$P_n'=nP_{n-1}$$

b) Exprimer $P_n^{(k)}$ en fonction de P_{n-k} pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

II.B.2) En déduire, en utilisant la formule de Taylor, que :

$$P_n(X+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(X)$$

II.B.3) Montrer que :

$$P_n(X)=\frac{e}{e+1}X^n-\frac{1}{e+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(X)$$

II.B.4) Écrire un algorithme en français permettant de calculer $P_n(x)$, n et x étant donnés par l'opérateur. Pour cet algorithme, on suppose l'existence d'une fonction `binomial` telle que `binomial(n,k)` renvoie la valeur $\binom{n}{k}$.

III Deuxième exemple

Jusqu'à la fin de ce problème on prendra $I=]-1,+\infty[$ et $\varphi(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

III.A – Écriture intégrale de la solution

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$$

avec la convention $t^0=1$.

III.A.1) Montrer que f est bien définie sur I.

III.A.2) Montrer que :

$$\forall x \in I,\quad f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x+1}$$

III.A.3) Montrer que :

$$\forall x \in I,\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x+1}$$

III.A.4) En déduire que la solution du système (1) est la fonction f définie par :

$$\forall x \in I,\quad f(x)=\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$$

BY-NC-SA

III.B – Calcul de quelques valeurs et équivalents

III.B.1) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$$

III.B.2) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$$

III.B.3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k}$$

III.B.4) Soit x dans I et soit N dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{x+k+1} \right| \leqslant \frac{1}{x+N+2}$$

b) En déduire un algorithme de calcul de $f(x)$ à ε près, x et ε étant donnés par l'opérateur.

c) Donner $f(1{,}5)$ à 10^{-1} près.

III.B.5) Montrer, sans dérivation, que la fonction f est décroissante sur I.

III.B.6) En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \frac{1}{2(x+1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$$

III.B.7) Donner, en le justifiant, un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

III.B.8) La série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est-elle convergente ?

III.C – Étude de la fonction f

III.C.1) En utilisant l'expression intégrale de f, montrer que f est continue sur I.

III.C.2) En déduire, à l'aide des conditions (**1**), la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1 à droite ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de -1 à droite.

III.C.3)

a) Montrer que, pour tout x dans I et pour tout k dans $\mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^x (\ln t)^k$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b) Soit x dans I, on pose $I_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x (\ln t)^k \, dt$.

Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(I_k(x))_{k \geqslant 0}$ et calculer $I_k(x)$ pour k dans $\mathbb{N}$.

III.C.4) On pose, pour k dans $\mathbb{N}$ et x dans I,

$$\varphi_k(t, x) = \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x$$

a) Montrer que, pour tout x dans I, $t \mapsto \varphi_k(t, x)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur I et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x \, dt$$

BY-NC-SA

III.C.5)

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$.

b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j+1)^{k+1}}$$

III.C.6)

a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire vérifiant :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad h(t) = t$$

Montrer que h est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et déterminer les coefficients de Fourier réels de h.

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

c) Calculer $f'(0)$ et donner l'équation de la tangente à l'origine pour la courbe représentant f.

III.C.7) Donner l'allure de la courbe représentant f dans un repère orthonormé.

III.C.8)

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n!}{2} \leqslant |f^{(n)}(0)| \leqslant n!$$

b) En déduire que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence strictement positif et le déterminer.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématique 2

TSI

4 heures Calculatrices autorisées

2011

Notations et rappels

- Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On notera $L(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$ formé des automorphismes de E.
- À tout $f \in L(E)$, on associe sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ choisie dans E.
  On rappelle que l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de $L(E)$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel, noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
  De la même façon, $GL(E)$ s'identifie, moyennant l'isomorphisme précédent, à l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n qui sont inversibles.
  On rappelle également que $GL(E)$ (respectivement $GL_n(\mathbb{C})$), muni de la composition des applications (respectivement muni du produit des matrices), possède une structure de groupe.
- Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$. On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures.
  Soit $f \in L(E)$. On sera amené à utiliser la propriété (T) suivante :
  $$\text{(T) : il existe une base } \mathcal{B}' \text{ de } E \text{ telle que } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$$
- On rappelle que, par convention : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^0 = I$ (matrice identité).
- Soit $f \in L(E)$. Alors, f admet n valeurs propres en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.
- On rappelle enfin que l'exponentielle d'un nombre complexe z peut être noté e^z ou $\exp z$ et que, pour tout nombre complexe z, $\exp z \neq 0$.

I Préliminaires : endomorphismes nilpotents, trace d'un endomorphisme

I.A – Soit $f \in L(E)$.

I.A.1) Montrer que f est injectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

I.A.2) Montrer que $f \in GL(E)$ si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

I.A.3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de M.

I.B – Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera dite nilpotente s'il existe un entier strictement positif k tel que : $N^k = 0$ (matrice nulle).

On note $k(N)$ le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété et on l'appelle « indice de nilpotence de N ».

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.B.1) Soit N la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $N \in \mathcal{N}_3(\mathbb{C})$ puis déterminer $k(N)$.

I.B.2) Soient $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et M une matrice semblable à N.

a) Montrer que, pour tout entier naturel p, M^p et N^p sont semblables.

b) En déduire que, si N est nilpotente, M l'est aussi et $k(M) = k(N)$.

I.B.3) Soit $f \in L(E)$. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est également nilpotente et de même indice de nilpotence que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On dira alors que f est nilpotent et on notera $k(f)$ l'indice de nilpotence de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ qui sera appelé aussi indice de nilpotence de f.

I.B.4) Soient $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et n_{ij} son terme général.

On suppose que : $\forall i \in [\![1, n]\!], n_{ii} = 0$.

On note $n_{ij}^{(k)}$ le terme général de la matrice N^k avec $k \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et que $n_{ij}^{(2)} = 0$ si $j \leqslant i + 1$.

BY-NC-SA

b) Montrer, plus généralement, que $N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ et que $n_{ij}^{(k)} = 0$ si $j \leqslant i + k - 1$.

c) En déduire que $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

I.B.5) Soient $f \in L(E)$ et $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ la matrice de f dans une base appropriée $\mathcal{B}$ de E donnée par la propriété (T) rappelée en préliminaire.

a) En explicitant le polynôme caractéristique de N, déterminer les valeurs propres de f en fonction des termes diagonaux de N.

b) Montrer que f est nilpotent si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

I.B.6) Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si tous ses termes diagonaux sont nuls.

I.C – Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que la trace de A est le nombre complexe $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

I.C.1) Soit $f \in L(E)$.

Montrer que le nombre complexe $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ dans E.

On appelle « trace de l'endomorphisme f » ce nombre complexe, noté $\mathrm{Tr}(f)$.

Ainsi on a, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

I.C.2) Soit $f \in L(E)$. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, les valeurs propres (éventuellement égales) de f.

Montrer, à l'aide de la **question I.B.5 a**, que :

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

I.C.3) On considère le cas $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Montrer que A est soit diagonalisable, soit nilpotente.

I.C.4) A-t-on le même résultat lorsque $n = 3$?

II Exponentielle d'un endomorphisme

Soit $f \in L(E)$.

II.A – On suppose, tout d'abord, f diagonalisable, et on note $\mathcal{B}_p = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On définit alors l'endomorphisme $\exp f$ par l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}_p$ en posant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (\exp f)(e_i) = (\exp \lambda_i) e_i$$

II.A.1)

a) Représenter la matrice de $\exp f$ sur la base $\mathcal{B}_p$.

b) Montrer que $\exp f$ appartient à $GL(E)$.

Cet endomorphisme est appelé « exponentielle de l'endomorphisme f ». On admet qu'il ne dépend que de f et pas de la base de vecteurs propres de f utilisée pour le définir.

Si D est une matrice diagonale de termes diagonaux $\mu_1, \ldots, \mu_n$, on note $\exp D$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\exp \mu_1, \ldots, \exp \mu_n$.

II.A.2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M est diagonalisable.

Soient P_1, P_2 deux matrices inversibles et D_1, D_2 deux matrices diagonales telles que :

$$M = P_1 D_1 P_1^{-1} = P_2 D_2 P_2^{-1}$$

Montrer que $P_1(\exp D_1)P_1^{-1} = P_2(\exp D_2)P_2^{-1}$.

On appellera exponentielle de la matrice M, la matrice notée $\exp M$ égale à $P(\exp D)P^{-1}$ où (P, D) est un couple de matrices utilisé pour diagonaliser M.

II.B – On suppose maintenant que f est nilpotent, d'indice de nilpotence $k(f)$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, selon la propriété (T).

On pose alors :

$$\begin{cases} \exp f = \displaystyle\sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{f^p}{p!} & \text{où } f^0 = \text{identité de E} \\ \exp M = \displaystyle\sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{M^p}{p!} \end{cases}$$

BY-NC-SA

II.B.1) Déterminer les termes diagonaux de la matrice $\exp M$.

II.B.2) En déduire l'ensemble des valeurs propres de $\exp f$ puis montrer que $\exp f \in GL(E)$.

L'endomorphisme $\exp f$ est encore appelé l'exponentielle de f et la matrice $\exp M$ l'exponentielle de M.

II.C – On suppose enfin que f satisfait à la propriété (P) suivante :

$$(\mathrm{P}) : \exists (d,g) \in (L(E))^2,\ d \text{ diagonalisable, } g \text{ nilpotent, } d\circ g = g\circ d \,/\, f = d+g$$

On admettra que, si f satisfait à (P), alors le couple (d,g) donné par (P) est unique.

II.C.1)

a) Montrer que : $\exp d \circ \exp g = \exp g \circ \exp d$.

On pose alors : $\exp f = \exp d \circ \exp g$ et on l'appelle encore l'exponentielle de f.

On désigne par $\Gamma_n(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$ formé des endomorphismes f satisfaisant à (P).

De même, on désigne par $\Gamma_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices M qui peuvent s'écrire $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.

b) Montrer que, pour toute matrice M de $\Gamma_n(\mathbb{C})$, le couple (D,N) associé est unique.

On pose $\exp M = \exp D \exp N$ et on l'appelle l'exponentielle de M.

II.C.2) Soient $M \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$.

Démontrer que $PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})$ et que $\exp(PMP^{-1}) = P(\exp M)P^{-1}$.

On a ainsi défini deux applications $\exp : \Gamma_n(E) \longrightarrow GL(E)$ et $\exp : \Gamma_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Notre but est maintenant d'étudier un peu plus précisément ces applications dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

III Le cas $n = 2$

On suppose dans toute cette partie que E désigne un $\mathbb{C}$ espace-vectoriel de dimension 2.

III.A – Soient $f \in L(E)$, λ et μ ses valeurs propres, E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. On suppose f non diagonalisable.

III.A.1) Montrer que $\lambda = \mu$ et que $\dim E_\lambda = 1$.

Montrer, de plus, que $(f - \lambda Id_E)^2 = 0$. (On pourra utiliser la **question I.B.5 a**).

III.A.2) Soient $v \in E$ un vecteur n'appartenant pas à E_λ et $u = f(v) - \lambda v$.

Montrer que $u \in E_\lambda \backslash \{0\}$ et que $\mathcal{B} = (u,v)$ est une base de E. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

III.B – Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on définit les matrices suivantes :

$$D(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

On définit enfin le sous-ensemble suivant de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$J_2(\mathbb{C}) = \left\{ D(a,b)\,,\ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\} \cup \left\{ M(a)\,,\ a \in \mathbb{C} \right\}$$

Montrer que tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$.

III.C – Montrer que $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$ puis calculer $\exp D(a,b)$ et $\exp M(a)$ pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

III.D – Montrer que $\Gamma_2(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On admettra de même que $\Gamma_2(E) = L(E)$.

L'application exponentielle est ainsi une application de $L(E)$ dans $GL(E)$.

III.E –

III.E.1) Soient θ un réel non nul et $A(\theta)$ la matrice définie par :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\exp A(\theta)$.

III.E.2) L'application $\exp : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est-elle injective ?

III.E.3) En utilisant la **question III.C**, montrer que toute matrice de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est semblable à l'image par l'application exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$.

III.E.4) En déduire, en utilisant les questions **II.C.2**, **III.B** et **III.E.3**, que l'application $\exp : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est surjective.

III.F – Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,,\ \det\left(\exp M\right) = \exp\left(\mathrm{Tr}(M)\right)$.

III.G – Soient $SL_2(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$ et $L_0(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formé des matrices de trace nulle.

III.G.1) Montrer que $SL_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ et que :

BY-NC-SA

$$\forall M \in L_0(\mathbb{C})\,,\ \exp M \in SL_2(\mathbb{C})$$

On considère maintenant la restriction $\widetilde{\exp} : L_0(\mathbb{C}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$.

III.G.2) Montrer, à l'aide de **I.C.3** et **III.B**, que tout élément de $L_0(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de la forme :

$$D(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{C} \qquad \text{ou} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III.G.3) Soit N' la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$N' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $N' \in SL_2(\mathbb{C})$ et que N' n'appartient pas à l'image de l'application $\widetilde{\exp}$.
En déduire que $\widetilde{\exp}$ n'est ni injective, ni surjective.

IV Le cas $n = 3$

Dans toute cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3.
L'objectif est ici de montrer que l'on a encore, dans ce cas, les égalités : $L(E) = \Gamma_3(E)$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{C}) = \Gamma_3(\mathbb{C})$.
Soient $f \in L(E)$, λ, μ et ν ses valeurs propres.

IV.A – On suppose que λ, μ et ν sont trois valeurs propres distinctes.
Montrer que $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.B – On suppose que $\lambda = \mu = \nu$.

IV.B.1) Montrer que $f - \lambda Id_E$ est nilpotent.

IV.B.2) Montrer que $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.C – On suppose que $\lambda = \mu$, $\mu \neq \nu$.

IV.C.1) Justifier l'existence de trois complexes a, b, c et d'une base (e_1, e_2, e_3) de E tels qu'on ait :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \lambda e_1 \\ f(e_2) &= a e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) &= b e_1 + c e_2 + \nu e_3 \end{aligned}$$

IV.C.2) Étant donnés deux complexes α et β, on pose $e'_3 = e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$.
Montrer que (e_1, e_2, e'_3) est une base de E.

IV.C.3) Montrer qu'on peut choisir α et β de sorte que $f(e'_3) = \nu e'_3$.

IV.C.4) Représenter la matrice M de f sur la base (e_1, e_2, e'_3) ainsi obtenue.

IV.C.5) Montrer que $M \in \Gamma_3(\mathbb{C})$ et $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.D – Montrer que $\Gamma_3(E) = L(E)$.
On admettra de même que $\Gamma_3(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. L'application exponentielle est ainsi une application de $L(E)$ dans $GL(E)$.

IV.E – Soient θ un réel non nul et $R(\theta) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV.E.1) Calculer $\exp R(\theta)$.

IV.E.2) En déduire que l'application $\exp : L(E) \longrightarrow GL(E)$ n'est pas injective.

N.B : On pourrait montrer, par un procédé analogue à celui utilisé dans le cas $n = 2$, que $\exp : L(E) \longrightarrow GL(E)$ est encore surjective dans le cas $n = 3$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2012

Notations

On note :

$C(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$C_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction f de $C_b(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit f une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le support de f est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. On dit que f est à support compact si son support est un compact de $\mathbb{R}$; en d'autres termes, f est à support compact si et seulement s'il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Par définition, une approximation de l'unité est une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R} \ ; \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \ ; \\ \forall \varepsilon > 0, & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0. \end{cases}$$

I Produit de convolution

Soit f, $g \in C(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g.

I.A – Généralités

I.A.1) Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et donner une majoration de $\|f * g\|_\infty$ pouvant faire intervenir $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

a) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$;

b) f, $g \in L^2(\mathbb{R})$.

I.A.2) Soient f, $g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f * g(x)$ soit défini pour tout réel x. Montrer que $f * g = g * f$.

I.A.3) Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact.

I.B – Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction h de $C(\mathbb{R})$ et tout réel α, on définit la fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans cette **sous-partie I.B**, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

I.B.1) Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

I.B.2) Pour tout réel α, montrer que $T_\alpha(f * g) = (T_\alpha(f)) * g$.

I.B.3) Pour tout réel α, montrer que $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$.

BY-NC-SA

I.B.4) En déduire que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas où f est à support compact.

I.B.5) Montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas général.

I.C – Continuité, dérivabilité, séries de Fourier

I.C.1) On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f * g$ est continue.

b) Montrer que si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.2) Soit k un entier naturel non nul. On suppose que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k, sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée d'ordre k.

I.C.3) Dans cette **question I.C.3**, on suppose que g est continue, 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux.

a) Énoncer sans démonstration le théorème sur les séries de Fourier applicable aux fonctions continues, 2π-périodiques et de classe C^1 par morceaux.

b) Montrer que $f * g$ est 2π-périodique et est somme de sa série de Fourier. Expliciter les coefficients de Fourier de $f * g$ à l'aide des coefficients de Fourier de g et d'intégrales faisant intervenir f.

I.D – Approximation de l'unité

Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$ et soit (δ_n) une suite de fonctions approximation de l'unité.

I.D.1) Montrer que la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Montrer que si f est à support compact, alors la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.3) Pour tout entier naturel n, on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$h_n(t) = \frac{\left(1 - t^2\right)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^n \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

b) Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

c) En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

I.D.4) Existe-t-il une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on ait $f * g = f$?

II Transformée de Fourier

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\hat{f}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$

II.A – Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\hat{f}$ appartient à $C_b(\mathbb{R})$.

II.B – Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soit f, $g \in L^1(\mathbb{R})$.

II.B.1) On suppose que g est bornée.

a) Montrer que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f * g$ en fonction de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g$.

b) Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

II.B.2) Un contre-exemple

Montrer qu'il existe deux fonctions f et g dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g(0)$ ne soit pas défini.

BY-NC-SA

II.C – Sinus cardinal

On définit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction k_n par

$$\begin{cases} k_n(x) = 1 - \dfrac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leqslant n\,; \\ k_n(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.C.1) Exprimer la transformée de Fourier $\hat{k}_n(x)$ à l'aide de la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0\,; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

II.C.2) Justifier que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

On admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = \pi$. On pose $K_n = \dfrac{1}{2\pi}\hat{k}_n$.

II.C.3) Montrer que la suite de fonctions $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité.

II.D – Inversion de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} k_n(x)\hat{f}(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x.$$

II.D.1) Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, montrer que $I_n(t) = (f * K_n)(t)$.

II.D.2) En déduire, pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x.$$

III Convolution et codimension finie

Dans cette partie, on suppose que $g \in C_b(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la codimension dans $L^1(\mathbb{R})$ du sous-espace vectoriel

$$N_g = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f * g = 0\}.$$

On note V_g l'espace vectoriel engendré par les fonctions $T_\alpha(g)$:

$$V_g = \mathrm{Vect}\,(T_\alpha(g))_{\alpha\in\mathbb{R}}$$

où, comme au **I.B**, on note $T_\alpha(g)$ la fonction $x \mapsto g(x-\alpha)$.

III.A – À toute fonction g de $C(\mathbb{R})$, on associe la forme linéaire φ_g sur $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(-t)\mathrm{d}t.$$

Soit $(g_1, \ldots, g_p)$ une famille d'éléments de $C_b(\mathbb{R})$.

III.A.1) Montrer que la famille $(g_1, \ldots, g_p)$ est libre si et seulement si la famille $(\varphi_{g_1}, \ldots, \varphi_{g_p})$ est libre.

III.A.2) Soit E un espace vectoriel de dimension infinie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de formes linéaires sur E. On note

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f_n).$$

Montrer que la codimension de K dans E est égale au rang de la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace dual E^* (on commencera par le cas où ce rang est fini).

III.A.3) Montrer que la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$ est égale à la dimension de V_g.

III.A.4)

a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et soit g la fonction définie par $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$.

b) Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe une fonction g de $C_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension n dans $L^1(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

III.B – Hypothèse A

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On dit que g vérifie l'hypothèse A si g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, bornée et dont les fonctions dérivées à tout ordre sont bornées sur $\mathbb{R}$.

III.B.1) Montrer que, si N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$ et si g vérifie l'hypothèse A, alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

III.B.2) En déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant l'hypothèse A et telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$.

III.C – Cas général

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On suppose que N_g est de codimension finie n dans $L^1(\mathbb{R})$.

III.C.1) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et des fonctions $m_1, \ldots, m_n$ d'une variable réelle telles que, pour tout réel α,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g).$$

III.C.2) Soit F un sous-espace de dimension finie, notée p, de $C(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in C(\mathbb{R})$ et pour tout réel x, on note $e_x(f) = f(x)$.

a) Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_p$ tels que $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_p})$ soit une base de l'espace dual F^*.

b) Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille d'éléments de F, montrer que $\mathrm{Det}(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est non nul si et seulement si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F.

III.C.3) En appliquant la question **III.C.2**) à V_g, montrer que si g est de classe C^k alors les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe C^k.

III.C.4) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, $V_{h_r * g}$ est de dimension finie (les fonctions h_r sont celles de la **question I.D.3**).

III.C.5) Montrer que pour r assez grand la dimension de $V_{h_r * g}$ est égale à celle de V_g.

III.C.6) En déduire que les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe C^∞.

III.C.7) Déterminer l'ensemble des fonctions $g \in C_b(\mathbb{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2012

Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matrices dites de Hankel).

Il est attendu des candidat(e)s qu'ils fassent preuve de qualités de rédaction, de clarté et de présentation.

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.

On note σ l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ qui à tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associe $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $y_n = x_{n+1}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré vaut 1.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si M est une matrice carrée, on note ${}^tM$ sa transposée et $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels.

Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note Id l'endomorphisme identité de E.

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, et tout $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on note $A(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}$).

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, l'application $A \mapsto A(f)$ est alors un *morphisme d'algèbres* de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Rappelons que cela signifie que, pour tous A, B de $\mathbb{K}[X]$ et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$, on a :

- $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$;
- si $A = 1$, alors $A(f) = \mathrm{Id}$;
- $(AB)(f) = A(f) \circ B(f) = B(f) \circ A(f)$.

Cas particulier (utile dans la suite du problème) :

- Si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = \sigma$ et $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors $A(\sigma) = \sum_{k=0}^{p} a_k \sigma^k$.
- Pour tout x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $y = A(\sigma)(x)$ est donc la suite de terme général $y_n = \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k}$.

I Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel.

On dit qu'un élément x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéaire* (en abrégé une SRL) d'ordre $p \geqslant 0$ s'il existe un polynôme $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degré p, tel que $A(\sigma)(x)$ soit la suite nulle, c'est-à-dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k} = a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \tag{I.1}$$

On dit que la **relation I.1** (dans laquelle, rappelons-le, a_p est non nul) est une relation de récurrence linéaire *d'ordre* p, dont A est un *polynôme caractéristique*.

L'ensemble des suites x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui obéissent à **I.1** est noté $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quel que soit leur ordre (autrement dit, $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ est la réunion des $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ pour tous les polynômes A non nuls dans $\mathbb{K}[X]$).

I.A – Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.

BY-NC-SA

Montrer que l'ensemble J_x des polynômes A tels que $A(\sigma)(x) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$.

On rappelle qu'il en résulte deux choses :
- d'une part, il existe dans J_x un unique polynôme unitaire B de degré minimal ;
- d'autre part, les éléments de J_x sont les multiples de B.

Par définition, on dit que B est le *polynôme minimal* de la suite x, que le degré de B est l'*ordre minimal* de x, et que la relation $B(\sigma)(x) = 0$ est la *relation de récurrence minimale* de x.

I.B – Quelques exemples

I.B.1) Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?

Quelles sont les suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont le polynôme minimal est $(X-1)^2$?

I.B.2) On considère la suite x définie par $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$.

Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x.

I.C – L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, de degré $p \geqslant 0$, que sans perdre de généralité on suppose unitaire.

I.C.1) Prouver que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et qu'il est stable par σ (on ne demande pas ici de déterminer une base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$, car c'est l'objet des questions suivantes).

I.C.2) Déterminer $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand $A = X^p$ (avec $p \geqslant 1$) et en donner une base.

I.C.3) Dans cette question, on suppose $p \geqslant 1$ et $A = (X-\lambda)^p$, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.

On note $E_A(\mathbb{K})$ l'ensemble des x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = Q(n)\lambda^n$, où Q est dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.

a) Montrer que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on précisera la dimension.

b) Montrer l'égalité $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = E_A(\mathbb{K})$.

I.D – Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Plus précisément, on note $A = X^{m_0} \prod_{k=1}^{d} (X-\lambda_k)^{m_k}$, où :
- les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ sont les racines *non nulles distinctes éventuelles* de A dans $\mathbb{K}$, et $m_1, m_2, \ldots, m_d$ sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient que $d = 0$ et que $\prod_{k=1}^{d} (X-\lambda_k)^{m_k} = 1$;
- l'entier m_0 est la multiplicité de 0 comme racine *éventuelle* de A. Si 0 n'est *pas* racine de A, on adopte la convention $m_0 = 0$.

Avec ces notations, on a $\sum_{k=0}^{d} m_k = \deg A = p$.

En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \geqslant m_0,\ x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\,\lambda_k^n$$

où, pour tout k de $\{1, \ldots, d\}$, Q_k est dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg Q_k < m_k$.

Remarque : si $d = 0$, la somme $\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\,\lambda_k^n$ est par convention égale à 0.

II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit x dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note $H_n(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple $H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.

On identifie toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice-colonne qui lui correspond.

BY-NC-SA

II.A – Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre *minimal* $p \geqslant 1$ et de polynôme minimal B.

II.A.1) Montrer que la famille $(\sigma^k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le rang de la famille $(\sigma^k(x))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

II.A.2) Montrer que si $n \geqslant p$, l'application $\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n \\ v \mapsto (v_0, \ldots, v_{n-1}) \end{cases}$ est injective.

En déduire que si $n \geqslant p$, alors $\operatorname{rang}(H_n(x)) = p$.

Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si $p = 0$ (car la suite x et les matrices $H_n(x)$ sont nulles).

II.B – Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre $m \geqslant 1$. Soit $p = \operatorname{rang}(H_m(x))$.

II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de $H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire $(b_0, \ldots, b_{p-1}, 1)$, où $b_0, \ldots, b_{p-1}$ sont dans $\mathbb{K}$.

II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1X + b_0$.

II.C – Étude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+4} = x_{n+3} - 2\,x_{n+1}$$

II.C.1) Dans le langage informatique de votre choix (que vous préciserez), écrire une procédure (ou fonction) de paramètre un entier naturel n et renvoyant la liste (ou la séquence, ou le vecteur) des x_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

II.C.2) Préciser le rang de $H_n(x)$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et indiquer l'ordre minimal de la suite x.

II.C.3) Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.

II.C.4) Donner une formule permettant pour tout $n \geqslant 1$ de calculer directement x_n.

II.C.5) On décide de modifier *uniquement* la valeur de x_0, en posant cette fois $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions **II.C.2** et **II.C.3**.

III Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On note $p = [(n+1)/2]$ la partie entière de $(n+1)/2$.

On a donc $n = 2p$ si n est pair, et $n = 2p-1$ si n est impair.

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

Un élément de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est dit *ordonné* s'il vérifie si $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hankel* s'il existe $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que pour tous i et j de $\{1, \ldots, n\}$, $m_{i,j} = a_{i+j-2}$. Une telle matrice est notée $M = H(a)$.

III.A – Préliminaires

III.A.1) Montrer que si M est une matrice de Hankel de taille n alors elle admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

On note alors $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le *spectre ordonné* de la matrice M, c'est-à-dire le n-uplet ordonné des valeurs propres de M.

On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un n-uplet ordonné de réels peut-il être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n ?

III.A.2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors le n-uplet $(\lambda, \ldots, \lambda)$ n'est pas le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

III.B – Une première condition nécessaire

Soit $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$. On note $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

On définit deux vecteurs $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i-1}\; a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2i-1}} & \text{si } i \in \{1, \ldots, p\} \\ v_i = \sqrt{2n-2i+1}\; a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} & \text{si } i \in \{p+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

On pose enfin $K_n = n - \|w\|^2$.

BY-NC-SA

III.B.1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k}\qquad\text{et}\qquad\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,a_k^2+\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)\,a_k^2$$

III.B.2) Montrer que $\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ et $\|v\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$.

III.B.3) Montrer que $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\langle v,w\rangle^2$ et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2\geqslant K_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \tag{III.1}$$

III.B.4) Vérifier que si $n=3$, la **condition III.1** équivaut à : $2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\geqslant 3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)$.

III.C – D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on *admet* le résultat suivant : si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont $\alpha_1\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n$ et $\beta_1\geqslant\ldots\geqslant\beta_n$ alors

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_{n+1-i}\leqslant\operatorname{tr}(AB)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i \tag{III.2}$$

Soit $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{1,2p-1}=1\qquad b_{2p-1,1}=1\qquad b_{p,p}=-2$$

tous les autres coefficients de B étant nuls (on rappelle que p désigne la partie entière de $(n+1)/2$).

III.C.1) Déterminer le spectre ordonné de la matrice B.

III.C.2) Soit $a=(a_0,\ldots,a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M=H(a)$.
On note $\mathrm{Spo}(M)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.
Établir que

$$\lambda_1-\lambda_{n-1}-2\lambda_n\geqslant 0\qquad\text{et}\qquad 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_n\geqslant 0 \tag{III.3}$$

III.D – Cas $n=3$

Soient λ_1, λ_2, λ_3 trois réels vérifiant

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3\qquad\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3\geqslant 0\qquad 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3\geqslant 0$$

On définit la matrice de Hankel $M=H(a,b,c,b,a)=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&b\\c&b&a\end{pmatrix}$, où a, b, c sont réels.

III.D.1) Calculer les valeurs propres de M (sans chercher à les ordonner).

III.D.2) Expliciter a, b, c (avec $b\geqslant 0$) en fonction de $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, de telle sorte que $\mathrm{Spo}(M)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

III.D.3) Que peut-on déduire du résultat précédent, quant à la **condition III.3** dans le cas $n=3$?
En utilisant un triplet ordonné $(\lambda,1,1)$, montrer que pour $n=3$, la **condition III.1** n'est pas suffisante.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — PSI — 2012

4 heures — Calculatrices autorisées

– Dans le problème λ désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et non majorée.
– Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
– On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
– On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définie en **I.A**, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur.

I Préliminaires, définition de la transformation L

I.A – Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles E et E'?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$$

I.B – Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

I.C – Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E.

II Exemples dans le cas de f positive

II.A – Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B – Dans les trois cas suivants, déterminer E.

II.B.1) $f(t) = \lambda'(t)$, avec λ supposée de classe C^1.

II.B.2) $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

II.B.3) $f(t) = \dfrac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C – Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

II.C.1) Déterminer E. Que vaut $Lf(0)$?

II.C.2) Prouver que Lf est dérivable.

II.C.3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait $Lf(x) - (Lf)'(x) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}$.

II.C.4) On note $g(x) = e^{-x}Lf(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - A\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

II.C.5) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

III Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} - 1 + \dfrac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

III.A – Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

On note encore f le prolongement obtenu.

III.B – Déterminer E.

III.C – À l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

III.D – Est-ce que $Lf(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

BY-NC-SA

IV Généralités dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

IV.A – Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$), alors Lf est de classe C^∞ sur $]\alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV.B – Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E, E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV.C – ***Comportement en l'infini***

On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$$

IV.C.1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx} \, dt = O(x^{-n-2})$$

IV.C.2) En déduire que lorsque x tend vers l'infini, on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D – ***Comportement en 0***

On suppose ici que f admet une limite finie l en $+\infty$.

IV.D.1) Montrer que E contient $\mathbb{R}^{+*}$.

IV.D.2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers l en 0^+.

V Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, f étant prolongée par continuité en 0.

V.A – Montrer que E ne contient pas 0.

V.B – Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V.C – Montrer que E' contient 0.

V.D – Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V.E – En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

V.F – On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \, dt$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V.G – Que vaut $Lf(0)$?

VI Injectivité dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI.A – Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^n g(t) \, dt = 0$$

VI.A.1) Que dire de $\displaystyle\int_0^1 P(t)g(t) \, dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

VI.A.2) En déduire que g est l'application nulle.

VI.B – Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$.

On pose $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-xu} f(u) \, du$ pour tout $t \geqslant 0$.

VI.B.1) Montrer que $Lf(x + a) = a \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} h(t) \, dt$.

BY-NC-SA

VI.B.2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x+na) = 0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln u}{a}\right)\,du$ converge et qu'elle est nulle.

VI.B.3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI.C – Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

VII Étude en la borne inférieure de E

VII.A – ***Cas positif***

On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure.

VII.A.1) Montrer que si Lf est bornée sur E, alors $\alpha \in E$.

VII.A.2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII.B – Dans cette question, $f(t) = \cos t$ et $\lambda(t) = \ln(1+t)$.

VII.B.1) Déterminer E.

VII.B.2) Déterminer E'.

VII.B.3) Montrer que Lf admet une limite en α, borne inférieure de E et la déterminer.

VIII Une utilisation de la transformation L

Dans cette partie, $\mathcal{P}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients complexes et on utilise la transformation L appliquée à des éléments de $\mathcal{P}$ pour l'étude d'un opérateur U.

VIII.A – Soient P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\overline{P}(t)Q(t)\,dt$, où $\overline{P}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P, converge.

VIII.B – On note pour tout couple $(P,Q) \in \mathcal{P}^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}\overline{P}(t)Q(t)\,dt$$

Vérifier que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

VIII.C – On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ défini par

$$U(P)(t) = e^t D(te^{-t}P'(t))$$

Vérifier que U est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

VIII.D – Montrer que pour tous P et Q de $\mathcal{P}$, on a

$$\langle U(P), Q\rangle = \langle P, U(Q)\rangle$$

VIII.E – Montrer que U admet des valeurs propres dans $\mathbb{C}$, qu'elles sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VIII.F – Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

VIII.F.1) Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

VIII.F.2) Quel lien y a-t-il entre λ et le degré de P ?

VIII.G – ***Description des éléments propres de*** U

On considère sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_n): \quad tP'' + (1-t)P' + nP = 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $P \in \mathcal{P}$.

VIII.G.1) En appliquant la transformation L avec $\lambda(t) = t$ à (E_n), montrer que si P est solution de (E_n) sur $[0,+\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1,+\infty[$.

VIII.G.2) Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1,+\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U.

VIII.G.3) Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(t) = e^t D^n(e^{-t}t^n)$?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2012

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Si n est un entier positif, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, noté $\langle X, Y\rangle$ pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On note $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$ la norme associée.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On assimile $\mathbb{R}^n$ à l'espace des vecteurs colonnes d'ordre n et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à son algèbre d'endomorphismes. Ainsi $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. On rappelle que $\mathrm{Tr}(A)$ est égale à la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $R(A) = \left\{ {}^tXAX \;\middle|\; X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1 \right\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

Les parties ainsi que les questions ne sont pas indépendantes.

I Généralités

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A – Démontrer que les valeurs propres réelles de A sont dans $R(A)$.

I.B – **I.B.1)** Démontrer que les éléments a_{ii} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de la diagonale de A sont dans $R(A)$.

I.B.2) En considérant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

montrer que les éléments a_{ij} avec $i \neq j$ ne sont pas nécessairement dans $R(A)$.

I.C – On considère deux nombres réels $a \in R(A)$ et $b \in R(A)$, avec $a < b$. Soient X_1 et X_2 deux vecteurs de norme 1 tels que ${}^tX_1AX_1 = a$, ${}^tX_2AX_2 = b$.

I.C.1) Démontrer que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants.

I.C.2) On pose $X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Démontrer que la fonction $\phi : \lambda \mapsto \dfrac{{}^tX_\lambda AX_\lambda}{\|X_\lambda\|^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

I.C.3) En déduire que le segment $[a, b]$ est inclus dans $R(A)$.

I.D – Démontrer que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors $0 \in R(A)$.

I.E – Soit Q une matrice orthogonale réelle. Démontrer que $R(A) = R({}^tQAQ)$.

I.F – On considère les conditions suivantes :

(C1) $\mathrm{Tr}(A) \in R(A)$

(C2) Il existe une matrice orthogonale réelle Q telle que la diagonale de la matrice ${}^tQAQ$ soit de la forme $(\mathrm{Tr}(A), 0, \ldots, 0)$

I.F.1) Démontrer que la condition (C2) implique la condition (C1).

I.F.2) On suppose que $x \in R(A)$.

Démontrer qu'il existe une matrice Q_1 orthogonale telle que

$${}^tQ_1AQ_1 = \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

où B est une matrice de format $(n-1, n-1)$ $(B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}))$, C un vecteur colonne à $n-1$ éléments $(C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}))$ et L un vecteur ligne à $n-1$ éléments $(L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}))$.

I.F.3) Démontrer que si la matrice A est symétrique il en est de même pour la matrice B ci-dessus.

BY-NC-SA

I.F.4) Démontrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tQ_1AQ_1)$.

I.F.5) En déduire que si A est symétrique, la condition (C1) implique la condition (C2)

On pourra raisonner par récurrence sur n.

II Matrices symétriques de format $(2,2)$

Dans toute cette partie A et B désignent des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \leqslant \mu_2$) les valeurs propres de A (resp. B).

De plus on dira qu'une matrice symétrique S est positive, ce que l'on notera $S \geqslant 0$, si et seulement si toutes ses valeurs propres sont $\geqslant 0$.

II.A – Démontrer que $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$.

II.B – On considère l'ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ défini par l'équation $\langle AX, X\rangle = 1$.

II.B.1) Caractériser les conditions sur les λ_i pour lesquelles cet ensemble est :

a) vide ;

b) la réunion de deux droites ;

c) une ellipse ;

d) une hyperbole.

II.B.2) Réprésenter sur une même figure les ensembles Γ obtenus pour A diagonale avec $\lambda_1 \in \{-4, -1, 0, 1/4, 1\}$ et $\lambda_2 = 1$.

II.C – Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) \leqslant \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$.

On pourra utiliser une matrice P orthogonale telle que ${}^tPBP$ soit une matrice diagonale, pour obtenir ${}^tPAP = A' = (a'_{ij})$ avec $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a'_{11} + a'_{22}$.

II.D – On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

et on suppose $A \geqslant 0$.

II.D.1) Démontrer que $\det(A) \geqslant 0$.

II.D.2) Démontrer que ${}^tXAX \geqslant 0$ pour tout vecteur X.

II.D.3) Démontrer que $a \geqslant 0$ et $d \geqslant 0$.

II.D.4) Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que :

$$S \geqslant 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad (\mathrm{Tr}(S) \geqslant 0 \text{ et } \det(S) \geqslant 0)$$

II.E – On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

On suppose dans cette section que $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$.

II.E.1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(b_1, \sqrt{\det A})$ et $(b_2, \sqrt{\det B})$, démontrer que

$$b_1b_2 \leqslant \sqrt{a_1a_2d_1d_2} - \sqrt{\det A \det B}$$

II.E.2) En calculant $\det(A+B) - \det A - \det B$, en déduire que

$$\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)}$$

II.F – On suppose dans cette sous-partie $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, $\det A \det B \neq 0$ et $b_1b_2 \neq 0$.

II.F.1) Démontrer que l'on a l'égalité dans la formule de la **question II.E.2** si et seulement si les vecteurs (a_1, d_1) et (a_2, d_2) sont liés, ainsi que les vecteurs $(b_1, \sqrt{\det A})$ et $(b_2, \sqrt{\det B})$.

II.F.2) Démontrer alors que l'on a l'égalité dans la formule de la **question II.E.2** si et seulement si les matrices A et B sont proportionnelles ($A = \lambda B$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$).

II.G – On considère la relation suivante sur l'ensemble des matrices symétriques réelles de format (2,2) : on dit que $S \leqslant S'$ si et seulement si la matrice symétrique $S' - S$ vérifie $S' - S \geqslant 0$.

Démontrer que la relation $\leqslant$ ci-dessus est bien une relation d'ordre sur les matrices symétriques réelles de format (2,2).

BY-NC-SA

II.H – On considère une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$$

de matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée pour la relation d'ordre définie à la question précédente.

II.H.1) Démontrer que pour tout vecteur X, la suite $({}^tXA_nX)_{n\geqslant 0}$ est croissante majorée.

II.H.2) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ sont croissantes majorées.

II.H.3) En considérant le vecteur $X = (1, 1)$, démontrer que la suite de matrices $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$.

III Matrices symétriques définies positives

Dans cette partie toutes les matrices sont de format (n, n), où n est un entier supérieur ou égal à 2. On dit qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

III.A – Soit A une matrice symétrique définie positive.

Démontrer qu'il existe une matrice inversible Y telle que $A = {}^tYY$.

III.B – Soient A une matrice symétrique définie positive et B une matrice symétrique.

Démontrer qu'il existe une matrice inversible T telle que :

$$^tTAT = I_n \qquad \text{et} \qquad ^tTBT = D$$

où I_n désigne la matrice identité et D une matrice diagonale.

III.C – Soient A et B deux matrices symétriques définies positives.

III.C.1) Démontrer que : $\det(I_n + B) \geqslant 1 + \det B$.

III.C.2) En déduire que : $\det(A + B) \geqslant \det A + \det B$.

III.D – Soient x un nombre réel strictement positif, β un nombre réel tel que $0 < \beta < 1$.

Démontrer que : $x^\beta \leqslant \beta x + 1 - \beta$.

III.E – Soient A et B deux matrices symétriques définies positives, α et β deux nombres réels > 0 tels que $\alpha + \beta = 1$; démontrer que :

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

III.F – Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, soient A_i des matrices symétriques définies positives et α_i des nombres strictement positifs tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Démontrer que

$$\det(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k) \geqslant (\det A_1)^{\alpha_1} \ldots (\det A_k)^{\alpha_k}$$

On pourra raisonner par récurrence sur k.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2012

4 heures Calculatrices autorisées

Si n et k sont deux entiers naturels, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

I Approximation

I.A – Quelques calculs préliminaires

Dans cette sous-partie, x est un nombre réel et n est un entier naturel.

I.A.1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$.

I.A.2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$.

I.A.3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2$.

I.A.4) Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$$

I.B – Étude de $S(x)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x)=\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

I.B.1) Majoration de $S(x)$: première méthode

On note

– V l'ensemble des entiers $k\in\{0,\dots,n\}$ tels que $\left|x-\frac{k}{n}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$,

– W l'ensemble des entiers $k\in\{0,\dots,n\}$ tels que $\left|x-\frac{k}{n}\right|>\frac{1}{\sqrt{n}}$,

et on pose

$$S_V(x)=\sum_{k\in V}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\qquad\text{et}\qquad S_W(x)=\sum_{k\in W}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

a) Montrer que $S_V(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Montrer que $S_W(x)\leqslant\frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire que $S(x)\leqslant\frac{5}{4\sqrt{n}}$.

I.B.2) Majoration de $S(x)$: seconde méthode

a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique.

b) À l'aide de la **question I.A.4**, en déduire que $S(x)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

BY-NC-SA

I.C – Application à l'approximation uniforme

Dans cette sous-partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme de la borne supérieure, notée $\| \ \|_\infty$:

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x \in [0,1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette sous-partie est d'étudier $\|B_n(f) - f\|_\infty$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

I.C.1) Un exemple

Si $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0,1]$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f) - f\|_\infty$.

I.C.2) Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer, pour tout $x \in [0,1]$, la relation

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

I.C.3) *a)* Montrer que si f est δ-lipschitzienne, alors $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) En déduire que si f est de classe C^1, alors il existe un réel c tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

c) Étendre le résultat précédent au cas où f est une fonction continue, de classe C^1 par morceaux.

I.C.4) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $r > 0$, il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) - r \leqslant P(x) \leqslant f(x) + r$.

II Un théorème de Hardy-Littlewood

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière associée $\sum a_n x^n$ admet pour rayon de convergence $R_a = 1$ et que la somme f de cette série, définie par

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

vérifie

$$f(x) \sim \frac{1}{1-x} \quad \text{quand } x \to 1,\ x < 1. \tag{II.1}$$

On note

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \widetilde{a}_n = \frac{A_n}{n+1}.$$

Ainsi, $\widetilde{a}_n$ est la moyenne arithmétique des nombres $a_0, \ldots, a_n$.

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des a_n lorsque n tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \tag{II.2}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n = 1 \tag{II.3}$$

II.A – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.2

II.A.1) Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

II.A.2) En déduire un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant **II.1** mais ne convergeant pas vers 1.

BY-NC-SA

II.B – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.3

II.B.1) Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^2}$ ainsi que son rayon de convergence. Préciser si la série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

II.B.2) On considère les fonctions $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$ et $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2(1-x)}$. Déterminer des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

On explicitera en fonction de n, suivant la parité de n, les réels u_n et v_n.

II.B.3) Calculer $\widetilde{v}_n$ (moyenne arithmétique des nombres $v_0, \ldots, v_n$).

II.B.4) Construire à l'aide de ψ un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant **II.1** mais ne vérifiant pas la **propriété II.3**.

Jusqu'à la fin de cette partie, on continue de supposer **II.1** et on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0. \tag{II.4}$$

L'objectif principal, après quelques observations concernant la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$, est de démontrer la **propriété II.3** (théorème de Hardy et Littlewood).

II.C – Majoration de la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$

II.C.1) Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f(x) \geqslant A_n x^n$.

II.C.2) Montrer l'existence d'un entier $N > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ f(\mathrm{e}^{-1/n}) \leqslant \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1/n}}.$$

II.C.3) En déduire que la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.

II.D – Minoration, à partir d'un certain rang, de $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$ par un réel > 0

On désigne par $\mu > 0$ un majorant de la suite $(\widetilde{a}_n)_{n\geqslant 0}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{a}_n \leqslant \mu$.

II.D.1) *a)* Pour tout $x \in]-1,1[$, montrer que $(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{f(x)}{1-x} \leqslant A_{N-1}\frac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty}(k+1)x^k.$$

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) \leqslant A_{N-1} + \mu\left((N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}\right).$$

II.D.2) Soit λ un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un entier $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$,

$$f(\mathrm{e}^{-\lambda/N}) \geqslant \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-\lambda/N})} \geqslant \frac{N}{2\lambda}.$$

b) Montrer que pour tout $N \geqslant N_0$

$$\widetilde{a}_{N-1} \geqslant \frac{1}{2\lambda} - \mu\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{N} + \mathrm{e}^{-\lambda/N}\frac{1}{N(1-\mathrm{e}^{-\lambda/N})}\right).$$

c) Déterminer en fonction de λ la limite, quand N tend vers l'infini, du membre de droite dans l'inégalité précédente.

d) Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que cette limite soit strictement positive.

II.D.3) Conclure qu'il existe un réel $\nu > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $\widetilde{a}_n \geqslant \nu$.

BY-NC-SA

II.E – Démonstration de la propriété II.3, due à Karamata

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(x) = 1/x$ si $x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ et $g(x) = 0$ sinon.

On fixe un réel $\varepsilon \in]0, \mathrm{e}^{-1}[$. On définit deux applications continues $g^+, g^- : [0,1] \to \mathbb{R}$ ainsi :

– g^+ est affine sur $[\mathrm{e}^{-1} - \varepsilon, \mathrm{e}^{-1}]$ et coïncide avec g sur $[0, \mathrm{e}^{-1} - \varepsilon] \cup [\mathrm{e}^{-1}, 1]$;

– g^- est affine sur $[\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1} + \varepsilon]$ et coïncide avec g sur $[0, \mathrm{e}^{-1}[\cup [\mathrm{e}^{-1} + \varepsilon, 1]$.

Pour tout entier $N > 0$ on pose $x_N = \mathrm{e}^{-1/N}$.

On rappelle que dans cette sous-partie, on fait les hypothèses **II.1** et **II.4**

II.E.1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g^+(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 g^-(t)\,\mathrm{d}t$.

II.E.2) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considérera d'abord le cas particulier $P(x) = x^k$, où $k \in \mathbb{N}$.

II.E.3) Établir l'existence de deux polynômes P, Q à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in [0,1], \quad g^-(x) - \varepsilon \leqslant P(x) \leqslant g(x) \leqslant Q(x) \leqslant g^+(x) + \varepsilon.$$

II.E.4) Établir l'existence d'un entier $N_1 > 0$ tel que pour tout entier $N \geqslant N_1$,

$$(1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geqslant \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon$$

et

$$(1-x_N)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leqslant \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon.$$

II.E.5) Déduire des trois questions précédentes que pour tout entier $N \geqslant N_1$

$$1 - 5\varepsilon \leqslant (1-x_N)A_N \leqslant 1 + 5\varepsilon.$$

II.E.6) Conclure.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2012

4 heures

Calculatrices autorisées

Dans tout le problème, le corps de base des espaces vectoriels est $\mathbb{R}$. Les matrices et les systèmes linéaires sont à coefficients réels. Les suites et les fonctions sont à valeurs réelles.

Équations linéaires

Ce problème porte sur des applications du théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Les parties sont largement indépendantes, mais les résultats numériques de la partie **I** sont utilisés dans les parties **II** et **III**.

Question préliminaire

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; soit f une application linéaire de E dans F, et b un élément de F. Quelle structure possède l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $f(x) = b$?

I Pivots

On va étudier dans cette partie différentes déclinaisons de l'algorithme du pivot.

I.A – Résolution d'un système linéaire : interprétation graphique

On considère le système linéaire

$$\begin{cases} x+y+z & = 2 \\ x+2y+4z & = 4 \\ x+3y+9z & = 8 \end{cases}$$

Afin de résoudre ce système, on a utilisé un algorithme du pivot : en effectuant des opérations sur les lignes, on a obtenu une séquence de systèmes équivalents avec de plus en plus de coefficients nuls. L'objectif est de résoudre le système en aboutissant à un système de la forme

$$\begin{cases} x & = a \\ y & = b \\ z & = c \end{cases}$$

où on a annulé tous les coefficients non diagonaux de la matrice du système (les coefficients au-dessous de la diagonale *et* les coefficients au-dessus de la diagonale). L'ordre choisi pour effectuer les opérations est indiqué sur le schéma que voici

$$\begin{cases} \blacksquare & 3 & 5 & = & \blacksquare \\ 1 & \blacksquare & 6 & = & \blacksquare \\ 2 & 4 & \blacksquare & = & \blacksquare \end{cases}$$

Chaque numéro indique après combien d'opérations élémentaires le coefficient correspondant a été annulé. Chaque opération élémentaire est de la forme $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ (avec $\alpha \neq 0$) et permet d'annuler le coefficient situé en ligne i et colonne j. Par exemple, la troisième étape a été une opération élémentaire de la forme $L_1 \leftarrow \alpha_3 L_1 + \beta_3 L_2$ (avec $\alpha_3 \neq 0$) qui a permis d'annuler le coefficient placé à la position marquée du chiffre 3 sur le schéma.

À chaque étape de l'algorithme, on a représenté par un schéma les trois plans de $\mathbb{R}^3$ correspondant aux équations du système linéaire. Ces schémas sont reproduits en **figure 1**, dans le désordre.

Reconstituer les étapes du calcul, et indiquer quel schéma correspond à chaque étape.

I.B – Résolution d'un système linéaire : interprétation vectorielle

Dans cette question, on s'intéresse de nouveau au système

$$\begin{cases} x+y+z & = 2 \\ x+2y+4z & = 4 \\ x+3y+9z & = 8 \end{cases}$$

BY-NC-SA

On considère ici les vecteurs colonnes

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système, on cherche des réels x, y et z tels que $xu + yv + zw = t$. Pour cela, on va considérer le tableau

$$\begin{pmatrix} u & v & w & t \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

qu'on interprète comme une matrice. On utilise un algorithme du pivot sur les colonnes : par des opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient des zéros à tous les emplacements marqués d'un numéro dans le schéma ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ \bullet & 1 & 2 & 3 \\ \bullet & \bullet & 4 & 5 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 6 \end{pmatrix}$$

Comme pour la question précédente, chaque numéro indique après combien d'opérations élémentaires le coefficient correspondant a été annulé. Chaque opération élémentaire est de la forme $C_j \leftarrow \alpha C_j + \beta C_i$ (avec $\alpha \neq 0$).Par exemple, la première étape a été la réalisation de l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, qui a fourni le tableau

$$\begin{pmatrix} u & v-u & w & t \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Les deux dernières étapes ont été des opérations élémentaires de la forme $C_4 \leftarrow \alpha_5 C_4 + \beta_5 C_2$ (avec $\alpha_5 \neq 0$) pour l'avant-dernière, et enfin $C_4 \leftarrow \alpha_6 C_4 + \beta_6 C_3$ (avec $\alpha_6 \neq 0$) pour la dernière.

À chaque étape de l'algorithme, on a représenté sur la **figure 2** les quatre vecteurs colonnes indiqués sur la première ligne de la matrice. Pour que le dessin soit plus facile à interpréter, surtout lorsque deux vecteurs sont presque colinéaires, les droites engendrées par les vecteurs ont été représentées par un trait fin. On a également représenté la construction géométrique traduisant l'opération élémentaire, le vecteur ayant été remplacé à une étape étant représenté par une ligne discontinue. Les figures correspondant à chacune des étapes de la résolution sont représentées dans le désordre.

Reconstituer les étapes du calcul, et indiquer quelle figure correspond à chaque étape. Expliquer aussi où on lit la solution du système dans la dernière matrice obtenue.

I.C – Pivots synchronisés

Dans cette question, on étudie un algorithme permettant d'obtenir dans un unique calcul une base du noyau d'une application linéaire et une base de son image. Comme l'image est dans l'espace d'arrivée et que le noyau est dans l'espace de départ, l'algorithme de calcul s'interprète comme deux pivots synchronisés, l'un avec des vecteurs de l'espace de départ, l'autre avec des vecteurs de l'espace d'arrivée.

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimensions finies n et p ; soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, et $\mathcal{C}$ une base de F ; soit f une application linéaire de E dans F et M sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On note $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les colonnes de M.

Soit N le tableau formé en ajoutant à M la ligne supplémentaire $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Le tableau N comporte donc n colonnes et $p+1$ lignes, la $(p+1)$-ième ligne étant $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$; les coefficients des p premières lignes sont donc des scalaires, tandis que ceux de la dernière ligne sont des vecteurs. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de N. L'algorithme de recherche simultanée d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ s'effectue grâce à des opérations élémentaires sur les colonnes de N. Conformément à l'usage pour ces algorithmes, on notera encore $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes des tableaux obtenus aux différentes étapes. On notera $C'_1, \ldots, C'_n$, les colonnes correspondant aux p premières lignes des tableaux obtenus aux différentes étapes de l'algorithme, et $C''_1, \ldots, C''_n$ les coefficients de la dernière ligne de ces tableaux (on rappelle que ce sont des vecteurs de E). Conformément à l'usage, on identifie les vecteurs de F et leurs colonnes associées dans la base $\mathcal{C}$.

Exemple — Si $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, et si f est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

le tableau N s'écrit

BY-NC-SA

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier, on le notera avec un seul jeu de parenthèses,

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ e_1 \end{pmatrix}, \quad C'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C''_1 = \begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix}$$

La double opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1, C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$ conduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ e_1 & e_2 - 2e_1 & e_3 - 3e_1 \end{pmatrix}$$

I.C.1) Au départ, quels sont les liens entre e_k et Y_k, pour $1 \leqslant k \leqslant n$? Que représentent Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$ pour $\mathrm{Im}(f)$?

I.C.2) Après chaque étape de l'algorithme, préciser les liens entre C'_k et C''_k, pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Que représentent $C''_1, \ldots, C''_n$ pour E ? Que représentent $C'_1, \ldots, C'_n$ pour $\mathrm{Im}(f)$?

I.C.3) À la fin de l'algorithme, on obtient un tableau pour lequel les colonnes C'_1, $C'_2, \ldots, C'_q$ forment une matrice échelonnée de colonnes non nulles, et les colonnes C'_{q+1}, $C'_{q+2}, \ldots, C'_n$ sont nulles. Expliquer où on lit une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et où on lit une base de $\mathrm{Im}(f)$.

I.C.4) Exemples numériques

En utilisant l'algorithme que l'on vient d'étudier, déterminer une base du noyau et une base de l'image des endomorphismes f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices respectives, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ sont

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 2 & 3 & -2/3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3/2 \\ 2 & 3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

II Équations différentielles et équations de récurrence

Dans cette partie, nous allons explorer sur des exemples les liens entre équations différentielles linéaires et relations de récurrence linéaires.

II.A – Question de cours et exemple élémentaire

II.A.1) Déterminer le noyau de l'application T, de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui, à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$ associe la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$.

Soit a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$. On considère la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$

II.A.2) Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des suites réelles solutions de cette récurrence ? Quelle est sa dimension ? Comment fait-on pour déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette relation de récurrence ? Quels cas doit-on distinguer pour la recherche des suites solutions ?

II.A.3) Illustrer la méthode en déterminant l'ensemble $\mathcal{A}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} = 0$. On indiquera la dimension de l'espace vectoriel des solutions.

II.A.4) On suppose $a \neq 0$. Écrire en Maple ou en Mathematica une fonction f de six variables telle que, pour tous a, b, c, d, e réels et tout p entier naturel, $f(a, b, c, d, e, p)$ soit le terme d'ordre p, c'est-à-dire u_p, de la suite récurrente (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = d \\ u_1 = e \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \end{cases}$$

Dans la suite de cette partie, on va étudier en parallèle un système différentiel linéaire S_D et un système d'équations de récurrence S_R s'écrivant de façon analogue.

Le système différentiel S_D a comme fonctions inconnues deux fonctions réelles x et y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et s'écrit

$$S_D : \begin{cases} 2x'' + 3y'' - 4x' - 6y' - 6x - 9y = 0 \\ -6x'' - 6y'' + 14x' + 15y' + 12x + 18y = 0 \end{cases}$$

BY-NC-SA

Le système d'équations de récurrence S_R porte sur deux suites réelles inconnues (u_n) et (v_n), et s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_R : \begin{cases} 2u_{n+2} + 3v_{n+2} - 4u_{n+1} - 6v_{n+1} - 6u_n - 9v_n = 0 \\ -6u_{n+2} - 6v_{n+2} + 14u_{n+1} + 15v_{n+1} + 12u_n + 18v_n = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer les solutions de S_D et de S_R, on va d'abord transformer leurs écritures pour se ramener à des systèmes équivalents écrits sous forme standard. On note

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ u_{n+2} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}$$

On cherche une matrice carrée A de taille 4×4 permettant d'écrire S_D et S_R sous la forme $X' = AX$ et $U_{n+1} = AU_n$.

II.B – Découplage des systèmes d'équations

En utilisant l'algorithme du pivot, déterminer un système S'_D d'équations différentielles équivalent à S_D et pouvant s'écrire sous la forme voulue $X' = AX$.

Par la même méthode, déterminer un système S'_R d'équations de récurrence équivalent à S_R et pouvant s'écrire sous la forme voulue $U_{n+1} = AU_n$.

On pourra diviser la feuille en deux colonnes pour traiter en parallèle les deux systèmes. Les calculs communs aux deux systèmes pourront alors n'être effectués qu'une seule fois.

II.C – Interprétation de la réduction matricielle

On considère à présent le système différentiel S'_D : $X' = AX$ et le système de récurrence S'_R : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. On admettra que les dimensions de l'espace vectoriel des solutions de S'_D et de l'espace vectoriel des solutions de S'_R sont égales.

II.C.1) Si λ est une valeur propre réelle de A, et si u_λ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, justifier que la fonction $\varphi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $t \mapsto e^{\lambda t} u_\lambda$ est une solution de S'_D.

Justifier aussi que la suite vectorielle $\omega_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^4$, $n \mapsto \lambda^n u_\lambda$ est une solution de S'_R.

II.C.2) Si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et si $(u_\lambda, u_\mu, u_\nu, u_\xi)$ est une base de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ, μ, ν et ξ (pas nécessairement distinctes), que représente la famille $(\varphi_\lambda, \varphi_\mu, \varphi_\nu, \varphi_\xi)$ pour l'ensemble des solutions de S'_D ? Que représente la famille $(\omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu, \omega_\xi)$ pour l'ensemble des solutions de S'_R ?

II.D – Résolution numérique

II.D.1) On considère à présent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3/2 \\ 2 & 3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

À l'aide éventuellement de la calculatrice, calculer le polynôme caractéristique de A, puis déterminer les valeurs propres de cette matrice, ainsi que des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

II.D.2) En déduire l'ensemble des solutions de S'_D et l'ensemble des solutions de S'_R. Déterminer enfin les ensembles de solutions respectifs de S_D et de S_R.

III Exemple en géométrie

III.A – Nombre de zones découpées sur une sphère par n cercles

Soit u_n le nombre maximal de zones distinctes de la sphère unité que n cercles distincts tracés sur cette sphère peuvent déterminer.

III.A.1) Combien de points d'intersection peuvent avoir deux cercles tracés sur la sphère unité ? (On justifiera succinctement.)

III.A.2) Déterminer u_1, u_2 et u_3.

BY-NC-SA

III.A.3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + 2n$.

Considérons n cercles tracés sur la sphère. Traçons un $(n+1)$-ième cercle sur la sphère qui rencontre les n cercles existants en délimitant un nombre maximal de zones. En notant p le nombre de points d'intersection entre le $(n+1)$-ième cercle et les cercles précédemment tracés, on pourra remarquer que les arcs du $n+1$-ième cercle délimités par les p points d'intersections sont des frontières entre deux nouvelles zones.

III.B – Étude des suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n + 2n$

Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui, à toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associe la suite $(t_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Soit v la suite de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $v_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit enfin Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par $\Phi = T - \mathrm{Id}$, où Id est l'application identité de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

III.B.1) Montrer qu'une suite $t = (t_n)$ vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n + 2n$ si et seulement si $\Phi(t) = v$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites vérifiant cette relation de récurrence. Préciser la structure de $\mathcal{S}$.

III.B.2) Déterminer le noyau de Φ.

III.B.3) Pour tout entier naturel $p > 0$, soit E_p l'espace vectoriel des suites réelles polynomiales de degré inférieur ou égal à p, c'est-à-dire l'ensemble des suites (w_n) pour lesquelles il existe un polynôme P, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à p, vérifiant $w_n = P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Quelle est la dimension de E_p ?

Vérifier que, pour tout entier $p > 0$, E_p est stable par Φ. On note Ψ_p la restriction de Φ à E_p.

Comparer $\mathrm{Ker}\,(\Psi_p)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Montrer que, pour tout $p > 1$, $\mathrm{Im}\,(\Psi_p) = E_{p-1}$.

III.C – Conclusion

Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait $u_n = P(n)$.

Écrire le système d'équations donnant u_1, u_2 et u_3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

IV Équations fonctionnelles linéaires

Dans cette partie, on va d'abord explorer l'effet de la composition des applications sur des exemples simples d'équations fonctionnelles. On se concentrera ensuite sur l'équation fonctionnelle

$$y(x+1) - y(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \tag{IV.1}$$

en utilisant des propriétés linéaires en analyse.

IV.A – Résultats préliminaires

IV.A.1) Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des fonctions continues y de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on ait $y(x+1) - y(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Quelle structure $\mathcal{T}$ possède-t-il ? (On vérifiera les hypothèses du théorème invoqué).

IV.A.2) Quelles sont les fonctions périodiques de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ possédant une limite en $+\infty$?

IV.B – Quelques équations fonctionnelles linéaires élémentaires

IV.B.1) On considère l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) - f(x) = 1 \tag{IV.2}$$

Préciser l'ensemble $\mathcal{K}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'**équation IV.2** pour tout réel x.

IV.B.2) On note lb la fonction logarithme binaire, définie par $\mathrm{lb}(x) = \ln(x)/\ln(2)$. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle **IV.2**. Déterminer une équation fonctionnelle vérifiée par $g = f \circ \mathrm{lb}$ sur $]0, +\infty[$, ainsi qu'une équation fonctionnelle vérifiée par $h = f \circ \mathrm{lb} \circ \ln$ sur $]1, +\infty[$.

Si f est en outre de classe $\mathcal{C}^1$, déterminer une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction dérivée k de h.

IV.B.3) Préciser l'ensemble $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$) des fonctions continues g de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (resp. h de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, k de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$), telles que, pour tout $x \in]0, +\infty[$ (resp. $]1, +\infty[$, $]1, +\infty[$), on ait

$$g(2x) - g(x) = 1 \tag{IV.3}$$

$$h\left(x^2\right) - h(x) = 1 \tag{IV.4}$$

$$\int_x^{x^2} k = 1 \tag{IV.5}$$

BY-NC-SA

IV.C – Étude de l'équation fonctionnelle IV.1 — Recherche d'une première solution particulière

Pour tout entier $n > 0$, soit u_n la fonction de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{-1}{(n+x)^2}$.

IV.C.1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$.

Soit $U = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ la somme de cette série de fonctions. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note U_n la n-ième somme partielle de U définie par $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, et on note $R_n = U - U_n$ son reste d'ordre n.

IV.C.2) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$. Quelles sont les variations de U ?

IV.C.3) Montrer que $U \in \mathcal{T}$

IV.C.4) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant U(x) \leqslant \int_{x+1}^{+\infty} \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

En déduire un équivalent de U au voisinage de $+\infty$.

IV.D – Représentation intégrale d'une solution

Soit V la fonction définie par

$$V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1-e^t}\,\mathrm{d}t.$$

IV.D.1) Déterminer l'ensemble de définition de V.

IV.D.2) Montrer que V possède une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

IV.D.3) Montrer que V est une solution de l'équation fonctionnelle **IV.1** sur $]-1,+\infty[$.

IV.D.4) Comparer U et V.

BY-NC-SA

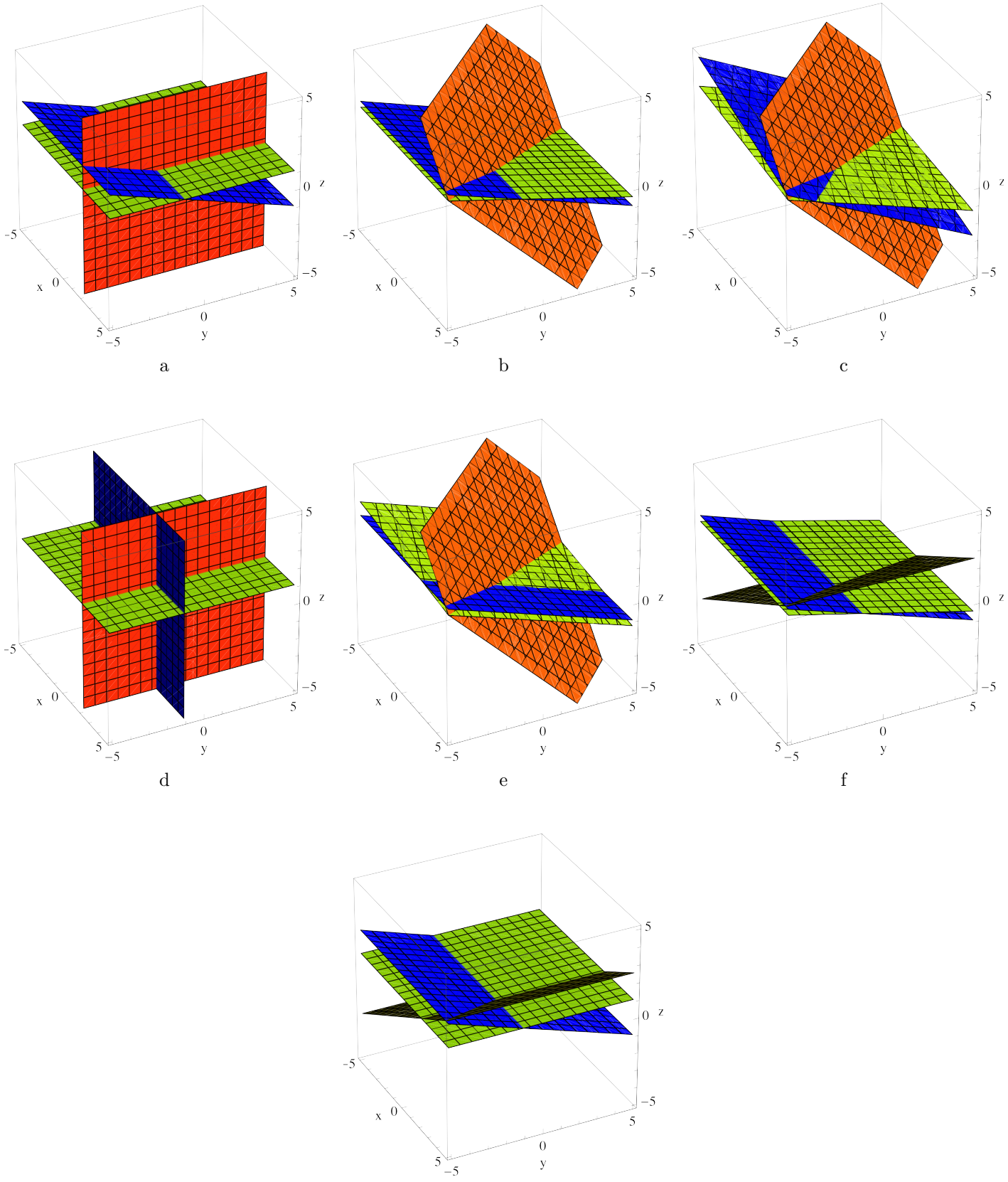
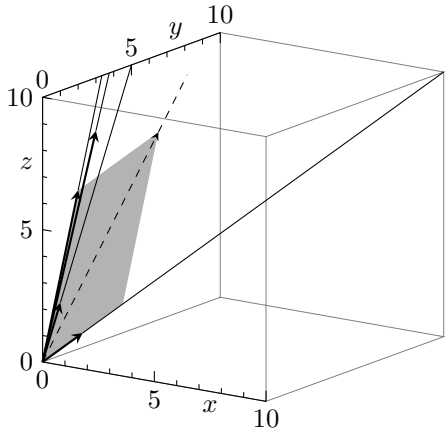
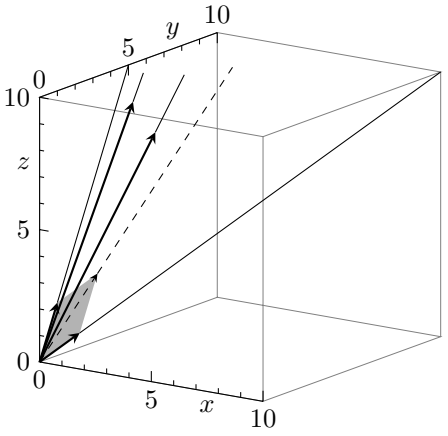


Figure 1

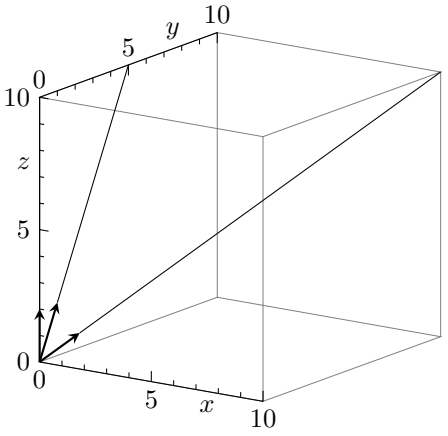
BY-NC-SA



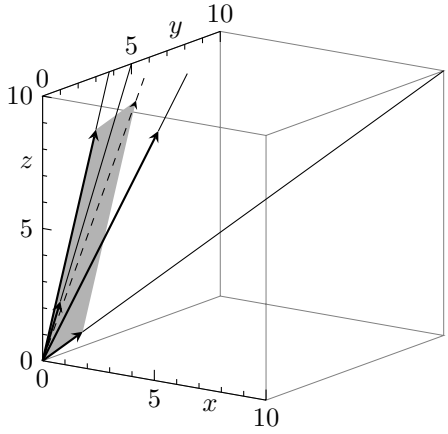
a



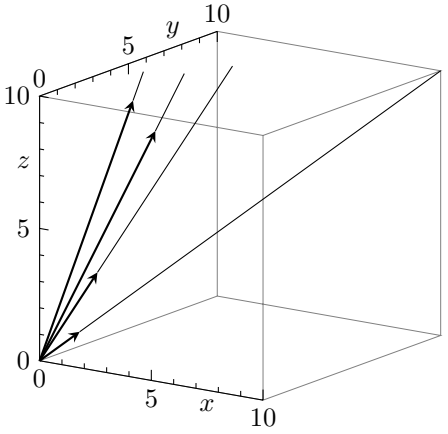
b



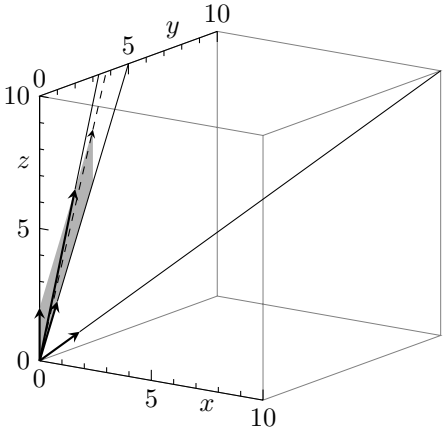
c



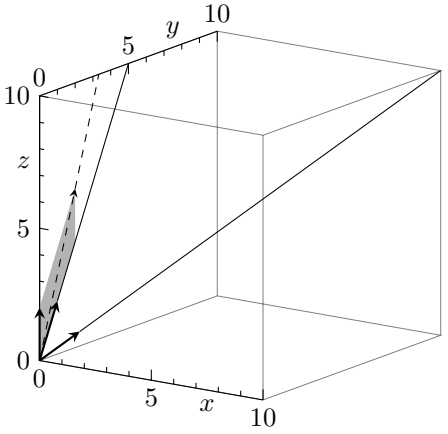
d



e



f



g

Figure 2

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — TSI — 2012

4 heures — Calculatrices autorisées

Le sujet comporte quatre parties. Dans les parties I et II, on établit des résultats utiles pour les parties suivantes. Le jury tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction. En particulier, les candidats veilleront à justifier avec soin que les hypothèses des théorèmes utilisés sont bien vérifiées.

I

I.A –

I.A.1) Soit x un réel strictement positif.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}dt$ est convergente et qu'elle vérifie les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}dt \leqslant \frac{1}{x}$$

I.A.2) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $t \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$, admet une limite quand $t \to 0^+$, dont on donnera la valeur.

I.A.3) Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}dt$ est absolument convergente.

I.B – On désigne désormais par F la fonction qui à $x > 0$ associe $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}dt$.

I.B.1) Soit c un réel strictement positif.

Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur l'intervalle $[c,+\infty[$.

I.B.2) En déduire que F est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Calculer $F'(x)$ puis $F(x)$, pour tout $x \in]0,+\infty[$.

I.C – Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ est convergente et calculer sa valeur.

On pourra utiliser la fonction F étudiée précédemment.

I.D – Dans cette question, on considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$, dans laquelle x est un réel strictement positif et n un entier supérieur ou égal à 1.

I.D.1) Montrer que cette intégrale est convergente.

I.D.2) Vérifier que, pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1, on a

$$\left(1-e^{-t}\right)^n = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k(1-e^{-kt})$$

I.D.3) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$.

II

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels.

On définit sur $\mathbb{R}[X]$ l'application Δ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Cette application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, ce qu'on ne demande pas de justifier. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'endomorphisme Δ^n obtenu en composant n endomorphismes égaux à Δ :

$$\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \ldots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$$

BY-NC-SA

On considère la famille de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ P_n(X) = \dfrac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(X+j) \quad \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Dans les questions qui suivent, n désigne toujours un entier supérieur ou égal à 1.

II.A –

II.A.1) Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

II.A.2) Soit k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$.

Déterminer $\Delta(P_k)(X)$ en fonction de $P_{k-1}(X+1)$. Donner également la valeur de $\Delta(P_0)$.

II.A.3) Soit m un entier supérieur ou égal à 1 et k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$.

Déterminer $\Delta^m(P_k)$ en distinguant les cas : $0 \leqslant m \leqslant k-1$, $m = k$ et $m \geqslant k+1$.

II.A.4) Déduire de ce qui précède que, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors $\Delta^n(P) = 0$.

II.B – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

II.B.1) Démontrer que le polynôme $\Delta^n(P)$ est donné par la formule

$$\Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)$$

On pourra effectuer une récurrence.

II.B.2) En déduire, pour tout entier r vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$, l'égalité suivante,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0 \tag{II.1}$$

III

Dans toute cette partie, n et r désignent des entiers supérieurs ou égaux à 1 et x un réel strictement positif.

III.A –

III.A.1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^r}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$ est convergente.

III.A.2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-xt}}{t^r}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$ converge si et seulement si $n \geqslant r$.

III.B – Désormais, on suppose la condition $1 \leqslant r \leqslant n$ vérifiée. On définit la fonction F_r qui à $x > 0$ associe :

$$F_r(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^r}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$$

III.B.1) Soit c un réel strictement positif.

Montrer que la fonction F_r est de classe C^1 sur l'intervalle $[c, +\infty[$.

III.B.2) En déduire que F_r est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Montrer que si $r \leqslant n-1$, on a

$$\forall x > 0,\ F'_{r+1}(x) = -F_r(x)$$

III.C –

III.C.1) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant t$.

III.C.2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$0 < F_r(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1-r}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-r}\, du$$

III.C.3) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_r(x) = 0$.

III.D – On définit la fonction G_r qui, à $x > 0$, associe :

$$G_r(x) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^{r-1} \ln(x+k)$$

BY-NC-SA

On suppose dans cette question que $1 \leqslant r \leqslant n-1$.
Montrer que $\forall x > 0,\ G'_{r+1}(x) = -G_r(x)$.

III.E – Dans cette question, on utilisera le résultat $\lim\limits_{x\to+\infty} G_r(x) = 0$ qu'on admet pour l'instant.

Montrer par récurrence sur l'entier r variant de 1 à n, qu'on a : $\forall x > 0,\ F_r(x) = G_r(x)$.

III.F – Le but de cette question est d'établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} G_r(x) = 0$. On utilisera l'égalité (**II.1**).

III.F.1) Montrer que, pour tout entier r vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n-1$

$$\forall x > 0,\ G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\ln(1+\frac{k}{x})$$

III.F.2) Rappeler le développement limité de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ à l'ordre r lorsque u tend vers 0. En utilisant ce développement limité pour la fonction $x \mapsto \ln(1+\frac{k}{x})$ lorsque $x \to +\infty$, montrer que :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^r\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}k^j}{jx^j}\right)+o(1)$$

où $o(1)$ désigne une fonction admettant pour limite 0 lorsque $x \to +\infty$.
Vérifier qu'il existe des constantes A_s, où s est un entier relatif compris entre $-r$ et $r-1$, telles que :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{s=-r}^{r-1}A_s x^s + o(1) \qquad \text{quand } x \to +\infty$$

III.F.3) Montrer que, pour tout entier s vérifiant $0 \leqslant s \leqslant r-1$, la constante A_s est nulle.

III.F.4) En déduire que, pour tout entier r vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} G_r(x) = 0$.

IV

Dans cette partie, a est un réel fixé. On considère la série entière de terme général $P_n(a)\ x^n$, $n \geqslant 0$, où (P_n) est la famille de polynômes étudiée dans la **partie II**.

IV.A – Dans cette question, on suppose que a est un entier relatif négatif.

IV.A.1) Préciser la valeur de $P_n(a)$ lorsque $n \geqslant |a|+1$. En posant $p = |a|$, donner la valeur de $P_n(a)$ lorsque $0 \leqslant n \leqslant p$ en fonction de $\binom{p}{n}$

IV.A.2) Justifier l'existence de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(a)\ x^n$ pour tout réel x et la calculer.

IV.B – Dans cette question, on suppose que a n'est pas un entier négatif.

IV.B.1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} P_n(a)\ x^n$.

IV.B.2) Pour tout réel x tel que cette série converge, on pose $S_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(a)\ x^n$.

Montrer que $\forall x \in\ ]-R, R[,\ (1-x)S'_a(x) - aS_a(x) = 0$.

IV.B.3) En déduire la valeur de $S_a(x)$ pour $x \in\ ]-R, R[$.

IV.C – Dans cette question, on étudie la convergence de la série de terme général $\left|P_n(a)\right|$, $n \geqslant 0$, lorsque $a \notin \mathbb{Z}^-$. On suppose que c est un réel fixé, et on définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^c\ \left|P_n(a)\right|$$

IV.C.1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.
Montrer qu'il existe une unique valeur de c qu'on explicitera, pour laquelle la série de terme général w_n, $n \geqslant 1$, converge.
Dans la suite de cette question, on suppose que c est désormais égal à cette valeur.

IV.C.2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et que sa limite L, qu'on ne cherchera pas à calculer, est strictement positive. En déduire que : $\left|P_n(a)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^c}$.

IV.C.3) Préciser pour quelles valeurs de a la série de terme général $\left|P_n(a)\right|$ converge. Donner dans ce cas la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(a)$ et celle de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n P_n(a)$. On citera avec précision le théorème utilisé.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — TSI — 2012

4 heures — Calculatrices autorisées

Ce problème est basé sur une illusion d'optique.

On dit que deux courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ de l'espace font illusion si les trois propriétés suivantes sont vérifiées quels que soient les points P et R de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$:

- P et R sont distincts ;
- si les deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{r}$ dirigent respectivement la tangente à $\mathcal{P}$ en P et la tangente à $\mathcal{R}$ en R, le vecteur $\overrightarrow{PR}$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{p}$ ni à $\overrightarrow{r}$;
- le produit vectoriel $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{PR}$ est orthogonal au produit vectoriel $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{PR}$.

Pour situer l'illusion d'optique, plaçons un observateur sur la droite (PR), hors du segment $[P, R]$ et regardant vers P et R. Son œil étant aligné avec P et R, ces points (distincts) lui semblent être confondus.

De plus, son œil est, a fortiori, dans le plan passant par P et dirigé par $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{PR}$ donc toute droite de ce plan lui semble être la tangente à $\mathcal{P}$; l'illusion est analogue pour la tangente à $\mathcal{R}$. Comme $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{r_1}$ sont orthogonaux, ces deux tangentes lui semblent être orthogonales donc les deux courbes semblent se couper à angle droit.

Deux courbes faisant illusion étant données, on peut aussi chercher l'ensemble des points M de l'espace d'où l'observateur jouit de l'illusion d'optique.

Pour mener cette étude, l'espace est muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, noté également $Oxyz$. Le produit scalaire est noté $\bullet$, la norme euclidienne est notée $\| \ \|$ et la distance euclidienne d.

I Un premier exemple

I.A – Dans le plan Oxy, on considère la droite Δ d'équation $x = -3$, les points F et S de coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et le point variable P de coordonnées (x, y).

I.A.1) Calculer les carrés des distances de P au point F et de P à la droite Δ.

I.A.2) Former une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{P}$, ensemble des points P du plan Oxy qui sont équidistants de F et de Δ.

I.A.3) Quelle est la nature de $\mathcal{P}$ et que représentent S, F et Δ pour $\mathcal{P}$? Représenter $\mathcal{P}$.

I.A.4) Montrer que $\mathcal{P}$ admet dans l'espace la représentation paramétrique

$$x = 2t^2 - 1; \quad y = 4t; \quad z = 0$$

I.B – On considère de même la courbe $\mathcal{R}$ admettant la représentation paramétrique

$$x = 1 - 2u^2; \quad y = 0; \quad z = 4u$$

I.B.1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une parabole passant par F et la représenter dans le plan Oxz.

I.B.2) Montrer que $\mathcal{R}$ se déduit de $\mathcal{P}$ par une symétrie orthogonale par rapport à une droite à préciser.

I.B.3) Sur un même dessin, représenter le repère $Oxyz$, puis les tangentes en S à $\mathcal{P}$ et en F à $\mathcal{R}$, et enfin $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ elles-mêmes.

I.C – Soit P le point de paramètre t sur $\mathcal{P}$ et R le point de paramètre u sur $\mathcal{R}$.

I.C.1) Donner, par leurs composantes, un vecteur $\overrightarrow{p}$ dirigeant la tangente en P à $\mathcal{P}$ et un vecteur $\overrightarrow{r}$ dirigeant la tangente en R à $\mathcal{R}$.

I.C.2) Calculer les composantes de $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{PR}$ et de $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{PR}$.

I.C.3) L'un de ces deux produits vectoriels peut-il être nul ?

I.D – Montrer que les deux courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ font illusion.

I.E – On reprend les notations du **I.C**. Soit μ un réel et M le point de la droite (PR) défini par $\overrightarrow{PM} = \mu\overrightarrow{PR}$.

I.E.1) Comment faut-il choisir μ pour que le point M ne soit pas sur le segment de droite $[PR]$ (afin que du point M on puisse voir simultanément P et R) ?

I.E.2) Exprimer les coordonnées (x, y, z) de M en fonction de t, u et μ, puis t et u en fonction de y, z et μ.

I.E.3) On fixe les coordonnées y et z du point M.

Montrer que le point M est un point depuis lequel on a l'illusion d'optique si et seulement si x est dans l'ensemble des valeurs prises par une certaine fonction de μ que l'on précisera.

BY-NC-SA

I.E.4) Quels sont les points de l'axe Ox depuis lesquels on a l'illusion d'optique ?

II Coplanéarité et alignement

Soient, dans l'espace, quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de coordonnées (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) et soient u, v, w, h quatre nombres réels.

On leur associe les matrices

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{bmatrix}$$

On considère V comme un vecteur de $\mathbb{R}^4$; on note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même ayant L pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On note V_1, V_2, V_3, V_4 les vecteurs lignes de L.

II.A –

II.A.1) En examinant le produit LV, montrer qu'il n'y a pas dans $\mathrm{Ker}(f)$ de vecteur non nul dont les trois premières composantes soient nulles.

II.A.2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul si et seulement si le déterminant de L est nul.

II.A.3) Montrer que si V est non nul et appartient à $\mathrm{Ker}(f)$, alors

$$ux + vy + wz + h = 0$$

est l'équation d'un plan contenant M_1, M_2, M_3 et M_4.

II.A.4) Montrer que M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires si et seulement si le déterminant de L est nul.

II.B –

II.B.1) On suppose que le rang de S est inférieur ou égal à 2.

Montrer que, quel que soit M_4, le déterminant de L est nul. En déduire que M_1, M_2, M_3 sont alignés.

II.B.2) Montrer que le rang de S est inférieur ou égal à 2 si et seulement si M_1, M_2, M_3 sont alignés.

II.C – On suppose que $M_1 \neq M_2$.

II.C.1) Montrer que la famille des deux vecteurs lignes (V_1, V_2) est libre.

II.C.2) Montrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $V_3 = \mu V_1 + (1-\mu)V_2$.

II.D – On suppose ici que les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont alignés et tous distincts.

II.D.1) Montrer que les deux dernières lignes de la matrice L sont combinaisons linéaires des deux premières.

II.D.2) Qu'en résulte-t-il pour le rang de L et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$?

II.D.3) Montrer que L admet, dans le cas où on s'est placé, 0 comme valeur propre, avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2.

II.E – ***Application***

On suppose M_1, M_2, M_3, M_4 non coplanaires. Une droite Δ rencontre en quatre points M_4', M_3', M_2', M_1', tous distincts, les quatre plans contenant respectivement les points (M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_3, M_4) et (M_2, M_3, M_4).

On note M_1'', M_2'', M_3'', M_4'' les milieux des segments $[M_1M_1']$, $[M_2M_2']$, $[M_3M_3']$, $[M_4M_4']$. On se propose de démontrer que M_1'', M_2'', M_3'' et M_4'' sont coplanaires.

Pour cela, on utilise encore la matrice L construite à l'aide des coordonnées de (M_1, M_2, M_3, M_4) et aussi les matrices L' et L'' construites de la même façon à l'aide des coordonnées de (M_1', M_2', M_3', M_4') et de $(M_1'', M_2'', M_3'', M_4'')$.

II.E.1) On note V_1', V_2', V_3', V_4' les vecteurs lignes de L'. En considérant les points M_1', M_2, M_3, M_4, montrer qu'il existe des réels β_1, γ_1, δ_1 tels que

$$V_1' = \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3 + \delta_1 V_4 \quad \text{avec} \quad \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 1$$

II.E.2) Montrer qu'il existe une matrice carrée T de taille 4 vérifiant :

$$\begin{cases} \text{les termes diagonaux sont nuls} \\ \text{sur chaque ligne, la somme des termes vaut 1} \\ L' = T.L \end{cases}$$

II.E.3) Montrer que le vecteur-colonne de composantes $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de T et donner la valeur propre associée.

BY-NC-SA

II.E.4) Montrer que L est inversible et que L' et T sont de rang 2.

II.E.5) En utilisant la trace de T, donner la liste des valeurs propres de T.

II.E.6) Montrer que $L'' = (L + L')/2$ et justifier que L'' n'est pas inversible.

II.E.7) Conclure.

III Un deuxième exemple

III.A – On considère la courbe $\mathcal{P}$ du plan $z = 0$ admettant dans $Oxyz$ la représentation paramétrique

$$x = 5\cos(t); \quad y = 3\sin(t); \quad z = 0$$

III.A.1) Montrer qu'il s'agit d'une ellipse dont on précisera les foyers F et F'.

III.A.2) Représenter $\mathcal{P}$ dans le plan Oxy.

III.B – On considère de même la courbe $\mathcal{R}$ du plan $y = 0$ admettant dans $Oxyz$ la représentation paramétrique

$$x = 4\,\mathrm{ch}(u); \quad y = 0; \quad z = 3\,\mathrm{sh}(u)$$

(ch et sh désignent le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique.)

III.B.1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une partie d'une hyperbole $\mathcal{H}$ dont on donnera une équation cartésienne.

III.B.2) Préciser, sans justification, les asymptotes de $\mathcal{H}$.

III.B.3) Représenter $\mathcal{R}$ dans le plan Oxz.

III.C – Sur un même dessin, représenter le repère $Oxyz$, les points F et F' puis les tangentes remarquables à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$, et enfin $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ elles-mêmes.

III.D – Soient P le point de paramètre t sur $\mathcal{P}$ et R le point de paramètre u sur $\mathcal{R}$.

Donner, par leurs composantes, un vecteur $\overrightarrow{p}$ dirigeant la tangente en P à $\mathcal{P}$ et un vecteur $\overrightarrow{r}$ dirigeant la tangente en R à $\mathcal{R}$.

On ne terminera pas la démonstration du fait que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ font illusion.

III.E – Les réels x, y, z, t et u étant donnés, soient M le point de coordonnées x, y, z, P le point de paramètre t sur $\mathcal{P}$ et R le point de paramètre u sur $\mathcal{R}$. On leur associe la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 5\cos(t) & 3\sin(t) & 0 & 1 \\ 4\,\mathrm{ch}(u) & 0 & 3\,\mathrm{sh}(u) & 1 \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

On note V_1, V_2 et V_3 ses vecteurs lignes.

III.E.1) En utilisant l'un des résultats de la **partie II**, montrer que M, P et R sont alignés si et seulement si il existe un réel μ tel que $V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2$.

III.E.2) En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble des points M ainsi obtenus, de la forme

$$x = x(t, u, \mu); \quad y = y(t, u, \mu); \quad z = z(t, u, \mu)$$

III.E.3) Comment faut-il choisir μ pour que l'observateur placé en M ait l'illusion d'optique ?

IV Recherche de l'ensemble des solutions

On voudrait maintenant trouver tous les couples de courbes qui font illusion. On va se limiter à chercher $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ faisant illusion et vérifiant **en plus** :

- $\mathcal{P}$ admet une représentation paramétrique de la forme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{F}(t)$ où la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $\forall t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{F}'(t) \neq \overrightarrow{0}$;
- $\mathcal{R}$ admet une représentation paramétrique de la forme $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{G}(u)$ où la fonction vectorielle $\overrightarrow{G}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $\forall u \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{G}'(u) \neq \overrightarrow{0}$;
- il existe deux réels t_0 et u_0 rendant minimale la distance PR ;
- $\mathcal{P}$ n'est pas contenue dans une droite et $\mathcal{R}$ non plus.

On note P_0 (et R_0) les points de paramètres t_0 (et u_0) sur $\mathcal{P}$ (et $\mathcal{R}$).

Soient donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux courbes ayant **toutes** ces propriétés.

On rappelle que l'intersection d'un cône de révolution avec un plan ne passant pas par le sommet du cône est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

IV.A – On note P et R les points $P(t)$ et $R(u)$, $\overrightarrow{V}$ le produit vectoriel $\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{F}'(t)$, $\overrightarrow{W}$ le produit vectoriel $\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{G}'(u)$ et $\varphi(t, u)$ le produit scalaire de $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$.

Montrer que $\varphi(t, u)$ est nul pour tout couple (t, u) de réels.

BY-NC-SA

IV.B –

IV.B.1) En utilisant $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$, exprimer la dérivée partielle de $\| \overrightarrow{PR} \|^2$ par rapport à u en fonction du produit scalaire $\overrightarrow{PR} \bullet \overrightarrow{G}'(u)$.

IV.B.2) Montrer que $\overrightarrow{P_0R_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{G}'(u_0)$ et à $\overrightarrow{F}'(t_0)$.

IV.C – Dans cette question, on fixe la valeur de t et on choisit un repère orthonormé $PXYZ$ d'origine P avec l'axe $\overrightarrow{PZ}$ dans la direction de $\overrightarrow{F}'(t)$.

On note v la troisième composante de $\overrightarrow{F}'(t)$.

On abrègera en X, Y, Z, X', Y' et Z' les composantes de $\overrightarrow{PR(u)}$ et de $\overrightarrow{G}'(u)$.

IV.C.1) Traduire par une relation entre ces divers nombres la nullité de $\varphi(t, u)$.

IV.C.2) Montrer que la fonction h telle que $h(u) = \dfrac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

IV.C.3) En utilisant **IV.C.1**, montrer que h est constante sur $\mathbb{R}$.

IV.C.4) En déduire que $\mathcal{R}$ est contenue dans une surface, qu'on notera $\mathcal{S}(t)$ et qui est, suivant la valeur de la constante précédente, soit le plan passant par P et orthogonal à $\overrightarrow{F}'(t)$, soit un cône de révolution de sommet P et dont l'axe est dirigé par $\overrightarrow{F}'(t)$.

IV.D – Dans cette question, on fixe la valeur de t à $t = t_0$, donc $P = P_0$.

IV.D.1) Montrer que le point R_0 appartient à $\mathcal{S}(t_0)$.

IV.D.2) Montrer que $\mathcal{R}$ est contenue dans le plan Γ passant par P_0 et orthogonal à $\overrightarrow{F}'(t_0)$.

IV.E –

IV.E.1) Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas incluse dans le plan Γ.

IV.E.2) On fixe t à une valeur t_1 telle que le point $P_1 = P(t_1)$ de $\mathcal{P}$ ne soit pas dans le plan Γ.
Montrer que $\mathcal{S}(t_1)$ est un cône de révolution de sommet P_1.

IV.F –

IV.F.1) Montrer que $\mathcal{R}$ est contenue dans une ellipse, une hyperbole ou une parabole, elle-même contenue dans le plan Γ.

IV.F.2) Montrer de même que $\mathcal{P}$ est contenue dans une ellipse, une hyperbole ou une parabole, elle-même contenue dans un plan Π perpendiculaire à Γ et que l'on précisera .

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — MP — 2013

4 heures — Calculatrices autorisées

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire euclidien canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme $\|\ \|$ associée.

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et si $(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Si $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, la différentielle de f au point p de Ω est notée $\mathrm{d}f_p$; sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^n$ est appelée *matrice jacobienne de f en p* et est notée $\mathrm{Jac}\,f(p)$.

Si f est dans $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$, on dit que f vérifie (1) si et seulement si

$$\forall (x,y)\in\Omega,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2=1 \tag{1}$$

On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x\mapsto ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f\qquad\text{où}\qquad (a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6.$$

Le but principal du problème est de montrer que les solutions de (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.

I Les équations de Cauchy-Riemann

Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant les équations, dites de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}$$

On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ par

$$\forall (r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\qquad \widetilde{f}(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)\quad\text{et}\quad\widetilde{g}(r,\theta)=g(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

Pour $n\in\mathbb{Z}$, on note $\mathcal{E}_n$ l'espace des fonctions f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C})$ telles que

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\qquad t^2\,f''(t)+t\,f'(t)-n^2\,f(t)=0$$

I.A –

I.A.1) Exprimer $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}(r,\theta)$ en fonction de r, θ, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

I.A.2) Pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, montrer $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)=\dfrac{1}{r}\times\dfrac{\partial\widetilde{g}}{\partial\theta}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial\widetilde{g}}{\partial r}(r,\theta)=-\dfrac{1}{r}\times\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}(r,\theta)$.

I.B – Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, soit φ_α la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\qquad\varphi_\alpha(t)=t^\alpha$$

I.B.1) Pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, déterminer les réels α tels que φ_α appartienne à $\mathcal{E}_n$.

I.B.2) Déterminer $\mathcal{E}_n$ pour $n\in\mathbb{Z}$. On discutera séparément le cas $n=0$.

I.C – Pour $n\in\mathbb{Z}$, soient $c_{n,f}$ et $c_{n,g}$ les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^*,\quad\begin{cases}c_{n,f}(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\\[2ex] c_{n,g}(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{g}(r,\theta)\,e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

I.C.1) Montrer que $c_{n,f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^*,\qquad(c_{n,f})'(r)=\frac{in}{r}\,c_{n,g}(r)$$

BY-NC-SA

I.C.2) Montrer que $c_{n,f}$ appartient à $\mathcal{E}_n$ et que $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0. En déduire l'existence de $a_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad c_{n,f}(r) = a_n\, r^{|n|}$$

I.C.3) En énonçant précisément le théorème utilisé, établir

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(r,\theta) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-p}^{p} a_n r^{|n|}\, e^{in\theta}$$

I.D – Dans cette question, on suppose que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

I.D.1) Si $n \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction $(c_{n,f})'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.D.2) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes.

II Quelques solutions de (1)

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $u \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ vérifie (**II.1**) sur I si et seulement si

$$\forall t \in I, \qquad u(t)\,(u(t) + 2t\,u'(t)) = -1 \tag{II.1}$$

II.A – Déterminer les fonctions de $\mathcal{P}_2$ vérifiant (**1**) sur $\mathbb{R}^2$.

II.B – En énonçant précisément le théorème utilisé, montrer, si (t_0,u_0) est dans $(\mathbb{R}^*)^2$, l'existence d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et d'une fonction $u \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telle que u soit solution de (**II.1**) sur I et vérifie $u(t_0) = u_0$.

II.C – Soit J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction polynomiale solution de (**II.1**) sur J ?

II.D – Soient J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $\Omega(J) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \in J\big\}$, w dans $\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ et W la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \Omega(J), \qquad W(x,y) = w(xy)$$

II.D.1) Montrer que $\Omega(J)$ est un ouvert non vide.

II.D.2) Montrer que W est dans $\mathcal{C}^2(\Omega(J),\mathbb{R})$ et que l'on a équivalence entre

i. W vérifie (1) sur $\Omega(J)$,

ii. w' vérifie (**II.1**) sur J.

II.D.3) Montrer que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de $\mathcal{P}_2$ si et seulement si w est affine.

II.E – Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, f dans $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant (1) sur Ω, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega_{a,b}$ l'image de Ω par la translation de vecteur (a,b) et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\Omega_{a,b}$ par

$$\forall (x,y) \in \Omega_{a,b}, \qquad f_{a,b}(x,y) = f(x-a, y-b)$$

Montrer que $f_{a,b}$ vérifie (**1**) sur $\Omega_{a,b}$.

II.F – Si (x_0,y_0) est dans $\mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant (x_0,y_0) tel que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ vérifiant (**1**) sur U et ne coïncidant sur U avec aucun élément de $\mathcal{P}_2$ soit infini.

III Un critère de difféomorphisme

III.A – Rappeler la définition d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et le théorème caractérisant un tel difféomorphisme parmi les applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite de cette partie, on considère $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. On suppose que pour tout $(p,h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\langle dF_p(h), h\rangle \geqslant \alpha \|h\|^2$$

Le but de cette partie est de montrer que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

III.B – Soient p et q dans $\mathbb{R}^2$.

III.B.1) Vérifier

$$F(q) - F(p) = \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p)\,\mathrm{d}t$$

BY-NC-SA

III.B.2) Montrer

$$\langle F(q) - F(p), q - p\rangle \geqslant \alpha\|q - p\|^2$$

III.C – Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et G^a l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{R}^2, \qquad G^a(p) = \|F(p) - a\|^2$$

III.C.1) Si p et h sont dans $\mathbb{R}^2$, calculer $dG^a{}_p(h)$.

III.C.2) Montrer que $G^a(p) \to +\infty$ quand $\|p\| \to +\infty$.

III.C.3) En déduire que G^a atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en un point p_0.

III.C.4) Montrer que $F(p_0) = a$.

III.D – Montrer que F réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

IV Le théorème de Jörgens

Soit f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soient $u(x, y) = x + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $v(x, y) = y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

On suppose dans les questions **IV.A** et **IV.B** que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

IV.A – Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\operatorname{Jac} F(x, y) - I_2$ (où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2) est symétrique positive. En déduire que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite, soient, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $s(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $t(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ de sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) > 0$ et $r(x, y)\, t(x, y) - s(x, y)^2 = 1$.

IV.B –

IV.B.1) Montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \varphi\left(u(x, y),\, v(x, y)\right) = x - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \\ \psi\left(u(x, y),\, v(x, y)\right) = -y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

IV.B.2) Calculer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\left(u(x, y), v(x, y)\right)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\left(u(x, y), v(x, y)\right)$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}\left(u(x, y), v(x, y)\right)$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}\left(u(x, y), v(x, y)\right)$ (que l'on abrégera en $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}$) en fonction de $r(x, y)$, $s(x, y)$ et $t(x, y)$ (que l'on abrégera en r, s et t).

IV.B.3) Montrer que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

IV.B.4) Montrer, en utilisant la première partie, que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont constantes.

IV.B.5) En déduire que r, s et t sont constantes.

IV.C – Montrer que les seules fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2013

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On note :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathrm{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives ;
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa matrice transposée, $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace, et, pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, m_{ij} le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par $\|M\| = \sup(|m_{ij}|, (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2)$.

I Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

I.A – On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

I.A.1) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est autoadjoint défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.A.2) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.B – Dans cette question, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint, défini positif, tel que $v^2 = u$.

I.B.1) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u. Montrer que v induit un endomorphisme de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ que l'on déterminera.

I.B.2) En déduire v, puis conclure.

I.B.3) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.

I.C – Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

I.C.1) Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.C.2) En déduire qu'il existe un unique couple $(O,S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

I.C.3) Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

I.D –

I.D.1) Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.2) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.3) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O,S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique ?

I.E – Soit φ l'application de $\mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(O,S) = OS$ pour tout couple (O,S) de $\mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

BY-NC-SA

II Deux applications

II.A – Première application

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice U carrée de taille n, inversible, à coefficients complexes, telle que $U\,{}^t\overline{U} = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où $\overline{U}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U.

II.A.1) Justifier que ${}^tA = U({}^tB)U^{-1}$.

II.A.2) On se propose de montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P\,{}^tBP^{-1}$. Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = X + \mathrm{i}Y$.

a) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$.

c) Conclure.

II.A.3) On écrit P sous la forme $P = OS$, avec $O \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $BS^2 = S^2B$, puis que $BS = SB$.

b) En déduire qu'il existe $O \in \mathrm{O}(n)$ tel que $A = OB{}^tO$.

II.B – Seconde application

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ au système

$$(*) : \begin{cases} {}^tAA + {}^tXX = I_n \\ {}^tAX - {}^tXA = 0_n \end{cases}$$

II.B.1) Montrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

II.B.2) On suppose dans cette question que les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

a) Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$, avec $U \in \mathrm{O}(n)$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Déterminer H.

c) Montrer l'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $(*)$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

III Valeurs propres d'une matrice

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

On note P_p le polynôme tel que, pour tout réel x, $P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$.

III.A – Montrer qu'à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(P_p(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, que l'on précisera.

III.B – Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2-x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $2-x = 2\cos\theta$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

III.C – Déterminer les valeurs propres de A_p.

III.D – Montrer que A_p est diagonalisable, et en déterminer une base de vecteurs propres, en précisant pour chacun la valeur propre associée.

BY-NC-SA

IV

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV.A – Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
Dans la suite, A désigne la matrice définie dans cette ***question IV.A****.*

IV.B –

IV.B.1) Justifier l'existence de $M_n = \sup(\{f(O), O \in \mathrm{O}(n)\})$.

IV.B.2) Justifier que ${}^tAA$ admet n valeurs propres positives $\mu_1, \ldots, \mu_n$, comptées avec multiplicités.

IV.B.3) Montrer que $M_n = \sup(\{\mathrm{Tr}(D\Omega), \Omega \in \mathrm{O}(n)\})$, où D est la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n}$.

IV.B.4) En déduire que $M_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$.

IV.C – Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} m_{i,j}$.

IV.C.1) Déterminer la matrice A telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = Tr(AM)$.

IV.C.2) Montrer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.C.3) Déterminer les valeurs propres de $A^{-1}\ {}^tA^{-1}$.

IV.C.4) Montrer que $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos\dfrac{k\pi}{2n+1}}$.

IV.C.5) Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

2013

4 heures Calculatrices autorisées

On considère la famille de fonctions $G_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définies pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad G_x(t) = e^{ix \sin t}$$

Ces fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille des coefficients de Fourier exponentiels de la fonction G_x.
Pour tout réel x on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_x(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés des fonctions φ_n ainsi définies.

I Questions préliminaires

Soit x un réel fixé.

I.A –

I.A.1) Justifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad G_x(t) = e^{ix \sin t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)e^{int}$$

Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de G_x ?

I.A.2) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $|\varphi_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On utilisera des séries de Fourier des dérivées successives de G_x.

I.B – En exprimant $G_x(-t)$ en fonction de $G_x(t)$, montrer que pour n dans $\mathbb{Z}$, $\varphi_n(x) \in \mathbb{R}$.

I.C – Exprimer $G_x(t+\pi)$ et en déduire les égalités suivantes pour n dans $\mathbb{Z}$:

$$\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x) = \varphi_{-n}(x)$$

Que peut-on dire de la parité de φ_n pour $n \in \mathbb{Z}$?

I.D – Calculer $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2$.

L'étude préliminaire permet de restreindre l'étude des fonctions réelles φ_n à $\mathbb{R}^+$ et de se limiter au cas où $n \geqslant 0$.

II Forme intégrale et développement en série entière

Soit n un entier naturel.

II.A – Justifier que pour x réel, $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$.

II.B – Montrer que pour x réel,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} I_{n,k} \qquad \text{avec} \qquad I_{n,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} i^k e^{-int}(\sin t)^k\,\mathrm{d}t$$

BY-NC-SA

II.C –

II.C.1) À l'aide de la formule d'Euler, justifier que pour (n,k) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$I_{n,k}=\sum_{m=0}^{k}\frac{A_{m,k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(2m-k-n)}\,\mathrm{d}t$$

avec $A_{m,k}$ des constantes à préciser.

II.C.2) Vérifier que

$$\begin{cases} I_{n,k}=0 & \text{si } n>k \text{ ou si } k-n \text{ est impair}\\ I_{n,k}=\dfrac{(-1)^p}{2^{n+2p}}\dbinom{n+2p}{n+p} & \text{si } k=n+2p \text{ avec } p\geqslant 0\end{cases}$$

II.C.3) En déduire le développement en série entière, pour $n\geqslant 0$ et $x\in\mathbb{R}$:

$$\varphi_n(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \tag{II.1}$$

Préciser le rayon de convergence.

II.C.4) Montrer que φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.D – Relation de dérivation

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, vérifier que pour x réel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n\varphi_n(x)\right)=x^n\varphi_{n-1}(x)$$

II.E – Calcul numérique de $\varphi_n(x)$ avec $x>0$ fixé

On approche $\varphi_n(x)$ à l'aide des sommes partielles

$$S_m=\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\,a_p \qquad \text{avec} \quad m\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad a_p=\frac{1}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}$$

II.E.1) À partir de quelle valeur p_0 de p la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ?

II.E.2) On suppose $N>p_0$. Majorer $|R_N|$ en fonction de (N,n,x) avec

$$R_N=\sum_{p=N+1}^{+\infty}(-1)^p\,a_p$$

En déduire, pour $\varepsilon>0$ fixé, une condition suffisante sur N pour que $|\varphi_n(x)-S_N|<\varepsilon$.

La somme partielle S_N est dite alors *valeur approchée de $\varphi_n(x)$ à ε près.*

II.E.3) Écrire une fonction Maple ou Mathematica, `CalculPhi`, d'arguments (n,x,ε) retournant une valeur approchée de $\varphi_n(x)$ à ε près. Les coefficients a_p seront calculés par récurrence.

III Équation différentielle et étude de φ_n quand $x\to+\infty$

Soit n un entier naturel. On étudie l'équation différentielle d'inconnue y

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \tag{III.1}$$

On recherche des solutions dans l'ensemble $E=\mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$.

III.A – Résolution et propriété des solutions

III.A.1) En utilisant le développement de φ_n en série entière (**II.1**), montrer que φ_n est solution sur $[0,+\infty[$ de (**III.1**).

BY-NC-SA

III.A.2) Soit y une solution dans E de (**III.1**). On pose $z(x) = \sqrt{x}\, y(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
Montrer que z est solution dans E d'une équation différentielle du type

$$z'' + q\, z = 0 \tag{III.2}$$

avec $q \in E$.
Préciser l'expression de la fonction q et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = 1$.

III.A.3) Justifier que si z est une solution non nulle de (**III.2**), alors pour $x > 0$, $(z(x), z'(x)) \neq (0, 0)$.
En déduire que si α est un zéro de z, alors il existe un réel strictement positif η tel que α soit le seul point d'annulation de z sur $I =]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$.
On dit dans ce cas que α est un *zéro isolé de* z.

III.A.4) Vérifier que les zéros de φ_n sur $]0, +\infty[$ sont isolés.

III.B – Comportement asymptotique de φ_n en $+\infty$

On étudie ici le comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une solution $z \in E$ de l'équation différentielle définie sur $]0, +\infty[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$z'' + \left(1 + \frac{\lambda}{x^2}\right) z = 0 \tag{III.3}$$

Soit x_0 dans $]0, +\infty[$.

III.B.1) En considérant l'équation différentielle (**III.3**) sous la forme $z'' + z = g$ avec $g(x) = \frac{-\lambda}{x^2} z(x)$, la résoudre sur $]0, +\infty[$ par la méthode de variation des constantes.
En déduire qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in]0, +\infty[\qquad z(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} z(u)\sin(u - x)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

III.B.2) On pose pour $x > 0$

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} |z(u)| \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles μ et M telles que h vérifie l'inégalité différentielle pour $x \geqslant x_0$

$$h'(x) - \frac{\mu}{x^2} h(x) \leqslant \frac{M}{x^2}$$

Préciser les constantes μ et M en fonction de A, B et λ.

b) En déduire que h est bornée sur $[x_0, +\infty[$ puis que z est bornée sur ce même intervalle.

Multiplier par $e^{\mu/x}$ et intégrer l'inégalité de la question précédente.

III.B.3) Justifier que

$$\int_{x}^{+\infty} z(u)\sin(u - x)\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de $+\infty$.
En déduire l'existence de constantes α et β telles qu'au voisinage de $+\infty$,

$$z(x) = \alpha\cos(x - \beta) + O(\frac{1}{x})$$

III.B.4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un couple de réels (α_n, β_n) tel que pour $x \to +\infty$,

$$\varphi_n(x) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{x}}\cos(x - \beta_n) + O(\frac{1}{x\sqrt{x}})$$

BY-NC-SA

IV Étude des zéros de φ_n

On introduit l'équation différentielle

$$z_1''(x) + c^2 z_1(x) = 0 \qquad \text{avec} \qquad c > 0 \tag{IV.1}$$

*L'objectif de cette partie est de comparer les solutions des équations différentielles (**III.2**) et (**IV.1**) afin d'obtenir des informations sur les zéros des fonctions φ_n.*

IV.A – En utilisant l'encadrement de la **question II.E.2**, montrer que $\varphi_0(3) < 0$. En déduire que φ_0 possède un zéro $\alpha_0 \in]0,3[$.

On admettra que c'est le premier zéro de φ_0, c'est-à-dire que φ_0 ne s'annule pas sur $]0,\alpha_0[$.

IV.B – En utilisant la **question II.D**, montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ la fonction φ_n est strictement positive sur $]0,\alpha_0[$.

IV.C – Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $c \in]0,1[$. On pose $z(x) = \sqrt{x}\,\varphi_n(x)$, pour $x > 0$.

IV.C.1) Justifier qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour $x > A$, $q(x) > c^2$ (q définie en **III.A.2**).

IV.C.2) Soit $a > A$. On pose pour $x > 0$, $z_1(x) = \sin(c(x-a))$, solution de **IV.1**. On définit la fonction $W = z\,z_1' - z_1\,z'$.

Vérifier que pour $x > 0$, $W'(x) = (q(x) - c^2)z(x)z_1(x)$.

IV.C.3) On note $I_a =]a, a + \pi/c[$ et on suppose que φ_n ne possède pas de zéros sur I_a.

Déterminer les signes de $W(a)$, $W(a+\pi/c)$ et de W' sur I_a et aboutir à une contradiction. En déduire que φ_n possède un zéro dans tout intervalle I_a avec $a > A$.

> On pourra distinguer les cas suivant le signe de φ_n sur I_a.

IV.D – Soit $n \in \mathbb{N}$.

IV.D.1) Montrer qu'on peut ordonner les zéros de φ_n, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\left(\alpha_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante de zéros de φ_n telle que φ_n ne s'annule pas sur $]0,\alpha_0^{(n)}[$ et sur tout intervalle $]\alpha_k^{(n)}, \alpha_{k+1}^{(n)}[$ avec k dans $\mathbb{N}$ et que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k^{(n)} = +\infty$.

> Construire la suite $\left(\alpha_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur k en montrant que l'ensemble $\mathcal{Z}_k$ des zéros de φ_n dans l'intervalle $]\alpha_k^{(n)}, +\infty[$ possède un plus petit élément.

IV.D.2) En déduire que la suite $(\alpha_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété de répartition asymptotique :

$$\forall c \in]0,1[, \quad \exists j \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha_{j+k+1}^{(n)} - \alpha_{j+k}^{(n)} < \frac{\pi}{c}$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2013

4 heures Calculatrices autorisées

Exponentielle de matrices

Le but du sujet est d'étudier l'exponentielle de matrices, réelles ou complexes.

Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul.

Si $\mathbb{K}$ désigne un corps, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on adopte les notations suivantes :

- $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_p[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus p.
- $M_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- I_p est la matrice identité de $M_p(\mathbb{K})$.
- Une matrice $A \in M_p(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$.
- $GL_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_p(\mathbb{K})$.
- On note tr l'application trace et det l'application déterminant.
- $O_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{R}$ et d'ordre p.
- $SO_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $O_p(\mathbb{R})$ de déterminant 1.
- On munit $M_p(\mathbb{K})$ de la norme quadratique $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in M_p(\mathbb{K}),\ \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}({}^t\bar{A}A)}$$

  et on munit $M_p(\mathbb{K})$ de la structure d'espace vectoriel normé associée.
- Si A est une matrice de $M_p(\mathbb{K})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice A et, par abus de notation, $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, u_A$.
- Si A est une matrice de $M_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque la limite existe,

$$E(A) = \lim_{n\to\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$$

- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure canonique d'espace euclidien.

I Question préliminaire

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On pose $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.

I.B – En déduire que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

BY-NC-SA

II Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3

II.A – Matrices antisymétriques d'ordre 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

II.A.1) Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) \in SO_2(\mathbb{R})$$

II.A.2) Déterminer un nombre réel θ_n tel que

$$\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$$

II.A.3) En déduire que $E(A)$ existe et que c'est une matrice de rotation, dont on précisera l'angle.

II.B – Matrices antisymétriques d'ordre 3

II.B.1) Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a) Montrer que $\det B = 0$.

b) Montrer que $(\operatorname{Ker} u_B)^\perp$ est stable par u_B.

c) En déduire que B est de rang 0 ou 2.

II.B.2) Montrer qu'il existe une matrice P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel β tels que

$$B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

II.B.3) Montrer que lorsque l'égalité de la question précédente est vérifiée, on a $|\beta| = \dfrac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$.

II.B.4) Montrer que $E(B)$ existe et est une matrice de rotation. Préciser la valeur de son angle non orienté en fonction de $\|B\|_2$.

III Exponentielle de matrices diagonalisables

III.A – Cas des matrices diagonales

Soit $D \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

III.A.1) Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{C})$.

III.A.2) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(D) = E(D)$.

III.A.3) Soit $(\Delta, +)$ le sous-groupe additif de $M_p(\mathbb{R})$ formé par les matrices diagonales.

Montrer que E définit un morphisme de groupe de $(\Delta, +)$ dans $(GL_p(\mathbb{R}), \times)$.

BY-NC-SA

III.B – Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

III.B.1) Montrer que $E(A)$ existe.

III.B.2) Montrer que $\det(E(A)) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

III.B.3) Soit $x \in \mathbb{C}$.

Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que

$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

III.C – Exponentielle de la somme

Soient $A, B \in M_p(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

III.C.1) Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

On étudiera les restrictions de u_B aux sous-espaces propres de u_A.

III.C.2) En déduire que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

IV Exponentielle de matrices nilpotentes

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'ordre k). Soit également $B \in M_p(\mathbb{C})$.

IV.A –

IV.A.1) Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, $\mathrm{Ker}\, A^{j-1}$ est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}\, A^j$.

IV.A.2) En déduire que $k \leqslant p$.

IV.B – Montrer que $E(A)$ existe. Proposer une procédure Maple ou Mathematica prenant en entrée une matrice triangulaire supérieure stricte A et renvoyant la valeur de $E(A)$.

IV.C – Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A) = E(A)$.

IV.D – Soit $B \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe.

On admet que, pour tout entier i compris entre 1 et p,

$$\lim_{n\to\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-i}$$

Montrer que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B)$.

IV.E – Soit $x \in \mathbb{C}$.

Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.

IV.F – Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

BY-NC-SA

V Cas général

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$$

et χ_A le polynôme caractéristique de A défini par

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_p)$$

V.A – Liens avec le polynôme caractéristique

V.A.1) Montrer qu'il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que

$$P_n = Q_n \chi_A + R_n$$

V.A.2) Montrer que $E(A)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(A)$ existe.

V.A.3) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les racines de χ_A deux à deux distinctes, dont on note $n_1, n_2, \ldots, n_k$ les ordres de multiplicité respectifs.

Pour tout entier q compris entre 1 et p, on note J_q la matrice de $M_q(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés juste au-dessus de la diagonale qui valent 1.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, pour tout entier q compris entre 1et p, la famille $\{(xI_q + J_q)^i,\ 0 \leqslant i \leqslant q-1\}$ est libre.

V.A.4) Soit $B = \mathrm{diag}\{\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}, \ldots, \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k}\}$ la matrice diagonale par blocs définie par

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix}$$

Montrer que $\chi_B = \chi_A$.

V.B – Convergence de $E(A)$

V.B.1) Soit i un entier $\geqslant 1$.

Montrer que

$$B^i = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1})^i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2})^i & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})^i \end{pmatrix}$$

V.B.2) Soit P un polynôme annulateur non nul de la matrice B.

a) Montrer que le degré de P est $\geqslant p$.

b) En déduire que la famille $\{B^i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1\}$ est libre.

V.B.3) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(B)$ existe.

V.B.4) En déduire que $E(A)$ existe.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2013

4 heures Calculatrices autorisées

Le problème se propose d'étudier par diverses méthodes une intégrale dépendant d'un paramètre. Cette intégrale provient de l'étude du « noyau de Poisson »

$$z \mapsto \mathrm{Re}\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)$$

défini sur le disque unité ouvert du plan complexe. Elle permet d'établir un lien entre séries entières et séries de Fourier.

Les sous-parties **III.B**, **III.C** et **III.D** donnent des méthodes différentes en vue d'un même résultat. Elles doivent être traitées comme indépendantes entre elles.

On utilise les notations habituelles pour les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

I Règle de convergence d'Abel

I.A – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $B_n = b_1 + \cdots + b_n$ est bornée.

I.A.1) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

I.A.2) En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.

I.A.3) **Application**

Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

I.B – On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, où x est une variable réelle.

I.B.1) Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Montrer qu'elle ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique continue par morceaux.

On pourra commencer par rappeler la formule de Parseval.

I.C – Soit p la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$$

I.C.1) Montrer que p est bien définie, continue et 2π-périodique.

I.C.2) Déterminer la série de Fourier de p.

I.C.3) Montrer que la fonction p n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

II Étude de la série entière $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$

II.A – Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

II.A.1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$.

II.A.2) Soit g la fonction de $]-1,1[$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n} x^n$$

BY-NC-SA

a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - x}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

b) Montrer que, si $x \in]-1,1[$,

$$h(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) + \mathrm{i}\,\arctan\left(\frac{x\sin\theta}{1 - x\cos\theta}\right)$$

est bien défini et que $h(x) = g(x)$.

II.B – Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

II.B.1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t}\mathrm{d}t$$

II.B.2) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t}\,\mathrm{d}t$$

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

II.B.3) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = -\frac{1}{2}\ln(2 - 2\cos\theta) + \mathrm{i}\,\arctan\Big(\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}\Big)$$

II.B.4) Montrer que, pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

II.C – Soit $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction 2π-périodique, impaire, telle que $\forall\theta \in]0,\pi]$, $r(\theta) = \dfrac{\pi - \theta}{2}$.

II.C.1) Justifier l'existence et l'unicité de r.

II.C.2) Déterminer la série de Fourier de r.

II.C.3) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

III Calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$

III.A – Intégrales impropres

III.A.1) Montrer que si x est un réel différent de 1 et de -1, alors $x^2 - 2x\cos\theta + 1 > 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

III.A.2) Étudier la convergence des intégrales impropres

$$\int_0^\pi \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad \int_0^\pi \ln(1 - \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \qquad \int_0^\pi \ln(1 + \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ converge.

III.A.3) Montrer que, quand x tend vers $+\infty$,

$$2\pi\ln(x) - \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$$

admet une limite, que l'on déterminera.

III.A.4) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ est une fonction paire de la variable $x \in \mathbb{R}$.

BY-NC-SA

III.B – Première méthode de calcul : séries de Fourier

III.B.1) Soit $x \in]-1,1[$.

Déterminer la série de Fourier de la fonction $\widetilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{h}(\theta) = \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$.

On pourra utiliser le résultat de la **question II.A.2**.

III.B.2) En déduire que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta = 0$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ dans le cas $|x| > 1$.

III.B.3) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ converge.

III.B.4) Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

III.B.5) En déduire que $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\pi\ln 2$.

III.B.6) En déduire que $\displaystyle\int_0^\pi \ln(2 - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \ln(2 + 2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$.

III.C – Une deuxième méthode : intégrale dépendant d'un paramètre

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$.

III.C.1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \qquad f'(x) = \int_0^\pi \frac{2x - 2\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\,\mathrm{d}\theta$$

III.C.2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$f'(x) = 4\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2t^2 + (x-1)^2)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

III.C.3) En déduire que

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi\ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

On déterminera d'abord des coefficients A et B fonctions de x tels que $\dfrac{(x+1)T + (x-1)}{((x+1)^2T + (x-1)^2)(T+1)} = \dfrac{A}{(x+1)^2T + (x-1)^2} + \dfrac{B}{T+1}$ pour tout $T \in \mathbb{R}$ tel que ces fractions soient définies.

III.C.4) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f(1) = f(-1) = 0$.

On pourra montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x\cos\theta + 1 \geqslant \sin^2\theta$ et utiliser le théorème de la convergence dominée.

III.D – Troisième méthode : racines de l'unité

III.D.1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)\right)$$

III.D.2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)$$

III.D.3) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 4\pi\ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

III.D.4) En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

BY-NC-SA

III.D.5) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^2$$

III.D.6) Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

III.D.7) En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\pi\frac{\ln 2}{2}$$

Retrouver alors le résultat de la **question III.B.6**.

IV Théorème de convergence radiale

IV.A – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et on définit les fonctions s_n et s de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ par $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $s(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

IV.A.1) Justifier l'existence de s.

IV.A.2) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$s(x) - s_n(x) = r_n x^{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k(x^k - x^{k+1})$$

IV.A.3) Montrer que s est continue sur $[0,1]$.

Pour la continuité en 1, fixer $\varepsilon > 0$ et montrer que si l'entier naturel N vérifie $|r_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, alors $|s(x) - s_N(x)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$. Majorer ensuite le module de $s(x) - s(1) = (s(x) - s_N(x)) + (s_N(x) - s_N(1)) + (s_N(1) - s(1))$.

IV.A.4) Application : retrouver le résultat de la **question II.B.3**.

IV.B – Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le développement en série entière de la fonction

$$x \mapsto \frac{1-x^2}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

sur un intervalle que l'on précisera.

IV.C – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la série de Fourier de f en cosinus et sinus, notée

$$c_0 + \sum_{n\geq 1}\big(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\big)$$

IV.C.1) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\big)x^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-x^2)f(u)}{x^2 - 2x\cos(t-u) + 1}\,\mathrm{d}u$$

IV.C.2) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-x^2)f(u)}{x^2 - 2x\cos(t-u) + 1}\,\mathrm{d}u$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2013

4 heures Calculatrices autorisées

Matrices directement orthogonalement semblables et cercle propre

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels à n lignes, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tMM = I_n$ où ${}^tM$ désigne la transposée de M et où I_n est la matrice identité. On note $\mathrm{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{SO}(n)$ le sous-ensemble de $\mathrm{O}(n)$ constitué des matrices orthogonales de déterminant 1. On rappelle que $(\mathrm{O}(n), \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ et que $(\mathrm{SO}(n), \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(n), \times)$. Le premier est appelé groupe orthogonal, le second groupe spécial orthogonal.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.

Si λ est une valeur propre de A, on notera respectivement $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(f_A)$ les sous-espaces propres associés à λ, pour A et f_A respectivement.

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique, de sorte que la base canonique est orthonormée directe. Le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ et la norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|$.

Pour tout couple (u, v) de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, on dit que θ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$ lorsque $\cos\theta = \dfrac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}$ et $\sin\theta = \dfrac{[u, v]}{\|u\|\,\|v\|}$, où $[\cdot,\cdot]$ désigne le produit mixte, c'est-à-dire le déterminant dans n'importe quelle base orthonormée directe.

On appelle similitude de rapport k tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ pour lequel il existe un réel $k > 0$ et une matrice M de $\mathrm{O}(2)$ tels que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ soit égale à kM.

I Le groupe orthogonal en dimension 2

I.A – Les rotations planes

I.A.1) Montrer que $A \in \mathrm{SO}(2)$ si et seulement si il existe un réel t tel que $A = R_t$ avec $R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

I.A.2) Écrire une procédure ou une fonction dans le langage Maple ou Mathematica qui prend en entrée un quadruplet (a, b, c, d) de réels et qui renvoie, lorsque c'est possible, un réel t tel que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = R_t$ et un message d'erreur dans le cas contraire.

I.A.3) Vérifier que l'application qui, à tout réel t, associe la matrice R_t, est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathrm{SO}(2), \times)$.

Ce morphisme est-il bijectif ?

I.A.4) Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}$ et tout u non nul de $\mathbb{R}^2$, t est une mesure de l'angle orienté $\widehat{\left(u, \rho_t(u)\right)}$, où ρ_t est l'endomorphisme (la rotation d'angle t) f_{R_t} canoniquement associé à R_t.

Pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $k\rho_t$ est appelé similitude directe de rapport k et d'angle t.

I.B – Matrices semblables et sous-espaces propres

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = P^{-1}AP$.

I.B.1) Montrer que f_A et f_B ont les mêmes valeurs propres.

I.B.2) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $E_\lambda(f_A) = f_P(E_\lambda(f_B))$.

I.C – Les réflexions planes

I.C.1) On note $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que l'endomorphisme $\sigma_0 = f_{K_2}$ est une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à une droite du plan) dont on précisera les éléments propres.

BY-NC-SA

I.C.2) Pour tout réel t, préciser l'endomorphisme σ_t canoniquement associé à $R_t^{-1}\,K_2\,R_t$ et en particulier ses éléments propres.

I.C.3) Montrer, que pour toute matrice A de $\mathrm{O}(2)$ telle que $\det(A) = -1$, il existe un réel t tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\,t) & \sin(2\,t) \\ \sin(2\,t) & -\cos(2\,t) \end{pmatrix}$$

II Matrices directement orthogonalement semblables

Pour A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est orthogonalement semblable à B (ce que l'on pourra abréger en : A os B) s'il existe une matrice P de $\mathrm{O}(n)$ telle que $B = P^{-1}AP$ et on dit que A est directement orthogonalement semblable à B (en abrégé : A dos B) s'il existe une matrice P de $\mathrm{SO}(n)$ telle que $B = P^{-1}AP$.

II.A – Propriétés fondamentales de la similitude

II.A.1) Montrer que pour toute A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a A dos A, que pour tout (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ si A dos B alors B dos A et que pour tout (A, B, C) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ si A dos B et B dos C alors A dos C.

On dira donc indifféremment que A est directement orthogonalement semblable à B ou que A et B sont directement orthogonalement semblables.

On a les mêmes propriétés pour la relation de similitude orthogonale entre deux matrices carrées de même taille et on ne demande pas de refaire ici les vérifications.

II.A.2) Quelles sont les matrices directement orthogonalement semblables à αI_n pour α réel ?

II.A.3) Quelles sont les matrices directement orthogonalement semblables à A si A appartient à $\mathrm{SO}(2)$?

II.A.4) Quelles sont les matrices directement orthogonalement semblables à K_2 ?

II.B – Comparaison des relations de similitude.

Avec $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, si deux matrices sont directement orthogonalement semblables alors elles sont orthogonalement semblables et si deux matrices sont orthogonalement semblables alors elles sont semblables.

II.B.1) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont directement orthogonalement semblables.

II.B.2) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables mais ne sont pas orthogonalement semblables.

II.B.3) Montrer que $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et sa transposée sont orthogonalement semblables mais ne sont pas directement orthogonalement semblables.

III Cercle propre d'une matrice carrée réelle d'ordre 2

III.A – Cercle propre

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on note $\varphi_A(x, y)$ le déterminant de la matrice $A(x, y) = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c+y & d-x \end{pmatrix}$ et on considère $\mathcal{CP}_A$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation : $\varphi_A(x, y) = 0$.

III.A.1) Vérifier que $\mathcal{CP}_A$ est un cercle (on convient qu'un cercle peut être réduit à un point) ; on appellera $\mathcal{CP}_A$ cercle propre de A. Préciser son centre C_A et son rayon r_A.

III.A.2) Préciser, en fonction de A, le cardinal de l'intersection de $\mathcal{CP}_A$ avec l'axe des abscisses $\mathbb{R} \times \{0\}$.

III.A.3) Que représentent les solutions de l'équation $\varphi_A(x, 0) = 0$ pour A ?

Préciser le nombre de valeurs propres réelles de A selon la valeur de $\Delta_A = (a-d)^2 + 4\,b\,c$.

III.B – Deux cas particuliers

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III.B.1) Comparer le cercle propre de A et celui de sa transposée.

III.B.2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\mathcal{CP}_A$ pour que A soit symétrique.

III.B.3)

a) Déterminer les matrices dont le cercle propre est de rayon nul et caractériser géométriquement leur endomorphisme canoniquement associé.

b) Lorsque le cercle propre est réduit à son centre, préciser l'endomorphisme canoniquement associé, d'une part quand ce centre appartient au cercle trigonométrique (de centre l'origine $O = (0, 0)$ et de rayon 1) et d'autre part quand ce centre appartient à l'axe des abscisses.

BY-NC-SA

c) Que peut-on dire de la matrice A et de f_A quand le cercle propre $\mathcal{CP}_A$ est de rayon nul et de centre appartenant à l'axe des ordonnées $\{0\} \times \mathbb{R}$?

III.C – Cercle propre et matrices directement orthogonalement semblables

Montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont directement orthogonalement semblables si et seulement si elles ont le même cercle propre.

III.D – Rectangle propre

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère les quatre points (éventuellement confondus) $E = (d, -c)$, $F = (a, b)$, $G = (d, b)$ et $H = (a, -c)$.

III.D.1) Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, représenter le cercle et le quadrilatère $EHFG$.

III.D.2) Lorsque les quatre points E, F, G et H sont distincts montrer qu'ils sont les sommets d'un rectangle, que l'on appellera rectangle propre de A.

III.D.3) Préciser les matrices pour lesquelles certains de ces points sont confondus, c'est-à-dire lorsque le rectangle est aplati.

III.E – Décomposition orthogonale d'un endomorphisme

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III.E.1) Montrer qu'il existe un unique triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ que l'on précisera, tel que A soit directement orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} \alpha + \gamma & -\beta \\ \beta & \alpha - \gamma \end{pmatrix}$.

III.E.2) Suivant les valeurs de (α, β, γ) préciser le nombre de valeurs propres réelles de A.

III.E.3) Montrer que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, il existe des réels positifs ou nuls k et ℓ, une rotation plane ρ_t et une réflexion $\sigma_{t'}$ tels que $f = k\rho_t + \ell\sigma_{t'}$.

III.E.4) Écrire une procédure ou une fonction dans le langage Maple ou Mathematica qui prend en entrée un quadruplet (a, b, c, d) de réels et qui renvoie un quadruplet (k, ℓ, t, t') tel que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on ait $f_A = k\rho_t + \ell\sigma_{t'}$.

IV Cercle propre et réduction

IV.A – Cercle propre sécant avec l'axe des abscisses

Dans cette section on considère un cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω et de rayon r non nul, sécant avec l'axe des abscisses.

On note L_1 et L_2, de coordonnées respectives $(\lambda_1, 0)$ et $(\lambda_2, 0)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$, les deux points d'intersection de $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec l'axe des abscisses.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de cercle propre égal à $\mathcal{C}(\Omega, r)$. On conserve les notations E, F, G, H de **III.D**.

IV.A.1) Montrer que A est diagonalisable.

IV.A.2) Montrer que si $c \neq 0$, alors $(\overrightarrow{L_1E}, \overrightarrow{L_2E})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres pour f_A.

IV.A.3) Lorsque $c = 0$, peut-on donner une base de vecteurs propres pour f_A à l'aide du cercle propre et du rectangle propre ?

IV.A.4) Montrer que le carré du cosinus de l'angle de deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres distinctes est déterminé par le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$, et ne dépend pas du choix d'une matrice A de cercle propre égal $\mathcal{C}(\Omega, r)$ (on pourra, si on le juge utile, introduire la projection orthogonale de Ω sur l'axe des abscisses).

Qu'en est-il si A est symétrique ?

IV.A.5) Caractériser géométriquement f_A lorsque $\Omega = O$, avec $O = (0, 0)$, et $r = 1$.

IV.A.6) Caractériser géométriquement f_A lorsque $\mathcal{CP}_A$ est le cercle de diamètre le segment $[O, I]$ avec $I = (1, 0)$.

IV.B – Cercle propre tangent à l'axe des abscisses

Dans cette section on considère un cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω et de rayon r non nul, tangent à l'axe des abscisses.

On appelle L, de coordonnées $(\lambda, 0)$, le point de contact de $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec l'axe des abscisses.

Soit A une matrice de cercle propre égal à $\mathcal{C}(\Omega, r)$.

BY-NC-SA

IV.B.1) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

IV.B.2) Peut-on donner un vecteur propre à l'aide des points L, E, F, G et H ?

IV.B.3) Que peut-on dire des matrices dont le cercle propre est tangent à l'axe des abscisses et de centre situé sur l'axe des ordonnées ?

IV.B.4) Montrer qu'il existe un unique réel non nul α tel que A soit directement orthogonalement semblable à la matrice $T_{\lambda,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Préciser α à l'aide des éléments de la matrice A.

Où peut-on retrouver ce nombre sur le cercle propre ?

IV.B.5) Montrer qu'il existe une base orthonormée directe (e_1, e_2) du plan telle que l'on ait, pour tout u de $\mathbb{R}^2$, $f_A(u) = \lambda u + \alpha(e_2|u)e_1$.

IV.C – Cercle propre disjoint de l'axe des abscisses

Dans cette section on considère un cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω et de rayon $r \geqslant 0$ disjoint de l'axe des abscisses.

On note K le projeté orthogonal de Ω sur l'axe des abscisses.

Soit A une matrice de cercle propre égal à $\mathcal{C}(\Omega, r)$.

IV.C.1) Existe-t-il une matrice P de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale ?

Existe-t-il une matrice P de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure ?

IV.C.2) Déterminer les points de $\mathcal{C}(\Omega, r)$ en lesquels la tangente à $\mathcal{C}(\Omega, r)$ contient K.

IV.C.3) Si U est l'un de ces points, exprimer les valeurs propres de A, considérée comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à l'aide de l'abscisse de K et de la distance KU de K à U.

IV.D – Deux exemples

Dans cette section, on considère dans $\mathbb{R}^2$ un cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω et de rayon r et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de cercle propre égal à $\mathcal{C}(\Omega, r)$.

IV.D.1) Dans cette question, $\Omega = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $r = |\beta|$ et $E = (\alpha + |\beta|, \beta)$.

Préciser les valeurs propres de A et donner une matrice B dont les termes non diagonaux sont opposés et qui soit directement orthogonalement semblable à A, ainsi qu'une décomposition orthogonale de l'endomorphisme canoniquement associé à B.

IV.D.2) Dans cette question $\Omega = (0, \alpha)$ avec $\alpha > 0$ et $r = \alpha/2$.

Préciser les valeurs propres A et donner une matrice B dont les éléments non diagonaux sont opposés et qui soit directement orthogonalement semblable à A, ainsi qu'une décomposition orthogonale de l'endomorphisme canoniquement associé à B.

Faire un dessin dans le cas où $\alpha = 6$ illustrant les questions **IV.C.2** et **IV.C.3**.

V Quadrique propre

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on note $\psi_A(x, y, z)$ la partie réelle du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a - x - \mathrm{i}\, z & b - y \\ c + y & d - x - \mathrm{i}\, z \end{pmatrix}$, où i est l'affixe complexe du point $J = (0, 1)$.

V.A –

V.A.1) Calculer $\psi_A(x, y, z)$.

V.A.2) Préciser la nature de la quadrique $\mathcal{H}_A$ d'équation $\psi_A(x, y, z) = 0$.

V.B –

V.B.1) Préciser l'intersection de $\mathcal{H}_A$ avec le plan d'équation $z = 0$.

V.B.2) Préciser l'intersection Z_A de $\mathcal{H}_A$ avec le plan d'équation $x = (a + d)/2$.

V.C –

V.C.1) Si la matrice A a deux valeurs propres non réelles, comment voir les valeurs propres de A sur $\mathcal{H}_A$? (On pourra s'intéresser à l'intersection de Z_A avec le plan d'équation $y = 0$.)

Peut-on voir une base de vecteurs propres à l'aide de $\mathcal{H}_A$?

V.C.2) Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ faire un dessin en perspective illustrant ce qui précède.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI 2013

4 heures Calculatrices autorisées

Soit n un entier naturel non nul. Le but de ce problème est d'étudier les solutions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, de l'équation différentielle d'ordre n

$$\mathcal{E}_n : y^{(n)} - y = 0$$

L'exposant entre parenthèses indique un ordre de dérivation ; par exemple, pour $n = 2$ on obtient l'équation différentielle $\mathcal{E}_2 : y'' - y = 0$.

Les solutions de $\mathcal{E}_n$ sont, par définition, les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient : $\forall t \in \mathbb{R},\ y^{(n)}(t) - y(t) = 0$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_n$, *à valeurs complexes* tandis que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des solutions *à valeurs réelles*.

On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est *développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ s'il existe une série entière de rayon de convergence infini telle que f coïncide, sur $\mathbb{R}$, avec la somme de cette série entière.

I Cas $n = 1$ et méthode d'Euler

I.A – La méthode d'Euler

Pour cette **sous-partie I.A** on considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution que l'on va chercher à approximer sur $[0, 1]$. Soit N un entier naturel non nul et fixé jusqu'à la **question I.C.3**. On pose $\tilde{y}_0 = 1$ et, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$,

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \frac{1}{N} f\left(\tilde{y}_k\right) \tag{I.1}$$

La *méthode d'Euler*, que nous allons étudier, consiste à construire une approximation de y, affine par morceaux sur $[0, 1]$ et valant $\tilde{y}_k$ au temps k/N.

I.A.1) Rappeler brièvement l'idée menant à la définition (**I.1**).

I.A.2) En supposant f connue, écrire une procédure Maple ou Mathématica qui à N associe les éléments de la suite $(\tilde{y}_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$.

I.B – Préliminaires au I.C

Désormais nous allons nous concentrer sur un problème de Cauchy associé à $\mathcal{E}_1$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons vérifier que la suite des approximations donnée par la méthode d'Euler converge, dans un sens à préciser, vers la solution de $\mathcal{C}$ sur $[0, 1]$.

I.B.1) Justifier sans calculs que $\mathcal{C}$ a une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer explicitement cette solution y.

I.B.2) La notation $E[t]$ désignant la partie entière entière d'un réel t, prouver que

$$\frac{E[t]}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$$

I.C – Mise en œuvre de la méthode d'Euler pour $\mathcal{E}_1$

On souhaite approximer la solution y du problème de Cauchy $\mathcal{C}$ par la méthode d'Euler. On définit donc $\tilde{y}_0 = 1$ et, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$,

$$\tilde{y}_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \tilde{y}_k$$

I.C.1) Expliquer rapidement le lien entre la définition ci-dessus et la démarche du **I.A**.

BY-NC-SA

I.C.2) Exprimer simplement $\tilde{y}_k$ en fonction de k et N pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

I.C.3) On définit l'application $y_N : [0,1] \to \mathbb{R}$ suivante

– pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $y_N\left(\dfrac{k}{N}\right) = \tilde{y}_k$;

– pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, y_N est une fonction polynôme de degré au plus 1 sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}\right]$.

a) Dans un repère tel que l'axe des x décrit $[0,1]$, celui des y décrit $[0,3]$, dessiner les graphes de la solution y de $\mathcal{C}$ et des fonctions y_2, y_3.

b) Prouver que pour tout $t \in \left[\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}\right]$ on a

$$y_N(t) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k \left(t + 1 - \frac{k}{N}\right)$$

c) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$

$$y_N(t) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{E[Nt]} \left(t + 1 - \frac{E[Nt]}{N}\right)$$

I.C.4) Prouver que

$$\forall t \in [0,1] \qquad y_N(t) \xrightarrow[N \to +\infty]{} y(t)$$

où y désigne la solution de $\mathcal{C}$: on dit que la suite des approximations $(y_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ *converge simplement* vers la solution réelle du problème.

I.D – Étude d'un cas particulier avec second membre

Dans cette partie seulement, on travaille avec un second membre non nul.

I.D.1) Déterminer l'unique solution h du système

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) - h(t) = \exp(-t)\,(\cos t - 2\sin t) \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

I.D.2) Montrer que h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et calculer les coefficients de ce développement en fonction des $b_n = \sin\left(\dfrac{3n\pi}{4}\right)$.

I.D.3) Tracer rapidement la représentation graphique de h sur $[0, 2\pi]$.

I.D.4) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer I, en détaillant les calculs.

II Généralités

II.A – Quelques propriétés qualitatives des solutions de $\mathcal{E}_n$

Ici $n \geqslant 1$ est un entier quelconque.

II.A.1) Si $n = 2$, donner les solutions réelles, puis complexes de $\mathcal{E}_2 : y'' - y = 0$.

On rappelle que, dans le cas général, il n'existe pas de méthode au programme permettant de résoudre simplement l'équation $\mathcal{E}_n$; l'utilisation de l'équation caractéristique associée est, en particulier, à proscrire.

II.A.2) Montrer que toute solution y de $\mathcal{E}_n : y^{(n)} - y = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II.A.3) Montrer que si y est solution de $\mathcal{E}_n$ alors y' est solution de $\mathcal{E}_n$.

II.A.4) La connaissance de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ implique celle de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Prouver que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

– y est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;

– y est la partie réelle d'une fonction $\tilde{y} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

II.B – Structure de l'ensemble des solutions

II.B.1) Prouver que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, muni des lois usuelles sur les applications, a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

BY-NC-SA

II.B.2) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞. On pose pour tout t de $\mathbb{R}$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

définissant ainsi une application $t \mapsto Y(t)$ qui est C^∞ de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n, ensemble identifié à $\mathbb{R}^n$.

Montrer que l'on a $y \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $t \mapsto Y(t)$ est solution d'un système différentiel

$$Y' = AY$$

où A est une matrice carrée d'ordre n, dont on explicitera les coefficients.

II.B.3) Montrer que l'application

$$\theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ y & \mapsto & \big(y(0), y'(0), y''(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\big) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

En déduire que $\mathcal{S}_n(K)$ est un K-espace vectoriel de dimension n pour $K = \mathbb{R}$. On admettra qu'il en va de même pour $K = \mathbb{C}$.

III Les cas $n = 3$ et $n = 4$

III.A – Le cas $n = 3$: méthode de la variation de la constante

Dans cette partie, on fixe $n = 3$ de sorte que l'on étudie $\mathcal{E}_3 : y''' - y = 0$.

III.A.1) Montrer que la fonction exponentielle $t \mapsto \exp(t)$ est une solution de $\mathcal{E}_3$ sur $\mathbb{R}$.

III.A.2) Pour toute fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ on note $z : t \mapsto y(t)\exp(-t)$ qui est aussi de classe C^∞.

Prouver que $\mathcal{E}_3$ est équivalente à $\mathcal{E}' : z''' + 3(z'' + z') = 0$.

III.A.3) Donner les solutions à valeurs complexes, puis réelles de $\mathcal{E}'$.

On pourra poser $Z = z'$.

III.A.4) En déduire les solutions à valeurs complexes, puis réelles de $\mathcal{E}_3$.

Existe-t-il une solution réelle, 2π-périodique et non nulle ?

III.B – Le cas $n = 4$: recherche de séries entières solutions

Dans cette partie, on fixe $n = 4$ de sorte que l'on étudie $\mathcal{E}_4 : y^{(4)} - y = 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit

$$A(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k}}{(4k)!} \qquad B(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} \qquad C(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} \qquad D(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{4k+3}}{(4k+3)!}$$

III.B.1) Déterminer le domaine de définition de ces séries entières et reconnaître, en justifiant, les dérivées B', C' et D'.

III.B.2) On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\sigma_k = 1 + (-1)^k + i^k + (-i)^k$.

a) Montrer que : k impair $\Rightarrow \sigma_k = 0$.

b) En déduire que σ_k est non nul si et seulement si k est un multiple de 4.

c) Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$A(t) = \frac{1}{4}\left(\exp(t) + \exp(-t) + \exp(it) + \exp(-it)\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} t + \cos t\right)$$

d) Donner des expressions analogues pour $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$.

III.B.3) Soit $y \in \mathcal{S}_4(\mathbb{C})$ une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$, de développement noté

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

Donner une relation de récurrence reliant a_{k+4} et a_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = a_0 A(t) + a_1 B(t) + 2a_2 C(t) + 6a_3 D(t)$$

BY-NC-SA

puis qu'il existe $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = z_1 \operatorname{ch}(t) + z_2 \operatorname{sh}(t) + z_3 \cos(t) + z_4 \sin(t)$$

III.B.4) Montrer, à l'aide de la **question II.B.3**, que $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \cos, \sin)$ est une base de $\mathcal{S}_4(\mathbb{C})$ puis en déduire la forme générale des éléments de $\mathcal{S}_4(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$.

III.B.5) Montrer que les solutions de $\mathcal{E}_4$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner le développement en série entière de la solution de $\mathcal{E}_4$ vérifiant

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = -y'''(0) = 1$$

IV Retour au cas général

Ici, $n \geqslant 1$ est un entier quelconque. On étudie donc l'équation $\mathcal{E}_n : y^{(n)} - y = 0$.

IV.A – Expression des solutions dans le cas général

IV.A.1) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ et

$$y_k : t \mapsto \exp\left(\omega^k t\right)$$

Prouver que : $\forall k \in \mathbb{Z},\ y_k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

IV.A.2) Prouver que la famille d'applications $(y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre.

IV.A.3) Donner une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, en déduire la forme générale des éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

IV.A.4) Justifier que toutes les solutions de $\mathcal{E}_n$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

IV.B – Étude des solutions 2-périodiques de $\mathcal{E}_n$

On étudie ici la possibilité de solutions 2π-périodiques, à valeurs réelles pour $\mathcal{E}_n$. Soit y une telle solution de $\mathcal{E}_n$.

IV.B.1) Soit $k \in \mathbb{N}$. On notera par $a_k(f)$ et $b_k(f)$ les coefficients de Fourier usuels d'une fonction f, 2π-périodique, avec la convention $b_0(f) = 0$.

Prouver, pour tout entier naturel k, les relations

$$\begin{cases} a_k(y') = k b_k(y) \\ b_k(y') = -k a_k(y) \end{cases}$$

IV.B.2) On pose $c_0(y) = a_0(y)$ et

$$\forall k \geqslant 1, \quad \begin{cases} c_k(y) = \dfrac{1}{2}(a_k(y) - i b_k(y)) \\ c_{-k}(y) = \dfrac{1}{2}(a_k(y) + i b_k(y)) \end{cases}$$

Prouver que $c_k(y') = ikc_k(y)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, en déduire que tous les $c_k(y)$ sont nuls dans le cas où n est impair.

IV.B.3) Rappeler le théorème de Dirichlet (hypothèses, conclusion).

L'utiliser pour prouver l'assertion : si n est impair alors l'unique solution 2π-périodique à valeurs réelles de $\mathcal{E}_n$ est la fonction nulle.

Que dire si n est pair ?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — 4 heures — Calculatrices autorisées — TSI 2013

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (respectivement complexes), I_n la matrice unité et $\mathcal{O}_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on note $\mathrm{Det}(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A, égale à la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

I Réduction des matrices réelles d'ordre 2

Soit A une matrice carrée réelle de taille 2 : $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

I.A – Généralités

I.A.1) Montrer que $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \mathrm{Det}(A)$.

I.A.2) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\mathrm{tr}(A)^2 - 4\,\mathrm{Det}(A) \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathbb{A} = {}_0\mathbb{I}_2$$

I.A.3) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\mathrm{tr}(A)^2 - 4\,\mathrm{Det}(A) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbb{A} = {}_0\mathbb{I}_2$$

I.B – Applications

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{k+1} = 4u_k - 2v_k \\ v_{k+1} = u_k + v_k \end{cases}$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$.

I.B.1) Trouver une matrice A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel k : $X_{k+1} = AX_k$.

I.B.2) Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer X_k en fonction de A, X_0 et k.

I.B.3) Prouver que A est diagonalisable puis déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

I.B.4) Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer les coefficients de A^k en fonction de k.

I.B.5) En déduire l'expression de u_k et v_k en fonction de k.

II Réduction de matrices d'ordre 3 ou 4

II.A – Le cas n = 3

On définit la matrice J par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.A.1) Calculer J^2 et J^3.

Soit k dans $\mathbb{N}$. Préciser J^k en fonction de k.

BY-NC-SA

II.A.2) On note j le nombre complexe égal à $e^{2i\pi/3}$.

Rappeler sans justification la valeur de $1 + j + j^2$.

II.A.3) Déterminer le polynôme caractéristique de J ainsi que ses valeurs propres.

II.A.4) Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que :

$$J = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \bar{j} \end{pmatrix} P^{-1}$$

II.A.5) Soient trois nombres complexes a, b et c. On pose

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

a) Exprimer $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et des matrices I_3, J et J^2.

b) En déduire que $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dans une base indépendante du choix des valeurs des complexes a, b et c.

c) Préciser les valeurs propres de la matrice $A(a,b,c)$.

d) Exprimer le déterminant de $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et du nombre complexe j sous la forme d'un produit.

II.A.6) On pose $E = \{A(a,b,c)\,;(a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Donner la dimension de E en justifiant avec soin.

II.B – Le cas $\mathbf{n \geqslant 3}$ *quelconque*

Dans cette question, n désigne un entier supérieur ou égal à 3 : $n \geqslant 3$.

On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par : $u(e_2) = e_1, u(e_3) = e_2, \ldots, u(e_n) = e_{n-1}$ et $u(e_1) = e_n$, c'est-à-dire

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\},\ \text{on a } u(e_k) = e_{k-1} \text{ tandis que } u(e_1) = e_n$$

II.B.1) On note U la matrice de u dans la base canonique e de $\mathbb{C}^n$. Expliciter la matrice U.

II.B.2) On note ω une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité et x_ω le vecteur de $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$x_\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k$$

Calculer $u(x_\omega)$ en fonction de ω et de x_ω.

II.B.3) Montrer que u est diagonalisable. On précisera une base de vecteurs propres pour u.

II.B.4) Que peut-on dire de u^n ?

II.C – Le cas $\mathbf{n = 4}$ *quelconque*

Dans toute cette partie, on choisit $n = 4$.

II.C.1) Expliciter U, U^2, U^3, U^4 où U est la matrice définie dans la question précédente.

II.C.2) On note (a,b,c,d) une famille de 4 complexes et on pose :

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Montrer que V est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Donner une base de vecteurs propres et préciser les valeurs propres de la matrice V en fonction des nombres complexes a, b, c, d et i.

BY-NC-SA

III Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_0)$ le polynôme caractéristique de A.

Le but de cette partie est de montrer que A annule son polynôme caractéristique, c'est-à-dire que :

$$A^n - a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_0 I_n = \mathcal{O}_n$$

III.A – Justifier l'existence d'une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telles que $A = PTP^{-1}$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de T.

On note $E_1, \ldots, E_n$ les matrices colonnes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Ainsi $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de T est : $\chi_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$.

III.B – Montrer que T et A ont le même polynôme caractéristique.

III.C – Vérifier que, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, on a :

$$(T - \lambda_i I_n)(T - \lambda_j I_n) = (T - \lambda_j I_n)(T - \lambda_i I_n)$$

III.D – Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$(T - \lambda_{k+1} I_n)E_{k+1} \in Vect\{E_1, \ldots, E_k\}$$

III.E – On pose, pour tout entier k compris entre 1 et n : $M_k = (T - \lambda_1 I_n)(T - \lambda_2 I_n)\ldots(T - \lambda_k I_n)$, que l'on peut noter $M_k = \prod_{j=1}^{k}(T - \lambda_j I_n)$ puisque les matrices du produit commutent deux à deux.

Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et n, on a : $M_k E_k = 0$.

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur k.

III.F – En déduire que $\prod_{j=1}^{n}(T - \lambda_j I_n) = \mathcal{O}_n$ puis que $\prod_{j=1}^{n}(A - \lambda_j I_n) = \mathcal{O}_n$.

On observe que le résultat attendu en découle puisque $\chi_T = \chi_A$.

IV Méthodes numériques de calcul du polynôme caractéristique et des valeurs propres d'une matrice réelle

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_0)$.

IV.A – Le calcul du polynôme caractéristique

Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne.

On pose $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$.

IV.A.1) Montrer que $A^n X_0 = a_{n-1}A^{n-1}X_0 + a_{n-2}A^{n-2}X_0 + \ldots + a_0 X_0$.

IV.A.2) En déduire que X est solution d'un système linéaire de la forme : $\tilde{A}X = B$ où $\tilde{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera les colonnes et B est une matrice colonne que l'on précisera.

IV.A.3) Que peut-on dire de ce système linéaire si la famille $(A^{n-1}X_0, A^{n-2}X_0, \ldots, X_0)$ est libre ?

BY-NC-SA

IV.B – Le calcul approché des valeurs propres

Dans cette partie, on suppose que A admet n valeurs propres réelles distinctes telles que :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$$

On considère l'ensemble F des suites réelles $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} & \text{arbitraires} \\ y_{k+n} = a_{n-1}y_{k+n-1} + a_{n-2}y_{k+n-2} + \ldots + a_0 y_k & \text{pour tout entier } k \geqslant 0 \end{cases}$$

IV.B.1) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

IV.B.2) Montrer que, pour tout entier j compris entre 1 et n, la suite $(\lambda_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

Dans la suite, on admet que F est de dimension finie avec $\dim F = n$.

On admet aussi que la famille $((\lambda_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_n^k)_{k\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de l'espace vectoriel des suites de réels.

Soit une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F.

IV.B.3) Justifier l'existence d'une famille de n réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ telle que, pour tout entier k :

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k$$

IV.B.4) On choisit $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ pour que α_1 soit non nul.

a) Donner un équivalent simple de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quand k tend vers $+\infty$.

b) En déduire que y_k est non nul à partir d'un certain rang.

c) Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{y_{k+1}}{y_k} = \lambda_1$.

IV.B.5) Une fois obtenue λ_1, comment peut-on construire une suite qui converge vers λ_2 ? On ne demande pas de justification.

IV.C – Illustration sur un exemple

Dans cette partie, on choisit :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

IV.C.1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer les deux valeurs propres λ_1, λ_2 avec $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

IV.C.2) Préciser la relation de récurrence vérifiée par les suites de l'espace F associé à la matrice A.

IV.C.3) En prenant $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, écrire des instructions en Maple ou Mathematica permettant de calculer les 10 premiers termes de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

IV.C.4) Calculer ces 10 premiers termes et déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}$ soit une valeur approchée de λ_1 à 10^{-1} près.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — 4 heures — Calculatrices autorisées — MP — 2014

L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices.

Dans tout le problème, on fixe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$) l'espace des matrices carrées à coefficients réels (respectivement complexes) de taille $d \times d$. Si i et j sont deux entiers entre 1 et d, on note $A_{i,j}$ le coefficient placé ligne i et colonne j dans la matrice A. On rappelle que $A^0 = I_d$. On note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de la matrice A.

Les parties I, II et III sont indépendantes des parties IV et V.

I Une norme utile sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

I.A – Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'application $f_P : A \mapsto P(A)$ est une fonction continue de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

I.B – Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA \times B)$ est un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite du problème, on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

I.C – Pour tous entiers i, j entre 1 et d et toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, comparer $|A_{i,j}|$ et $\|A\|$.

I.D – Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$, $\|A \times B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

I.E – Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, comparer $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$.

II Séries entières de matrices

Dans cette partie, on se donne une série entière à coefficients complexes $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif, éventuellement égal à $+\infty$.

II.A – Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|A\| < R\}$. Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto \varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$.

II.B – Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $\|A\| < R$.

II.B.1) Établir l'existence d'un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ soit libre et la famille $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r}$ soit liée.

II.B.2) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un r-uplet $(\lambda_{0,n}, ..., \lambda_{r-1,n})$ dans $\mathbb{R}^r$ tel que

$$A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$$

II.B.3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leqslant C\|A^n\|$$

II.B.4) En déduire que, pour tout entier k entre 0 et $(r-1)$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \lambda_{k,n}$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

II.B.5) Conclure qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(A) = P(A)$ et $\deg P < r$.

II.B.6) Déterminer ce polynôme P lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.C – Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = P(A)$$

BY-NC-SA

III Deux applications

III.A – Première application : une formule de trigonométrie matricielle

III.A.1) Rappeler l'énoncé du théorème permettant de faire le produit de deux séries de nombres complexes.

On admet dans la suite de la partie III que le résultat valable pour les séries de nombres complexes est encore valable pour des séries de matrices dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

III.A.2) Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$ tel que A et B commutent, montrer que $\exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B) = \exp(\mathrm{i}(A+B))$.

III.A.3) Pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on pose

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Montrer

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad \cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_d$$

III.B – Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton

On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

III.B.1) Pour R assez grand, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_d - A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, et que son inverse est la matrice

$$(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-n} A^n$$

III.B.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout R assez grand, la matrice

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_d - A)^{-1} \, \mathrm{d}\theta$$

vaut A^{n-1}.

III.B.3) On considère le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - X \cdot I_d) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

Montrer que pour R assez grand :

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \chi_A(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_d - A)^{-1} \, \mathrm{d}\theta$$

III.B.4) En déduire que $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.

On pourra faire intervenir des comatrices.

IV Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $M \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $f :]-\infty, M[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \left]-\infty, \frac{M}{2}\right[^2, \quad 2f(x+y) = f(2x) + f(2y) \tag{IV.1}$$

IV.A – Soit α un nombre strictement inférieur à $\dfrac{M}{2}$ et F la primitive de f s'annulant en α. Montrer que pour tous x et y dans $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$, avec $y \neq \alpha$, on a :

$$f(2x) = 2\frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y - \alpha}$$

IV.B – En déduire que la fonction f est de classe C^∞ sur $]-\infty, M[$.

IV.C – Montrer que $f'' = 0$, puis que l'ensemble des solutions continues de l'équation (IV.1) forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une base.

BY-NC-SA

V Étude d'une autre fonction matricielle

Dans cette partie, on se donne une fonction $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on définit une fonction $f_\xi : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad f_\xi(A) = \Big(\xi(A_{i,j})\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$$

On se propose de déterminer les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad A \text{ inversible } \Rightarrow f_\xi(A) \text{ inversible} \tag{V.1}$$

V.A – Déterminer les fonctions continues ξ vérifiant la condition (V.1) lorsque $d = 1$.

On se place dorénavant dans le cas $d \geqslant 2$.

On se donne une fonction continue ξ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (V.1).

V.B – Montrer

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad ad \neq bc \Rightarrow \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$$

On pourra considérer la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{d-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}$.

V.C – En déduire que la fonction ξ est injective, puis qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

V.D – Montrer que la fonction ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

V.E – Le but de cette question est de montrer $\xi(0) = 0$.

V.E.1) Montrer que si $\xi(0) \neq 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$.

V.E.2) Conclure.

V.F – Soit $\eta = \xi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la bijection $\xi : \mathbb{R} \to I$. Montrer que là où cela est défini

$$(\eta(xy))^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$$

V.G – On suppose dans cette question que la fonction η prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[$.

V.G.1) Montrer que la fonction $f = \ln \circ \eta \circ \exp$ vérifie l'équation (IV.1) sur un intervalle $]-\infty, M[$, avec M (éventuellement infini) à préciser en fonction de l'intervalle I.

V.G.2) En déduire que sur l'intervalle $I \cap]0, +\infty[$ la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_1 x^{\alpha_1}$$

avec deux constantes $K_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$.

V.G.3) Montrer que sur l'intervalle $I \cap]-\infty, 0[$ la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_2 (-x)^{\alpha_2}$$

avec deux constantes $K_2 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

V.G.4) Montrer que $I = \mathbb{R}$ puis que la fonction η est une fonction impaire.

V.H – En déduire dans le cas général que, si $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition (V.1), alors elle est impaire et sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $x \mapsto Cx^\beta$, avec $C \neq 0$ et $\beta > 0$.

V.I – Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice $A_\lambda \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 hors de la diagonale et que des λ sur la diagonale.

V.J – En déduire toutes les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (V.1).

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2014

Polynômes de Tchebychev et de Dickson, applications

I Définitions et propriétés usuelles

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\,\theta)$$

On ne demande pas de justifier l'existence et l'unicité de la famille de polynômes définie par cette relation.

I.A – Polynômes de première espèce

I.A.1) Déterminer T_0, T_1, T_2 et T_3.

I.A.2) En remarquant que pour tout réel θ, on a $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k\, X^{n-2k}$$

Écrire en langage Maple ou Mathematica une fonction T prenant en argument un entier naturel n et renvoyant l'expression développée du polynôme T_n.

I.A.3) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \tag{I.1}$$

En déduire, pour tout entier naturel n, le degré et le coefficient dominant de T_n. Retrouver ce résultat avec l'expression de la question I.A.2.

I.A.4) Montrer que, pour tout entier naturel n, le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples appartenant à $]-1,1[$. Déterminer les racines de T_n.

I.B – Polynômes de deuxième espèce

On définit les polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Tchebychev de deuxième espèce par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \frac{1}{n+1}\,T'_{n+1}$$

I.B.1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}, \qquad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta}$$

I.B.2) En déduire les propriétés suivantes :

a) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence (I.1) que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Pour tout entier naturel n, le polynôme U_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples appartenant à $]-1,1[$. Déterminer les racines de U_n.

II Arithmétique des polynômes de Tchebychev

II.A – Division euclidienne

II.A.1) Montrer que

$$\begin{cases} T_m \cdot T_n = \dfrac{1}{2}\left(T_{n+m} + T_{n-m}\right) & \text{pour tous entiers } 0 \leqslant m \leqslant n \\ T_m \cdot U_{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(U_{n+m-1} + U_{n-m-1}\right) & \text{pour tous entiers } 0 \leqslant m < n \end{cases}$$

II.A.2) Pour m et n entiers naturels tels que $m \leqslant n$, on se propose de déterminer le quotient $Q_{n,m}$ et le reste $R_{n,m}$ de la division euclidienne de T_n par T_m.

BY-NC-SA

a) On suppose $m < n < 3m$. Montrer que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \qquad \text{et} \qquad R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$$

b) Déterminer $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

c) On suppose que $m > 0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair. Montrer qu'il existe un unique entier $p \geqslant 1$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que

$$Q_{n,m} = 2\left(T_{n-m} - T_{n-3m} + \cdots + (-1)^{p-1} T_{n-(2p-1)m}\right) \qquad \text{et} \qquad R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}$$

II.B – Plus grand commun diviseur

Dans toute cette sous-partie II.B, on fixe deux entiers naturels m et n.

II.B.1) Soit h le pgcd dans $\mathbb{N}$ de $m+1$ et $n+1$. En examinant les racines communes à U_n et U_m, montrer que U_{h-1} est un pgcd dans $\mathbb{R}[X]$ de U_n et U_m.

II.B.2) Soit $g > 0$ le pgcd de m et n. On pose $m_1 = m/g$ et $n_1 = n/g$.

a) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_g est un pgcd de T_n et T_m.

b) Montrer que si l'un des deux entiers m_1 ou n_1 est pair, alors T_n et T_m sont premiers entre eux.

c) Que peut-on dire des pgcd de T_n et T_m lorsque m et n sont impairs ? Lorsque n et m sont deux puissances de 2 distinctes ?

III Un théorème

Dans cette partie, on munit l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes complexes de la loi de composition interne associative donnée par la composition, notée $\circ$. Plus précisément, étant donné P, $Q \in \mathbb{C}[X]$, si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$, la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant nulle à partir d'un certain rang, on a

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k Q^k$$

On dit que les polynômes P et Q commutent si $P \circ Q = Q \circ P$. On note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des polynômes complexes qui commutent avec le polynôme P

$$\mathcal{C}(P) = \{Q \in \mathbb{C}[X],\ P \circ Q = Q \circ P\}$$

On cherche dans cette partie les familles $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes complexes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg F_n = n \qquad \text{et} \qquad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \qquad F_n \circ F_m = F_m \circ F_n \tag{III.1}$$

Il est clair que la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient.

On note G l'ensemble des polynômes complexes de degré 1, et pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $P_\alpha = X^2 + \alpha$.

III.A – Préliminaires

III.A.1) Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (III.1). On pourra comparer $T_n \circ T_m$ et T_{mn}.

III.A.2) Vérifier que G est un groupe pour la loi $\circ$.

L'inverse pour la loi $\circ$ d'un élément U de G sera noté U^{-1}.

III.B – Commutant de X^2 et T_2

III.B.1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit Q un polynôme complexe non constant qui commute avec P_α. Montrer que Q est unitaire.

III.B.2) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P_α. Déterminer $\mathcal{C}(X^2)$.

III.B.3) Soit P un polynôme complexe de degré 2. Justifier l'existence et l'unicité de $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$. Déterminer ces deux éléments lorsque $P = T_2$.

III.B.4) Justifier que $\mathcal{C}(T_2) = \{-1/2\} \cup \{T_n, n \in \mathbb{N}\}$.

III.C –

III.C.1) Montrer que les seuls complexes α tels que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré trois sont 0 et -2.

III.C.2) En déduire le théorème de Block et Thielmann : si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (III.1), alors il existe $U \in G$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = U^{-1} \circ X^n \circ U \qquad \text{ou} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = U^{-1} \circ T_n \circ U$$

BY-NC-SA

IV Puissances dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

Dans toute cette partie, on note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, muni de son addition et de sa multiplication usuelle.

IV.A – Justifier qu'un élément M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$.

IV.B – On introduit les polynômes de Dickson de première et deuxième espèce, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définis sous la forme de fonctions polynomiales de deux variables par

$$D_0(x,a) = 2 \qquad D_1(x,a) = x \qquad E_0(x,a) = 1 \qquad E_1(x,a) = x$$

puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D_{n+2}(x,a) = x\,D_{n+1}(x,a) - a\,D_n(x,a) \qquad \text{et} \qquad E_{n+2}(x,a) = x\,E_{n+1}(x,a) - a\,E_n(x,a)$$

Justifier la relation suivante avec les polynômes de Tchebychev

$$\forall (x,a) \in \mathbb{C}^2, \qquad D_n(2xa, a^2) = 2a^n T_n(x) \quad \text{et} \quad E_n(2xa, a^2) = a^n U_n(x)$$

ainsi que les deux relations suivantes, valables pour tout entier naturel n et tout $(x,a) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

$$D_n\left(x + \frac{a}{x}, a\right) = x^n + \frac{a^n}{x^n} \qquad \text{et} \qquad \left(x - \frac{a}{x}\right) E_n\left(x + \frac{a}{x}, a\right) = \left(x^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}\right) \tag{IV.1}$$

IV.C – Dans cette sous-partie, on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément A de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ soit une puissance n-ième dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire pour qu'il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $A = B^n$. Dans toute la suite, on notera

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \tau = \operatorname{Tr} A \qquad \delta = \det A$$

IV.C.1) Soit $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. On note, *dans cette question uniquement*, $\sigma = \operatorname{Tr} B$ et $\nu = \det B$. Montrer pour tout $n \geqslant 2$, l'égalité

$$B^n = E_{n-1}(\sigma,\nu) \cdot B - \nu\, E_{n-2}(\sigma,\nu) \cdot I_2$$

où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

Établir que $\operatorname{Tr}(B^n) = D_n(\sigma,\nu)$.

IV.C.2) En déduire que si A est une puissance n-ième ($n \geqslant 2$) dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, alors il existe $\sigma \in \mathbb{Z}$ et $\nu \in \{-1,1\}$ tels que

i. $E_{n-1}(\sigma,\nu)$ divise b, c et $a-d$. On justifiera brièvement que $E_{n-1}(\sigma,\nu)$ est bien un entier.

ii. $\tau = D_n(\sigma,\nu)$ et $\delta = \nu^n$.

IV.C.3) On va maintenant établir la réciproque.

Soit A un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour lequel il existe $\sigma \in \mathbb{Z}$ et $\nu \in \{-1,1\}$ vérifiant les deux conditions précédentes i et ii. Pour simplifier, on note $p = E_{n-1}(\sigma,\nu)$. On définit alors une matrice $B = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ avec

$$r = \frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{a-d}{p}\right) \qquad s = \frac{b}{p} \qquad t = \frac{c}{p} \qquad u = \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{a-d}{p}\right)$$

a) En introduisant une racine complexe du polynôme $X^2 - \sigma X + \nu$ et à l'aide de (IV.1), montrer que

$$\tau^2 - 4\delta = p^2(\sigma^2 - 4\nu) \qquad \text{puis} \qquad ru - st = \nu$$

En déduire que B appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

b) Montrer que $A = B^n$.

IV.C.4) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ est un cube dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer une matrice $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $B^3 = A$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — PSI — 2014

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

– On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

– On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé canonique $\mathcal{R}$, d'origine O.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes ; les parties II et III utilisent les notations $R(z)$ et $V_n(z)$ introduites dans la première partie.

I Première partie

I.A – Soit z un nombre complexe, de partie réelle x et de partie imaginaire y, tels que $(x,y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$. On note

$$\theta(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{et} \qquad R(z) = \frac{z+|z|}{\sqrt{2\left(\mathrm{Re}(z)+|z|\right)}}$$

I.A.1) Justifier que θ et R sont bien définies.

I.A.2) Lorsque z vaut successivement $z_1 = 4$, $z_2 = 2\mathrm{i}$ et $z_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, calculer $R(z)$, $\theta(z)$ et $\left(R(z)\right)^2$.

I.A.3) Vérifier que $\theta(z) \in]-\pi,\pi[$ et que $R(z) \in \mathcal{P} = \left\{Z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(Z) > 0\right\}$.

I.A.4) Représenter sur une figure le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $|z|$ et les points M d'affixe z et B d'affixe $-|z|$.

En considérant des angles bien choisis, montrer que

$$\theta(z) = \mathrm{Arg}(z) = 2\,\mathrm{Arg}\left(z+|z|\right)$$

où $\mathrm{Arg}(z)$ désigne la détermination principale de l'argument du nombre complexe z.

I.A.5) Déterminer $\left[R(z)\right]^2$, $\theta \circ R(z)$ et $|z|^{1/2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(z)/2}$ en fonction de z, $R(z)$ et $\theta(z)$.

I.A.6) Résoudre à l'aide de R l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

I.A.7) En déduire que R est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans $\mathcal{P}$. Préciser sa bijection réciproque.

Dans la suite du problème, on prolonge R à $\mathbb{C}$ en posant $R(x) = \mathrm{i}\sqrt{|x|}$ si $x \in \mathbb{R}^-$.

I.B – Soient a et b deux nombres complexes tels que $(a,b) \neq (0,0)$.

On dit qu'une suite complexe $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(E_{a,b})$ si l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} + bu_n$$

I.B.1) On suppose que $a^2 + b \neq 0$. On note $d = R(a^2+b)$. On appelle W la suite $W = \left((a+d)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et W' la suite $W' = \left((a-d)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \mathrm{Vect}(W,W')$.

Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, en fonction de d, W et W'.

I.B.2) On suppose que $a^2 + b = 0$ et $a \neq 0$. On note W et W' les suites $W = \left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $W' = \left(n\,a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \mathrm{Vect}(W,W')$.

Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, en fonction de a, W et W'.

Dans la suite du problème, on note :

- $U(a,b) = \left(U_n(a,b)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $U_0(a,b) = 0$ et $U_1(a,b) = 1$;
- $V_n(z) = U_{n+1}(z,-1)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

I.B.3) Expliciter $V_1(z)$, $V_2(z)$ et $V_3(z)$ et déterminer leurs racines dans $\mathbb{C}$.

BY-NC-SA

I.B.4) Montrer que, pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$V_n(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (2z)^{n-2j} (-1)^j \tag{I.1}$$

On pourra procéder par récurrence.

II Deuxième partie

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note C_z (respectivement Ω_z) l'ensemble des points du plan d'affixe complexe Z tels que $|Z(Z-2z)| = 1$ (respectivement $|Z(Z-2z)| < 1$).

II.A – Dans cette question on suppose que z est un réel noté a.

On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R}'$ de centre O' d'affixe a, déduit de $\mathcal{R}$ par translation.

II.A.1) Montrer qu'une équation de la courbe C_a en « coordonnées polaires (ρ, θ) » dans le repère $\mathcal{R}'$ est

$$\left(\rho^2 + a^2\right)^2 - 4a^2\rho^2 \cos^2\theta = 1$$

II.A.2) Simplifier cette équation lorsque $a = 1$. Étudier et tracer l'allure de la courbe C_1.

II.B – On suppose à nouveau z complexe quelconque.

II.B.1) Justifier que Ω_z est une partie bornée du plan. Est-elle ouverte ? fermée ? compacte ?

II.B.2) Justifier que l'origine O est un point intérieur à Ω_z.

II.C – On reprend dans cette question la notation R introduite dans la première partie à la question I.A.

II.C.1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \neq 1$. On note

$$r = \left|R(z^2-1)\right|,\ s = \left|z + R(z^2-1)\right|,\ t = \left|z - R(z^2-1)\right|,\ h = \max(s,t)$$

Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|V_n(z)| \leqslant \dfrac{h^{n+1}}{r}$.

II.C.2) Que dire du rayon de convergence de la série entière $Z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)\, Z^n$?

On note g_z sa somme.

II.C.3) Lorsque cela a un sens, calculer $(1 - 2zZ + Z^2)\, g_z(Z)$.

II.C.4) Déterminer l'ensemble de définition D_z de la fonction $Z \mapsto \dfrac{1}{1-2zZ+Z^2}$.

II.C.5) Montrer qu'il existe un disque ouvert non vide Δ de centre O inclus dans Ω_z tel que

$$\forall Z \in \Delta, \qquad \frac{1}{1-2zZ+Z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)\, Z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(Z^p\, (2z-Z)^p \Big)$$

II.C.6) En déduire que la fonction de la variable réelle x

$$G_z :\ x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(x^p\, (2z-x)^p \Big)$$

admet un développement limité à tout ordre en 0. On le note

$$G_z(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n) \qquad x \to 0$$

Déterminer les coefficients a_k pour $k \in \mathbb{N}$.

II.C.7) Retrouver alors la relation (I.1).

BY-NC-SA

III Troisième partie

On note :
- α un réel tel que $\alpha > -1/2$;
- E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ et à valeurs réelles ;
- F_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, où $n \in \mathbb{N}$;
- φ_α l'application qui, à toute fonction y de E, associe la fonction

$$\varphi_\alpha(y) \ : \quad t \mapsto (1-t^2)\,y''(t) - (2\alpha+1)\,t\,y'(t)$$

- S_α l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$S_\alpha(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

III.A –

III.A.1) Vérifier que S_α est un produit scalaire sur E.

III.A.2) Justifier que φ_α est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

III.A.3) Montrer que

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad S_\alpha(\varphi_\alpha(f),g) = S_\alpha(f,\varphi_\alpha(g))$$

On pourra calculer la dérivée de $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\,f'(t)$.

III.B – Soit $n \in \mathbb{N}$.

III.B.1) Justifier que φ_α induit sur F_n un endomorphisme et que cet endomorphisme induit (encore noté φ_α) est diagonalisable.

III.B.2) Montrer qu'il existe une base de F_n constituée de vecteurs propres de φ_α de degrés deux à deux distincts.

III.B.3) Vérifier que deux vecteurs propres de φ_α de degrés distincts sont associés à des valeurs propres distinctes.

On pourra s'intéresser au coefficient dominant d'un polynôme judicieux.

III.B.4) Justifier que deux vecteurs propres de φ_α de degrés distincts sont orthogonaux.

III.B.5) Montrer que tout vecteur propre de φ_α de degré supérieur ou égal à 1 s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

III.C – Dans cette partie, on suppose $\alpha = 1$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à S_1.

III.C.1) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme vecteur propre de φ_1 de degré k, de norme 1 et de coefficient dominant positif. On le note T_k.

III.C.2) Soit $t \in]0,\pi[$. Montrer que la fonction

$$H_t : \ x \mapsto \frac{1}{1-2x\,\cos(t)+x^2}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$.

III.C.3) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,\pi[\,, \qquad V_n(\cos t) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t}$$

III.C.4) En dérivant deux fois la fonction $t \mapsto (\sin t)\,V_n(\cos t) - \sin((n+1)t)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est vecteur propre de φ_1.

III.C.5) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n et T_n sont proportionnels. Expliciter le coefficient de proportionnalité.

III.C.6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — PSI — 2014

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels
- $0_{n,p}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $O(n)$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $SO(n)$ le groupe spécial orthogonal, c'est-à-dire le sous-groupe de $O(n)$ formé des matrices dont le déterminant est égal à 1
- Δ_{p+1} la matrice de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ définie par blocs de la façon suivante :

$$\Delta_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & -I_p \end{pmatrix}$$

- $O(1,p)$ l'ensemble des matrices L de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$^tL\Delta_{p+1}L = \Delta_{p+1}$$

où ^tL désigne la transposée de la matrice L

- $O^+(1,p)$ l'ensemble des matrices L de $O(1,p)$ dont le déterminant est égal à 1
- $O^-(1,p)$ l'ensemble des matrices L de $O(1,p)$ dont le déterminant est égal à -1
- $\tilde{O}(1,p)$ l'ensemble des matrices $L = \left(\ell_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p+1}$ de $O(1,p)$ telles que $\ell_{1,1} > 0$.

Dans ce problème, on s'intéresse à l'ensemble $O(1,p)$ pour p entier naturel non nul et en particulier pour $p \in \{1,3\}$. Dans le cas où p est égal à 3, l'ensemble $O(1,p)$ est appelé *groupe de Lorentz*. Il joue un rôle fondamental en mécanique quantique.

I Étude du groupe orthogonal généralisé $O(1,p)$

Dans cette partie on fixe p entier naturel non nul.

I.A – Structure de $O(1,p)$

I.A.1) La matrice Δ_{p+1} appartient-elle à l'ensemble $O(1,p)$? à l'ensemble $O^+(1,p)$?

I.A.2) Montrer que $O(1,p) = O^+(1,p) \cup O^-(1,p)$.

I.A.3) Montrer que l'ensemble $O(1,p)$ est un sous-groupe de $GL_{p+1}(\mathbb{R})$ et que $O^+(1,p)$ est un sous-groupe de $O(1,p)$.

I.A.4) Montrer que, pour toute matrice L élément de $O(1,p)$, sa transposée ^tL est aussi élément de $O(1,p)$.

I.A.5) Montrer que les parties $O(1,p)$, $O^+(1,p)$ et $O^-(1,p)$ de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ sont fermées.

I.B – Endomorphismes préservant une forme quadratique

Soient v et v' deux vecteurs de $\mathbb{R}^{p+1}$. On note V et V' les matrices colonnes, éléments de $\mathcal{M}_{p+1,1}(\mathbb{R})$, des vecteurs v et v' dans la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$.

On définit

$$\varphi_{p+1}(v,v') = {}^tV\Delta_{p+1}V' = v_1v'_1 - \sum_{i=2}^{p+1} v_iv'_i$$

et

$$q_{p+1}(v) = \varphi_{p+1}(v,v)$$

On notera que φ_{p+1} est une forme bilinéaire symétrique et q_{p+1} la forme quadratique associée.

I.B.1) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si, pour tous X et Y de $\mathbb{R}^n$, $^tXAY = {}^tXBY$ alors $A = B$.

BY-NC-SA

I.B.2) Exprimer $\varphi_{p+1}(v,v')$ en fonction de $q_{p+1}(v+v')$ et $q_{p+1}(v-v')$.

I.B.3) Soient $L \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{p+1}$ canoniquement associé.

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i. $L \in O(1,p)$;

ii. $\forall\,(v,v') \in \left(\mathbb{R}^{p+1}\right)^2,\ \varphi_{p+1}\left(f(v),f(v')\right) = \varphi_{p+1}\left(v,v'\right)$;

iii. $\forall v \in \mathbb{R}^{p+1},\ q_{p+1}\left(f(v)\right) = q_{p+1}\left(v\right)$.

I.B.4) Si $L = \left(l_{i,j}\right)_{i,j} \in O(1,p)$, $v = (1,0,...,0)$ et $v' = (0,1,0,...,0)$, donner les équations sur les $l_{i,j}$ correspondant à

$$\varphi_{p+1}(f(v),f(v')) = \varphi_{p+1}(v,v'), \quad q_{p+1}(f(v)) = q_{p+1}(v) \quad \text{et} \quad q_{p+1}(f(v')) = q_{p+1}(v')$$

Qu'obtient-on similairement avec ${}^tL$?

II Propriétés algébriques et géométriques du groupe $O^+(1,1)$

***II.A* – *Structure de* $O^+(1,1)$**

II.A.1) Soient a et b deux réels. Si $a>0$ et $a^2-b^2=1$ montrer qu'il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \operatorname{ch}\theta$ et $b = \operatorname{sh}\theta$.

II.A.2) Soient a, b, c et d quatre réels. On considère la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Écrire les équations sur a, b, c, d traduisant l'appartenance de L à $O(1,1)$.

II.A.3) En déduire l'égalité :

$$O^+(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma & \operatorname{sh}\gamma \\ \operatorname{sh}\gamma & \operatorname{ch}\gamma \end{pmatrix},\ \gamma \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\gamma & \operatorname{sh}\gamma \\ \operatorname{sh}\gamma & -\operatorname{ch}\gamma \end{pmatrix},\ \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

On note, dans la suite de cette partie II, pour tout réel γ, $L(\gamma) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma & \operatorname{sh}\gamma \\ \operatorname{sh}\gamma & \operatorname{ch}\gamma \end{pmatrix}$.

II.A.4) Montrer, pour tous réels γ et γ', l'égalité :

$$L(\gamma)L(\gamma') = L(\gamma+\gamma')$$

En déduire que $O^+(1,1) \cap \tilde{O}(1,1)$ est un sous-groupe commutatif du groupe $O^+(1,1)$.

***II.B* –** Le groupe $O^+(1,1) \cap \tilde{O}(1,1)$ est-il compact ?

***II.C* –** Montrer que les matrices éléments de $O^+(1,1)$ sont diagonalisables et trouver une matrice $P \in O(2)$ telle que, pour toute matrice $L \in O^+(1,1)$, la matrice ${}^tPLP$ soit diagonale.

***II.D* –** Montrer que le groupe $O^+(1,1)$ est commutatif.

III « Décomposition standard » d'un élément du groupe de Lorentz $O(1,3)$

***III.A* –** Soit $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in O(1,3)$. Montrer l'inégalité $\ell_{1,1}^2 \geqslant 1$.

***III.B* –** Soient $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ et $L' = (\ell'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ deux éléments de $\tilde{O}(1,3)$. On pose $L'' = LL' = (\ell''_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$.

Démontrer les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant \sqrt{\sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}^2}\sqrt{\sum_{k=2}^{4} \ell_{k,1}'^2} + \sum_{k=2}^{4} \ell_{1,k}\ell'_{k,1} < \ell''_{1,1}$$

En déduire que l'ensemble $\tilde{O}(1,3)$ est un sous-groupe du groupe de Lorentz $O(1,3)$.

On pose

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix},\ R \in SO(3) \right\}$$

***III.C* –** Justifier que G est un sous-groupe de $O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$ isomorphe à $SO(3)$.

BY-NC-SA

Soient $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$ et $a = \begin{pmatrix} \ell_{2,1} \\ \ell_{3,1} \\ \ell_{4,1} \end{pmatrix}$.

III.D – Montrer que, si le vecteur a est nul, alors la matrice L appartient au groupe G.

III.E – Construction d'une rotation particulière

III.E.1) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, montrer que, pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ de même norme, il existe une rotation r telle que $r(u) = v$.

III.E.2) Écrire, en langage Maple ou Mathematica, une fonction (ou procédure) `rotation`, de paramètres U et V, renvoyant :
– `False` si U et V n'ont pas la même norme ;
– une matrice R de $SO(3)$ telle que $RU = V$ si U et V ont même norme.

III.F – On suppose dans cette question que le vecteur a est non nul.

III.F.1) Déduire de la question III.E.1 qu'il existe un élément L_1 de G tel que l'on a :

$$L_1 L = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} & \ell_{1,3} & \ell_{1,4} \\ \alpha & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}$$

où α est un réel strictement positif que l'on précisera, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 et ν_3 sont des réels qu'on ne cherchera pas à déterminer.

On fixe désormais de tels coefficients α, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1,ν_2 et ν_3.

III.F.2) Soient $v_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$. Montrer que v_2 et v_3 sont deux vecteurs unitaires orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle.

III.F.3) Soit $R_2 \in SO(3)$. On pose $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R_2 \end{pmatrix} \in G$. Montrer que l'on peut choisir R_2 tel que

$$L_1 L L_2 = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où β_1, β_2, β_3, δ_1, δ_2 et δ_3 sont des réels qu'on ne cherchera pas à déterminer.

III.F.4) Montrer que les réels β_2, β_3, δ_2 et δ_3 sont nuls.

III.G – En déduire que toute matrice L de $O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit du type

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma & \operatorname{sh}\gamma & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\gamma & \operatorname{ch}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & R' \end{pmatrix}$$

où R et R' sont deux éléments de $SO(3)$ et γ est un réel.

III.H – Écrire, en langage Maple ou Mathematica, une fonction ou une procédure permettant d'obtenir une telle décomposition d'une matrice de $O^+(1,3) \cap \tilde{O}(1,3)$.

On pourra utiliser la fonction `rotation` écrite précédemment.

III.I – La décomposition obtenue est-elle unique ?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

PC

2014

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

Notations et conventions

- Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne correspondante, ce qui permet des écritures du type Ax où A est une matrice carrée réelle de taille n et x un élément de $\mathbb{R}^n$.
- Si f est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$$

ce qui, compte tenu de la convention précédente, s'écrit aussi

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i et j sont deux entiers de $[\![1, n]\!]$, la j-ème dérivée partielle de f_i en x est notée $\mathrm{D}_j f_i(x)$ ou $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

- Le déterminant d'une matrice carrée A est noté $\det(A)$.
- Avec les notations précédentes, on appelle matrice jacobienne de f en x et on note $J_f(x)$ la matrice carrée réelle de taille n dont le terme situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est $\mathrm{D}_j f_i(x)$.
- On appelle jacobien de f en x et on note $\mathrm{jac}_f(x)$, le déterminant $\det(J_f(x))$ de la matrice jacobienne $J_f(x)$.
- On appelle divergence de f en x et on note $\mathrm{div}_f(x)$, la trace de la matrice jacobienne $J_f(x)$. On a donc

$$\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(J_f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f_i(x)$$

Les quatre parties sont pour une large part indépendantes les unes des autres.

I Une interprétation du jacobien

I.A – Soit A une matrice carrée réelle de taille n et b un élément de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = Ax + b$$

Montrer que f est de classe C^1 et préciser sa matrice jacobienne $J_f(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}^n$.

I.B – Dans cette section, g désigne une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On fixe un élément $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = g(ta) = g(ta_1, ta_2, ..., ta_n)$$

I.B.1) Justifier que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, donner $\varphi'(t)$.

I.B.2) En déduire qu'au voisinage de 0

$$g(ta) = g(0) + t(a_1 \mathrm{D}_1 g(0) + a_2 \mathrm{D}_2 g(0) + \cdots + a_n \mathrm{D}_n g(0)) + \mathrm{o}(t)$$

I.C – Dans cette section, f désigne une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f(0) = 0$.

Pour t réel et j entier de $[\![1, n]\!]$, on note t_j l'élément $(0, ..., 0, t, 0, ..., 0)$ de $\mathbb{R}^n$, le réel t étant situé au rang j.

I.C.1) On admettra que si des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(t) = \det(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

BY-NC-SA

En utilisant la question I.B.2 et la multilinéarité du déterminant, montrer qu'au voisinage de 0

$$\det(f(t_1), f(t_2), ..., f(t_n)) = t^n \operatorname{jac}_f(0) + o(t^n)$$

I.C.2) En déduire que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\det(f(t_1), ..., f(t_n))}{\det(t_1, ..., t_n)} = \operatorname{jac}_f(0)$$

I.C.3) Dans le cas $n = 2$ (respectivement $n = 3$), donner une interprétation géométrique de la valeur absolue du jacobien de f en 0 à l'aide d'aires de parallélogrammes (respectivement volumes de parallélépipèdes).

II Une interprétation de la divergence dans un cas particulier

On désigne par A une matrice réelle carrée de taille 2 et on pose, pour tout x dans $\mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$.

II.A – Pour x dans $\mathbb{R}^2$, exprimer $\operatorname{div}_f(x)$ à l'aide de A seulement.

Pour a dans $\mathbb{R}^2$, on note $u_a(t)$ la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$X' = AX, \qquad X(0) = a$$

Autrement dit, u_a est l'unique fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $u_a(0) = a$ et, pour tout réel t, $u_a'(t) = Au_a(t)$.

II.B – Dans cette section et la suivante, on suppose A diagonale de la forme

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

II.B.1) Que vaut $u_a(t)$?

II.B.2) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et soit t un réel. Montrer que

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \exp(t \operatorname{div}_f(a)) \det(u_a(0), u_b(0))$$

II.B.3) Utiliser le résultat précédent pour interpréter le signe de $\operatorname{div}_f(a)$ en termes de sens de variation de l'aire d'un certain parallélogramme comme fonction de t.

II.C – ***Exemple***

On suppose toujours que $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

II.C.1) On pose $a = (a_1, a_2)$ et $u_a(t) = (x_1(t), x_2(t))$. On suppose que $\lambda_1 \neq 0$ et $a_1 > 0$. Déterminer une fonction θ_a telle que $x_2(t) = \theta_a(x_1(t))$ pour tout réel t.

II.C.2) Dans cette question, $a = (2, 1)$ et $b = (1, 2)$.

Pour chacun des cas suivants, illustrer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions θ_a, θ_b et θ_{a+b}, ainsi que les parallélogrammes de sommets $(0, 0)$, $u_a(t)$, $u_b(t)$ et $u_a(t) + u_b(t)$ pour $t = 0$ et une valeur de t strictement positive.

a) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

b) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

c) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

II.D –

II.D.1) Reprendre les questions II.B.1 et II.B.2 dans le cas où A est triangulaire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

II.D.2) Montrer que la relation

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \exp(t \operatorname{div}_f(a)) \det(u_a(0), u_b(0))$$

est valable lorsque la matrice A possède un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$.

II.D.3) Étendre ce résultat au cas d'une matrice réelle 2×2 quelconque.

BY-NC-SA

III Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

Dans le début de cette partie f est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
Si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note toujours

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i, j et k sont trois entiers de $[\![1, n]\!]$, la dérivée partielle seconde de f_k en x par rapport aux variables x_i et x_j est notée $\mathrm{D}_{i,j}f_k(x)$ ou $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, ou encore $f_{i,j,k}(x)$.

III.A – Justifier que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x)$.

III.B – Dans cette section, on suppose que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

III.B.1) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, $f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x)$.

III.B.2) En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = 0$.

III.B.3) Montrer qu'il existe une matrice carrée réelle A de taille n et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.
Justifier que A est antisymétrique.

III.B.4) Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est-elle antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$?

III.C – Maintenant f est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
Montrer que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est symétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe g de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ f_i(x) = \mathrm{D}_i g(x)$$

On pourra considérer l'application g définie par $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)\ \mathrm{d}t$ et on exprimera $\mathrm{D}_i g(x)$ sous forme d'une seule intégrale.

IV Matrice jacobienne orthogonale

Dans cette partie, f est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
On considère la proposition

$(\mathcal{P})$ Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ de f est orthogonale.

Pour x dans $\mathbb{R}^n$ et i, j, k dans $[\![1, n]\!]$, on note

$$\alpha_{i,j,k}(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

IV.A – On suppose $(\mathcal{P})$.

IV.A.1) Montrer que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$.

IV.A.2) En déduire que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = 0$.

IV.A.3) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale A et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$

On pourra interpréter les relations $\alpha_{i,j,k} = 0$ à l'aide de produits matriciels.

IV.B – Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f, la proposition $(\mathcal{P})$ est-elle réalisée ?

IV.C – Si g est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on note $\Delta_g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x)$ (laplacien de g en x).

Montrer que $(\mathcal{P})$ est équivalente à la proposition

$(\mathcal{Q})$ Pour toute fonction g de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\Delta_{g\circ f} = (\Delta_g) \circ f$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

4 heures Calculatrices autorisées

2014

Symétries, quaternions et sommes de carrés

Dans ce problème, on s'intéresse aux sommes de carrés d'éléments dans un anneau commutatif. On voit en particulier des formules pour le produit de deux sommes de n carrés pour $n = 1$ 2, 4 et 8, et on démontre qu'il n'existe pas de formule analogue pour les autres valeurs de n, ce qui constitue un théorème établi par Hurwitz en 1898.

La partie I étudie des familles de symétries. La partie II introduit l'algèbre des quaternions ; pour l'essentiel elle est indépendante de la partie I. Dans la partie III, on établit le théorème de Hurwitz en utilisant les parties I et II. Dans la partie IV, on étudie le théorème des quatre carrés d'un point de vue algorithmique. Dans la partie V, on démontre le théorème des quatre carrés en s'appuyant sur la partie II.

I Symétries vectorielles

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E (i.e. $E = F \oplus G$). On appelle *symétrie* (vectorielle) de E par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par $\forall (y,z) \in F \times G,\ s(y+z) = y - z$.

Pour tout endomorphisme u de E, on pose $F_u = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $G_u = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

I.A – Symétries et involutions

I.A.1) Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

a) Montrer que $F = F_s$ et $G = G_s$.

b) Montrer que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. En déduire que s est un automorphisme de E.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de s. On discutera selon les sous-espaces F et G.

I.A.2) Soit s un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. On pose $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

a) Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

b) En déduire que s est une symétrie dont on précisera les éléments.

I.B – Couples de symétries qui anticommutent

I.B.1) Soient s et t deux symétries de E qui anticommutent, c'est-à-dire telles que $s \circ t + t \circ s = 0$.

a) Prouver les égalités $t(F_s) = G_s$ et $t(G_s) = F_s$.

b) En déduire que F_s et G_s ont la même dimension et que n est pair.

I.C – H-systèmes

On appelle *H-système* d'endomorphismes de E toute famille finie de symétries de E qui anticommutent deux à deux, c'est-à-dire toute famille finie $(S_1, ..., S_p)$ d'endomorphismes de E tels que

$$\begin{cases} \forall i & S_i \circ S_i = \mathrm{Id}_E \\ \forall i \neq j & S_i \circ S_j + S_j \circ S_i = 0 \end{cases}$$

De même, on appelle *H-système* de matrices de taille n toute famille finie $(A_1, ..., A_p)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\begin{cases} \forall i & A_i^2 = I_n \\ \forall i \neq j & A_i A_j + A_j A_i = 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas, p est appelé *longueur* du H-système.

I.C.1) Montrer que la longueur p d'un H-système d'endomorphismes de E est majorée par n^2.

I.C.2) Montrer que l'existence d'un H-système $(S_1, ..., S_p)$ de E équivaut à l'existence d'un H-système de matrices de taille n. En déduire que la longueur d'un H-système de E ne dépend que de la dimension n de E et pas de l'espace E.

BY-NC-SA

On note $p(n)$ le plus grand nombre entier $p \geqslant 1$ tel que E admet un H-système de cardinal p.

I.C.3) Soit n un entier impair. Prouver que $p(n) = 1$.

I.D – Majoration de $p(n)$

I.D.1) On suppose ici que n est pair et on pose $n = 2m$. On considère :
- un H-système $(S_1, ..., S_p, T, U)$ de E,
- le sous-espace $E_0 = F_T = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$,
- pour $j \in [\![1, p]\!]$, l'endomorphisme $R_j = \mathrm{i}\, U \circ S_j$ de E.

a) Montrer que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, le sous-espace E_0 est stable par R_j.

b) Pour $j \in [\![1, p]\!]$, soit s_j l'endomorphisme de E_0 induit par R_j. Montrer que $(s_1, ..., s_p)$ est un H-système de E_0.

c) En déduire $p(2m) \leqslant p(m) + 2$.

I.D.2) Montrer que si $n = 2^d m$ avec m impair, alors $p(n) \leqslant 2d + 1$.

I.E – Constructions de H-systèmes maximaux

I.E.1) Soient $N = p(n)$ et $(a_1, ..., a_N)$ un H-système de matrices de taille n c'est-à-dire tel que

$$\forall i,\ a_i^2 = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall i \neq j,\ a_i a_j + a_j a_i = 0$$

En considérant les matrices suivantes de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ écrites par blocs

$$A_j = \begin{pmatrix} a_j & 0 \\ 0 & -a_j \end{pmatrix}\ (j \in [\![1, N]\!]), \qquad A_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{N+2} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}I_n \\ -\mathrm{i}I_n & 0 \end{pmatrix},$$

montrer que $p(2n) \geqslant N + 2$.

I.E.2) Déterminer $p(n)$ en fonction de l'unique entier $d \in \mathbb{N}$ tel que n s'écrive $n = 2^d m$ avec m impair.

I.E.3) Écrire, pour chacun des entiers $n = 1$, 2, 4, un H-système de matrices de taille n de longueur $p(n)$.

II Quaternions et sommes de quatre carrés

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on désigne par $M(a, b)$ la matrice carrée complexe $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Une matrice de la forme $M(a, b)$ sera appelée *quaternion*. On considèrera en particulier les quaternions $e = I_2 = M(1, 0)$, $I = M(0, 1)$, $J = M(\mathrm{i}, 0)$, $K = M(0, -\mathrm{i})$ et on notera $\mathbb{H} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ constitué par tous les quaternions.

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(0, 1)$ et la matrice unité $I_2 = e = M(1, 0)$.

II.A – Le « corps » des quaternions

On munit l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices complexes à deux lignes et deux colonnes de l'addition $+$, de la multiplication $\times$ usuelles et de la multiplication par un réel notée $\cdot$ et définie usuellement par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad \lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

On rappelle que $(\mathcal{C}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre sur le corps $\mathbb{R}$ des réels.

II.A.1) *a)* Donner, sans justification, une base et la dimension de $\mathcal{C}$ sur le corps $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{C}$ et que $\{e, I, J, K\}$ en est une base sur le corps $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication.

II.A.2) Montrer que $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \times)$ est un sous-groupe non commutatif du groupe linéaire $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$.

$(\mathbb{H}, +, \times)$ a toutes les propriétés d'un corps sauf la commutativité de $\times$: on dit que c'est un *anneau à divisions* (ou, parfois, un *corps non commutatif*).

II.A.3) *a)* Calculer les produits deux à deux des matrices e, I, J, K. On présentera les résultats dans une table à double entrée.

b) En déduire que $(\mathrm{i}I, \mathrm{i}J, \mathrm{i}K)$ est un H-système.

II.B – Conjugaison et normes

Ainsi tout élément $q \in \mathbb{H}$ s'écrit de manière unique $q = xe + yI + zJ + tK$ avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Pour $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ et $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$ on pose $q^* = xe - yI - zJ - tK \in \mathbb{H}$ et $N(q) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \in \mathbb{R}_+$.

II.B.1) *a)* Vérifier que, pour tout $q \in \mathbb{H}$, q^* est la transposée de la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de q.

BY-NC-SA

b) En déduire que, pour tout $(q,r)\in\mathbb{H}^2$, $(qr)^*=r^*q^*$.

c) Montrer que $q^{**}=q$ pour tout $q\in\mathbb{H}$ et que $q\mapsto q^*$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

d) Pour $q\in\mathbb{H}$, exprimer qq^* à l'aide de $N(q)$. En déduire la relation valable pour tout $(q,r)\in\mathbb{H}^2$

$$N(qr)=N(q)N(r)$$

II.B.2) *a)* Soient $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ et $q=xe+yI+zJ+tK$. Exprimer la trace de la matrice $q\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en fonction du réel x.

b) En déduire que, pour tout $(q,r)\in\mathbb{H}^2$, $qr-rq=q^*r^*-r^*q^*$.

c) Soient a, b, c, d des quaternions. Établir la relation $(acb^*)d+d^*(acb^*)^*=(acb^*)^*d^*+d(acb^*)$.

En déduire l'identité $(N(a)+N(b))(N(c)+N(d))=N(ac-d^*b)+N(bc^*+da)$.

III Un théorème de Hurwitz

Soit un entier naturel $n\geqslant 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel et de la norme euclidienne usuelle définis, pour tout $X=(x_1,...,x_n)$ et $Y=(y_1,...,y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, par

$$(X|Y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \qquad \text{et} \qquad \|X\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$$

L'objet de cette partie est d'étudier l'existence d'une application bilinéaire $B_n:(\mathbb{R}^n)^2\to\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall X,Y\in\mathbb{R}^n,\quad \|B_n(X,Y)\|=\|X\|\times\|Y\| \tag{III.1}$$

III.A – Des formules pour $n=1,2,4,8$

III.A.1) Montrer l'existence d'une telle application bilinéaire B_n lorsque n est l'un des entiers 1, 2, 4.

Pour $n=2$ (respectivement 4) on pourra considérer le produit de deux nombres complexes (respectivement de deux quaternions).

III.A.2) En utilisant la question II.B.2 montrer, pour $n=8$, l'existence d'une application bilinéaire vérifiant (III.1). On ne demande pas d'expliciter une application bilinéaire B_8, mais seulement de prouver son existence.

III.B – Le théorème de Hurwitz

Dans la suite on suppose que $n\geqslant 3$ et qu'il existe une application bilinéaire B telle que

$$\forall X,Y\in\mathbb{R}^n,\quad \|X\|\times\|Y\|=\|B(X,Y)\| \tag{III.2}$$

Soit $(e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour $i\in[\![1,n]\!]$, soit u_i l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\forall X\in\mathbb{R}^n,\quad u_i(X)=B(X,e_i)$$

La matrice de u_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sera notée A_i.

III.B.1) *a)* Prouver que, pour tout $X\in\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall Y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \sum_{i,j=1}^{n}y_iy_j(u_i(X)|u_j(X))=\|X\|^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

b) En déduire que les endomorphismes u_i vérifient les relations

$$\forall i,j=1,...,n,\forall X\in\mathbb{R}^n,\quad \|u_i(X)\|=\|X\| \text{ et } i\neq j\Rightarrow(u_i(X)|u_j(X))=0$$

et plus généralement

$$\forall i,j=1,...,n,\forall X,X'\in\mathbb{R}^n,\quad (u_i(X)|u_i(X'))=(X|X') \text{ et } i\neq j\Rightarrow(u_i(X)|u_j(X'))+(u_j(X)|u_i(X'))=0$$

c) Prouver que les matrices A_i vérifient les relations $\forall i,j=1,...,n,\quad {}^tA_i\,A_i=I_n$ et $i\neq j\Rightarrow {}^tA_i\,A_j+{}^tA_j\,A_i=0$.

III.B.2) Pour $j=1,...,n-1$ on note S_j la matrice complexe $S_j=\mathrm{i}\,{}^tA_nA_j$.

a) Prouver que $(S_1,...,S_{n-1})$ est un H-système.

b) En déduire qu'on a l'inégalité $p(n)\geqslant n-1$ où $p(n)$ est défini dans la section I.C.

III.B.3) Prouver que n est élément de $\{1,2,4,8\}$.

IV Représentation des parties de $\mathbb{N}$ et quelques algorithmes

Soient X et Y deux parties de $\mathbb{N}$. On note $X+Y$ l'ensemble des sommes d'un élément de X et d'un élément de Y, c'est-à-dire $X+Y=\{x+y\,|\,x\in X,y\in Y\}\subset\mathbb{N}$.

BY-NC-SA

Dans les questions suivantes, on supposera que les parties X et Y considérées contiennent 0 de sorte que $X+Y$ contiendra toujours X et Y.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On représente une partie X de $[\![0, N]\!]$ par le tableau A indexé de 0 à N, tel que, pour $i \in [\![0, N]\!]$, on ait $A[i] = 1$ si $i \in X$, $A[i] = 0$ sinon.

IV.A – Écrire en langage `Maple` ou `Mathematica` une fonction ou une procédure `carres` telle que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, `carres(N)` retourne le tableau associé à l'ensemble des carrés inférieurs ou égaux à N. On n'utilisera pas la fonction racine carrée.

On note $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 5, 7, ...\} \subset \mathbb{N}$ la réunion de $\{1\}$ et de l'ensemble des nombres premiers.

Le crible d'Ératosthène est l'algorithme qui, dans un tableau des entiers de 1 à N, consiste à :
- à l'étape 1, supprimer les multiples de 2 strictement supérieurs à 2 ;
- à l'étape 2, supprimer les multiples de 3 strictement supérieurs à 3 ;
- à l'étape k, supprimer les multiples stricts du plus petit entier p_k qui n'a pas encore été supprimé.

À la fin du processus, les entiers supérieurs ou égaux à 2 qui n'ont pas été supprimés sont les nombres premiers inférieurs ou égaux à N. (On ne demande pas de justifier ce résultat.)

IV.B – Écrire en langage `Maple` ou `Mathematica` une fonction ou une procédure `Eratosthene` utilisant l'algorithme ci-dessus et telle que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, `Eratosthene(N)` retourne le tableau C associé à l'ensemble $X = \{p \in \mathcal{P} \mid p \leqslant N\} \cup \{0\}$. On rappelle que C est un tableau de 0 et de 1, indexé de 0 à N et caractérisé par

$$C[i] = 1 \iff i = 0 \text{ ou } (1 \leqslant i \leqslant N \text{ et } i \text{ est premier})$$

IV.C – Écrire en langage `Maple` ou `Mathematica` une fonction ou une procédure `somme` telle que, si A et B sont des tableaux de 0 et de 1 indexés de 0 à N représentant respectivement les parties X et Y de $\{0, ..., N\}$, `somme(A,B,N)` retourne le tableau C représentant l'ensemble Z des éléments de $\{1, ..., N\}$ sommes d'un élément de X et d'un élément de Y.

IV.D – En utilisant les fonctions ou les procédures `carres` et `somme`, écrire en langage `Maple` ou `Mathematica` une fonction ou une procédure `quatrecarres` telle que `quatrecarres(N)` retourne `vrai` si tout entier de 1 à N est somme de quatre carrés d'entiers et retourne `faux` sinon.

V Sommes de carrés dans un anneau

V.A – Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $C_p(A)$ l'ensemble des sommes de p carrés d'éléments de A.

Prouver que pour tout anneau A, les ensembles $C_p(A)$ sont stables pour la multiplication lorsque p vaut 1, 2, 4 ou 8.

> On pourra utiliser les formes bilinéaires B_p définies partie III et, éventuellement, se limiter au cas où l'anneau A est l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

V.B – Le théorème des quatre carrés

On note $\mathbb{G} = \{xe + yI + zJ + tK \mid x, y, z, t \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des quaternions « entiers ».

V.B.1) *a)* Montrer que $\mathbb{G}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}$ pour l'addition et qu'il est stable par multiplication.

b) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{H}$, il existe $\mu \in \mathbb{G}$ tel que $N(q - \mu) \leqslant 1$.

c) Quel est l'ensemble des $q \in \mathbb{H}$ tels que $\forall \mu \in \mathbb{G},\ N(q - \mu) \geqslant 1$?

V.B.2) Soit p un nombre premier impair. Pour tout entier $r \in \mathbb{Z}$, on note $\varphi(r)$ le reste de la division euclidienne de r^2 par p. On a donc $0 \leqslant \varphi(r) \leqslant p - 1$ et $r^2 - \varphi(r) \in p\mathbb{Z}$.

a) Montrer que la restriction de φ à $\{0, ..., \frac{p-1}{2}\}$ est injective.

b) On considère les ensembles $X = \{p - \varphi(r) \mid 0 \leqslant r \leqslant \frac{p-1}{2}\}$ et $Y = \{\varphi(s) + 1 \mid 0 \leqslant s \leqslant \frac{p-1}{2}\}$.

Montrer que X et Y sont inclus dans $\{1, ..., p\}$ et que leur intersection est non vide. En déduire qu'il existe $u, v \in \{0, ..., \frac{p-1}{2}\}$ et $m \in \{1, ..., p-1\}$ tels que $u^2 + v^2 + 1 = mp$.

V.B.3) On suppose encore que p est un nombre premier impair. Justifier qu'il existe $m \in \{1, ..., p-1\}$ et $\mu = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$ tels que $N(\mu) = mp$. On choisit m minimal et on suppose que $m > 1$.

a) Montrer que si m était pair, un nombre pair des entiers x, y, z, t serait impair et aboutir à une contradiction.

> On pourra écrire $(\frac{x-y}{2})^2 + (\frac{x+y}{2})^2 = \frac{x^2+y^2}{2}$.

b) On suppose m impair. Montrer qu'il existe $\nu \in \mathbb{G}$ tel que $N(\mu - m\nu) < m^2$.

c) Prouver que $\mu' = \frac{1}{m}\mu(\mu - m\nu)^*$ est dans $\mathbb{G} \setminus \{0\}$ et que $N(\mu')$ est un multiple de p strictement inférieur à mp. Conclure.

V.B.4) Montrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI

2014

4 heures Calculatrices autorisées

I Polynômes et nombres de Bernoulli

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H défini par

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X]; \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x = 0 \right\}$$

Dans tout le problème, on confond les polynômes et les fonctions polynômes.

On note D l'application linéaire de H dans $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P \in H$ associe son polynôme dérivé P'

$$\forall P \in H, \quad D(P) = P'$$

On identifiera polynôme constant et nombre réel.

I.A –

I.A.1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

À l'aide de l'égalité $P = \left(P - \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x\right) + \int_0^1 P(x)\ \mathrm{d}x$, montrer qu'il existe un unique couple $(Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda$.

I.A.2) En déduire que D est surjectif.

I.A.3) Montrer que D est un isomorphisme.

On note $\varphi = D^{-1}$, l'isomorphisme réciproque. Ainsi, si $A \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme B tel que $B = \varphi(A)$ est l'unique polynôme dans H tel que $B' = A$.

I.A.4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note Q la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)P(t)\ \mathrm{d}t$$

On pourra considérer une primitive de P.

a) Montrer que $Q \in H$.

b) Vérifier que $Q = \varphi(P)$.

I.B – On considère la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \varphi(B_n)$$

Le polynôme nB_n est le n-ième *polynôme de Bernoulli*.

I.B.1) Calculer B_1 et B_2.

I.B.2) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

I.C – Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme C_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

I.C.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer C'_{n+1} à l'aide de C_n.

I.C.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

I.C.3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

I.C.4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les nombres $B_{2n+1}(0)$ et $B_{2n+1}(1)$ sont nuls.

I.D – Écrire une procédure `Bern` qui prend en argument un nombre entier n et un nombre réel x et qui affiche la valeur de l'expression $B_n(x)$. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel usuellement utilisé.

BY-NC-SA

II Développement de Fourier

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$. Le nombre nb_n est le n-ième *nombre de Bernoulli*.
Pour tout polynôme P, on désigne par $\overline{P}$ la fonction périodique de période 1 définie par

$$\forall x \in]0,1[, \quad \overline{P}(x) = P(x) \quad \text{et} \quad \overline{P}(0) = \frac{P(0)+P(1)}{2}$$

II.A –

II.A.1) Tracer le graphe de $\overline{B_2}$ sur l'intervalle $[-1,2]$.

II.A.2) La fonction $\overline{B_2}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? De classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

II.A.3) La fonction $\overline{B_1}$ est-elle continue ?

II.B – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

II.B.1) Prouver que la fonction $\overline{P}$ est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. À quelle condition est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

II.B.2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{P}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos(2k\pi x) + \beta_k \sin(2k\pi x))$$

où les nombres α_0, α_1,... et β_1, β_2,... sont les coefficients de Fourier de $x \mapsto \overline{P}(x)$, dont on donnera les expressions sous forme d'intégrales.

II.C – À l'aide de la partie I, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \overline{B_{2n}}(x)$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

II.D – Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_k(n) = \int_0^1 B_{2n}(x) \cos(2k\pi x)\ \mathrm{d}x$$

II.D.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_0(n)$.

II.D.2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre $I_k(n+1)$ et $I_k(n)$.

II.D.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_k(1)$.

II.D.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$B_{2n}(x) = 2(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2n}} \cos(2k\pi x)$$

II.D.5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$. Justifier l'existence de ce nombre et montrer que

$$S_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} (2\pi)^{2n} b_{2n}$$

II.D.6) Déterminer la valeur de $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

III La formule d'Euler - Mac Laurin

Le nombre n est un entier naturel non nul et f une fonction de classe C^{2n} sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour tout entier k compris entre 1 et $2n$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction f.

III.A – On pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(x) f^{(2n)}(x)\ \mathrm{d}x$.
Pour $n \geqslant 2$, démontrer la relation

$$J_n = b_{2n} \left(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0) \right) + J_{n-1}$$

III.B – Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - b_2 \left(f'(1) - f'(0) \right) + J_1$$

BY-NC-SA

III.C – En déduire que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + J_n$$

III.D – Soit g une fonction de classe C^{2n} sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.
En considérant la fonction $x \mapsto g\left((1-x)a+bx\right)$ définie sur $[0,1]$, montrer que l'on obtient la formule d'Euler - Mac Laurin :

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(g(b)+g(a)) - \sum_{k=1}^{n}(b-a)^{2k} b_{2k}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right) + R_n$$

où $R_n = \displaystyle\int_0^1 (b-a)^{2n+1} B_{2n}(x) g^{(2n)}((1-x)a+bx)\ \mathrm{d}x$.

IV La formule de Stirling pour la fonction Γ

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

IV.A – Justifier que l'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

IV.B –

IV.B.1) Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

IV.B.2) En déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.C – Montrer que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
On admet qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.D – Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \ln\left(\Gamma(x)\right)$$

IV.D.1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g est de classe C^{2n} sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.D.2) Pour tout réel $x>0$, calculer $g(x+1) - g(x)$.

IV.D.3) Démontrer qu'il existe une constante K tel que

$$\forall\, x>0, \quad \int_x^{x+1} g(t)\ \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + K$$

IV.D.4) Soit p un entier strictement positif.
Montrer que, pour tout $x>0$, on a

$$\frac{\ln\left(\Gamma(x+1)\right) + \ln\left(\Gamma(x)\right)}{2} = x\ln(x) - x + K + \sum_{k=1}^{p} \frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}} b_{2k} - R_p(x)$$

où $R_p(x) = \displaystyle\int_0^1 B_{2p}(t) g^{(2p)}(t+x)\ \mathrm{d}t$.

La relation précédente permet d'établir la formule de Stirling pour la fonction Γ

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

après avoir prouvé que

$$\lim_{x\to+\infty} R_p(x) = 0$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI

4 heures Calculatrices autorisées

2014

Le but du problème (qui date du XVI^{e} siècle) apparaît dans la partie IV.

On note $(\vec{e}_1,..,\vec{e}_6)$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$. Pour k de 1 à 6, on note E_k le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$ engendré par les cinq vecteurs de la base autres que $\vec{e}_k$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Quand on parlera des coordonnées d'un vecteur, il s'agira toujours des coordonnées sur la base canonique.

On définit ainsi trois vecteurs par leurs coordonnées

$$\vec{a}=(8,0,0,5,0,3) \qquad \vec{b}=(4,4,4,1,0,3) \quad \text{et} \quad \vec{c}=(1,7,4,1,3,0)$$

I Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^6$

Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^6$ dans lui-même vérifiant

$$\begin{cases} f(\vec{e}_5)=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_6 \\ f(\vec{e}_q)=\vec{e}_q \qquad\qquad \text{pour } q=1,2,3,4,6 \end{cases}$$

I.A –

I.A.1) Représenter la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$.

I.A.2) Donner la valeur du déterminant de M.

I.A.3) Montrer que le rang de M est inférieur ou égal à 5.

I.A.4) Montrer que l'image de f contient tous les vecteurs de E_5.

I.A.5) Pour k quelconque entre 1 et 6, quelle est la dimension de E_k ?

I.A.6) Montrer que l'image de f est E_5 et que le noyau de f est de dimension 1.

I.B – Trouver un vecteur $\vec{u}$ dirigeant le noyau de f, ayant des coordonnées simples.

I.C –

I.C.1) Former le polynôme caractéristique de M.

I.C.2) Quelles sont les valeurs propres de M ? Quels sont leurs ordres de multiplicité ?

I.C.3) Justifier que les sous-espaces propres de f sont $\ker(f)$ et E_5.

I.C.4) Montrer que f est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^6$ sur laquelle la matrice de f est diagonale.

I.D –

I.D.1) Montrer que l'application linéaire f est le projecteur sur le sous-espace vectoriel E_5 parallèlement à la droite dirigée par $\vec{u}$.

I.D.2) Ce projecteur est-il un projecteur orthogonal ?

I.D.3) Exprimer M^2 en fonction de M.

I.E – On considère l'équation $f(\vec{x})=\vec{b}$, où le vecteur $\vec{x}$ est l'inconnue.

I.E.1) Montrer que $\vec{b}$ lui-même est une solution particulière de l'équation.

I.E.2) Montrer que la solution générale est le vecteur $\vec{x}=\vec{b}+\lambda\vec{u}$, où le réel λ est arbitraire.

I.E.3) Montrer que le vecteur $\vec{c}$ est la seule solution de l'équation différente de $\vec{b}$ et dont une coordonnée est nulle, les autres coordonnées étant positives ou nulles.

BY-NC-SA

II Solutions approchées

Que R soit une matrice carrée ou un vecteur colonne, on note ${}^tR$ sa matrice transposée.

On rappelle que les deux vecteurs colonnes V et W sont orthogonaux dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^6$ si et seulement si le produit matriciel ${}^tV \cdot W$ est nul.

On donne une matrice carrée A et un vecteur colonne Y_0 de $\mathbb{R}^6$, et on considère l'équation matricielle $A \cdot X = Y_0$ où l'inconnue est le vecteur colonne X de $\mathbb{R}^6$. On suppose que cette équation n'a pas de solution et on lui associe l'équation ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$.

II.A – On va d'abord montrer que cette dernière équation a des solutions.

II.A.1) Montrer que ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$ si et seulement si le vecteur $A \cdot X - Y_0$ est orthogonal à tout vecteur de la forme $A \cdot Z$, où Z est un vecteur colonne Z de $\mathbb{R}^6$.

II.A.2) En déduire que ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$ si et seulement si $A \cdot X$ est la projection orthogonale de Y_0 sur l'image de A.

II.A.3) Montrer qu'un tel vecteur X existe.

II.B – ***Résolution de l'équation*** ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$

On pose $B = {}^tA \cdot A$. On suppose que B est de rang 5.

II.B.1) Montrer que B est une matrice symétrique.

II.B.2) Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé. En calculant de deux façons le produit matriciel ${}^tX \cdot B \cdot X$, montrer que λ est un réel positif.

II.B.3) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $B = {}^tP \cdot D \cdot P$, les cinq premiers termes diagonaux de D étant strictement positifs et le dernier étant nul.

II.B.4) Connaissant P et D, montrer que la résolution de ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$ se ramène à un système de cinq équations à cinq inconnues dont la résolution est immédiate.

II.C – Soit X_0 une solution de l'équation ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$.

Rappelons que $Y_0 = A \cdot X$ n'a pas de solution, donc que Y_0 n'est pas dans l'image de A.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{R}^6$ tels que la distance de $A \cdot X$ à Y_0 soit minimale au sens des moindres carrés.

Montrer que X_0 appartient à $\mathcal{P}$.

X_0 peut donc être vu comme une solution approchée de l'équation $Y_0 = A \cdot X$

III Applications linéaires et manipulations de cruches

Un voyageur dispose de trois cruches C_1, C_2, C_3 contenant chacune de l'eau et de l'air (car le remplissage des cruches est partiel).

À chaque répartition de l'eau dans les trois cruches on associe un vecteur de $\mathbb{R}^6$, $\vec{x} = (x_1, .., x_6)$, où x_1, x_3, x_5 désignent les volumes d'eau respectivement dans C_1, C_2, C_3 et où x_2, x_4, x_6 sont les volumes d'air correspondants.

Face à une telle répartition, le voyageur s'autorise l'une des deux manipulations suivantes :

Choisir deux cruches C_i et C_j, verser l'eau de C_i dans C_j (sans déborder) et s'arrêter

- lorsque C_i est vide : manipulation $v(i, j)$ qui peut se lire « vider C_i dans C_j »,
- lorsque C_j est pleine : manipulation $p(i, j)$ qui peut se lire « remplir C_j avec C_i ».

III.A – Dans cette question seulement, on note $\vec{y}$ l'image de $\vec{x}$ par l'application f définie dans la partie I.

III.A.1) Calculer, en utilisant la matrice M de f, les coordonnées $(y_1, y_2, ..., y_6)$ de $\vec{y}$.

III.A.2) Face à la répartition associée à $\vec{x}$, le voyageur applique la manipulation $v(3, 1)$ (si elle est possible). Vérifier que le vecteur $\vec{y}$ est le vecteur associé aux volumes d'eau et d'air après cette manipulation.

III.B – Dans toute la suite de cette partie, i et j sont deux entiers différents, compris entre 1 et 3. On désigne par $\vec{x} = (x_1, ..., x_6)$ et $\vec{y} = (y_1, ..., y_6)$ les vecteurs associés à la répartition de l'eau et de l'air avant et après l'utilisation d'une certaine manipulation.

III.B.1) Montrer que, si cette manipulation est $v(i, j)$, alors on a :

$$\begin{cases} y_{2i-1} = 0 \\ y_{2i} = x_{2i} + x_{2i-1} \\ y_{2j-1} = x_{2j-1} + x_{2i-1} \\ y_{2j} = x_{2j} - x_{2i-1} \\ y_k = x_k & \text{pour } k \text{ différent de } 2i,\ 2j,\ 2i-1 \text{ et } 2j-1 \end{cases}$$

BY-NC-SA

On note alors $V_{i,j}$ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ tel que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^6, \vec{y} = V_{i,j}(\vec{x})$. En particulier, $V_{3,1}$ est l'application notée f dans la partie I.

III.B.2) Donner de même, sans justification, les composantes de $\vec{y}$ en fonction de celles de $\vec{x}$ lorsque la manipulation utilisée est $p(i,j)$. (On remarquera que déplacer de l'eau de C_i vers C_j équivaut à déplacer de l'air de C_j vers C_i). On constatera que $y_{2j} = 0$. On note alors $P_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ qui transforme $\vec{x}$ en $\vec{y}$.

III.C – Soit k un entier entre 1 et 6.

III.C.1) Justifier que E_k est un hyperplan de $\mathbb{R}^6$.

III.C.2) Donner une équation simple de cet hyperplan.

III.D – On fixe le couple (i,j).

III.D.1) Montrer que tous les vecteurs de E_{2i-1} sont invariants par $V_{i,j}$.

III.D.2) Montrer que tous les vecteurs de E_{2j} sont invariants par $P_{i,j}$.

III.D.3) On note $M_{i,j}$ la matrice de l'application $V_{i,j}$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^6$.

Montrer que la matrice $M_{i,j}$ comporte une ligne de zéros, dont on donnera la position.

III.D.4) En s'inspirant de la partie I, montrer que toutes les applications $V_{i,j}$ et $P_{i,j}$ sont de rang 5 et sont diagonalisables.

IV Le problème des trois cruches

On considère trois cruches, C_1, C_2 et C_3 de capacités respectives, 8, 5 et 3 litres. Initialement C_1 est pleine d'eau et C_2 et C_3 sont vides (pleines d'air). Le voyageur voudrait, par une succession des manipulations permises, faire en sorte que l'eau soit répartie en parts égales dans C_1 et C_2.

Les notations de la partie III pour caractériser la répartition de l'eau dans les cruches à l'aide d'un vecteur de $\mathbb{R}^6$ sont reprises dans cette partie.

IV.A –

IV.A.1) Montrer que les deux vecteurs de $\mathbb{R}^6$ associés respectivement à l'état initial des cruches et à l'état final souhaité sont les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ définis dans le préambule.

IV.A.2) Montrer, en utilisant par exemple la dernière question de la partie I, qu'on peut passer par une seule manipulation de l'état associé au vecteur $\vec{c}$ du préambule à l'état final souhaité.

IV.A.3) Montrer, en utilisant par exemple III.B. que, si le problème a une solution, les vecteurs de $\mathbb{R}^6$ associés aux états intermédiaires (entre l'état initial et l'état final) ont tous une coordonnée nulle (au moins). On appelle dans la suite « vecteur privilégié » tout vecteur de $\mathbb{R}^6$ ayant une coordonnée nulle, les autres étant strictement positives.

IV.B – On peut résoudre les questions suivantes en raisonnant sur l'état des cruches, sans revenir aux applications linéaires.

IV.B.1) On pose $\vec{d} = (1,7,5,0,2,1)$.

Montrer que $\vec{d}$ est, en dehors de $\vec{b}$, le seul vecteur privilégié qu'on puisse obtenir à partir de $\vec{c}$ par une seule manipulation.

IV.B.2) Montrer qu'on peut repasser de l'état associé à $\vec{d}$ à l'état associé à $\vec{c}$ par une seule manipulation.

IV.C – On constate qu'on peut passer de l'état associé à $\vec{d}$ à l'état associé à $\vec{e} = (6,2,0,5,2,1)$ (ou inversement), puis de même, de $\vec{e}$ à $\vec{f} = (6,2,2,3,0,3)$, de $\vec{f}$ à $\vec{g} = (3,5,2,3,3,0)$ et de $\vec{g}$ à $\vec{h} = (3,5,5,0,0,3)$, qui n'est pas privilégié.

Montrer qu'il est possible de passer de l'état initial (associé à $\vec{a}$) à l'état associé à $\vec{h}$ en utilisant une seule manipulation.

IV.D – Décrire, pour résumer, les manipulations successives qui permettent au voyageur d'atteindre son but.

IV.E – Partant de la même répartition initiale d'eau dans les cruches (8 litres, 0 litre, 0 litre),

IV.E.1) Est-il possible d'arriver à une répartition de l'eau en parts égales entre les trois cruches ?

IV.E.2) Est-il possible d'arriver à la répartition (4 litres, 2 litres, 2 litres) ?

IV.F – Rappelons que les capacités des cruches sont 8, 5 et 3 litres.

IV.F.1) Donner les composantes $y_1, ..., y_6$ du vecteur colonne Y_0 associé à la répartition des 8 litres d'eau en trois quantités égales dans les trois cruches (répartition qu'on ne peut obtenir si l'on s'en tient aux manipulations permises).

IV.F.2) Parmi les sous-espaces E_k, quel est celui pour lequel la distance euclidienne de Y_0 à E_k est la plus petite et quelle est cette distance ?

Nous laissons au voyageur le soin de poursuivre les calculs.

BY-NC-SA

V Utilisation du logiciel de calcul

On cherche une solution au problème des trois cruches, tel qu'il est posé dans la partie IV, plus directe que la précédente, en écrivant, dans le langage de programmation vu en classe, un programme envisageant, à partir de l'état initial (8,0,0) de l'eau dans les cruches, toutes les manipulations possibles et les états qu'elles donnent, jusqu'à obtenir l'état (4,4,0).

Pour un certain état des cruches, les trois volumes d'eau contenus dans C_1, C_2 et C_3 sont les trois éléments d'une colonne m d'un tableau (extensible) T à trois lignes et n colonnes (n peut varier).

Initialement T n'a qu'une colonne contenant $(8, 0, 0)$ et $n = 1$.

V.A – Écrire une procédure nommée `figure`. Cette procédure, destinée à éviter les répétitions, attend trois nombres à l'entrée et l'appel de `figure(a,b,c)` renvoie la valeur `true` si l'état (a, b, c) figure déjà dans une colonne du tableau T. Elle renvoie `false` dans le cas contraire.

V.B – Pour i, j et m fixés, écrire la suite d'instructions permettant, en examinant l'état des cruches défini par la colonne m du tableau T, de trouver, si C_i n'est pas vide, celle des deux manipulations $v(i, j)$ ou $p(i, j)$ qui est alors possible et, si cette manipulation donne un état non encore répertorié, le ranger dans le tableau T en accolant une nouvelle colonne à celui-ci.

Programmer aussi l'affichage de la valeur de m et du tableau (complété). Cela permettra de suivre l'avancement du travail pendant que le programme s'exécutera.

V.C – Incorporer les instructions précédentes dans des boucles imbriquées permettant de traiter tous les couples (i, j) possibles et faire varier m jusqu'à l'apparition, dans le tableau, de l'état espéré $(4, 4, 0)$.

V.D – Par suite d'une panne, l'écran reste figé sur l'affichage intermédiaire suivant de m et du tableau T

$$m = 7 \qquad T = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 & 6 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Finir manuellement le travail du programme, sans donner trop de détails.

V.E – On pourrait alors reconstituer la suite des manipulations que le voyageur doit faire. On s'en tiendra à décrire la dernière manipulation et à la comparer avec celle trouvée dans la partie IV.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2015

Autour de la transformation de Radon

L'objectif de ce problème est l'étude d'un certain opérateur intégral agissant sur les fonctions du plan, appelé *transformation de Radon*. On se propose d'établir une formule d'inversion et d'interpréter la transformation en termes de fonctions invariantes sur un groupe de matrices. Enfin on étudiera une application du procédé dans le domaine de l'imagerie médicale.

Notations

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et son élément neutre, I_3.

Les éléments du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ seront notés en colonne, pour tout réel θ on notera $\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$.

Le plan est muni de sa structure euclidienne canonique, donnée par le produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

L'ensemble des matrices des rotations vectorielles planes est appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $\mathrm{SO}(2)$, son élément neutre, I_2. On écrira $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

I Préliminaires géométriques

Soit G le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $M(A,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} & & b_1\\ A & & b_2\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ où A est un élément du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(2)$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ est un vecteur quelconque du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

I.A – Isométries affines directes du plan euclidien

I.A.1) Déterminer un couple $(A,\vec{b})$ dans $\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}^2$ tel que l'on ait $M(A,\vec{b}) = I_3$.

I.A.2) Soient $(A,\vec{b})$ et $(A',\vec{b}')$ dans $\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}^2$. Montrer que $M(A,\vec{b})M(A',\vec{b}') = M(AA', A\vec{b}'+\vec{b})$.

I.A.3) Montrer que les éléments de G sont inversibles et expliciter l'inverse de $M(A,\vec{b})$.

I.A.4) Démontrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

I.A.5) L'application $\Phi : \begin{cases} G & \to & \mathbb{R}^2\\ M(A,\vec{b}) & \mapsto & \vec{b}\end{cases}$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?

I.B – Droites affines du plan

Pour $q\in\mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, on note $\Delta(q,\vec{u})$ la droite affine du plan passant par le point (qu_1, qu_2) et orthogonale à $\vec{u}$.

I.B.1) Représenter graphiquement $\Delta(0,\vec{e}_1)$ et $\Delta\left(2, \dfrac{\vec{e}_1+\vec{e}_2}{\sqrt{2}}\right)$.

I.B.2) Déterminer une équation cartésienne de $\Delta(q,\vec{u}_\theta)$.

I.B.3) Montrer qu'une paramétrisation de $\Delta(q,\vec{u}_\theta)$ est donnée par $\begin{cases} x(t) = q\cos\theta - t\sin\theta\\ y(t) = q\sin\theta + t\cos\theta\end{cases}$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

I.B.4) À quelle condition les droites $\Delta(q,\vec{u})$ et $\Delta(r,\vec{v})$ sont-elles confondues ?

I.C – Action de G sur les droites

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites affines du plan et on considère l'application $\Psi : \begin{cases} G & \to & \mathcal{D}\\ M(A,\vec{b}) & \mapsto & \Delta(\langle A\vec{e}_1,\vec{b}\rangle, A\vec{e}_1)\end{cases}$.

BY-NC-SA

I.C.1) Représenter $\Psi(M(A,\vec{b}))$ dans le cas $A = R_{\pi/6}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

I.C.2) Déterminer $\Psi\left(M(I_2,\vec{0})\right)$.

I.C.3) Vérifier que $\Psi\left(M(R_\theta, q\vec{u}_\theta)\right) = \Delta(q,\vec{u}_\theta)$; en déduire que Ψ est surjective.

I.C.4) Soit H l'ensemble des matrices $M(A,\vec{b})$ de G telles que $\Psi(M(A,\vec{b})) = \Delta(0,\vec{e}_1)$.

a) Décrire les éléments de H.

b) Montrer que H est un sous-groupe de G.

c) Montrer que pour tout g de G, et tout h de H, on a $\Psi(gh) = \Psi(g)$.

Pour tout entier n, on note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)^n f(x,y)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ on appelle *transformée de Radon* de f la fonction $\hat{f}$ définie, là où c'est possible, par

$$\hat{f}(q,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta + t\cos\theta)\,\mathrm{d}t$$

II Fonctions radiales

II.A – Étude d'un exemple

On considère, dans cette sous-partie seulement, la fonction f définie par : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.

II.A.1) Établir que f est dans $\mathcal{B}_1$.

II.A.2) Montrer que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ avec $\hat{f}(q,\theta) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}$.

II.A.3) On pose $R(q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Démontrer que $q \mapsto \dfrac{R'(q)}{q}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$f(0,0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{R'(q)}{q}\,\mathrm{d}q$$

On pourra, pour calculer cette dernière intégrale, procéder au changement de variable $q = \mathrm{sh}(u)$.

II.A.4) La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est-elle dans $\mathcal{B}_2$?

II.B – Fonctions radiales : cas général

On suppose dans le reste de cette partie qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, telle que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

II.B.1) Pour $r\in\mathbb{R}^+$, calculer $\bar{f}(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$.

II.B.2) Justifier la convergence, pour tout réel $q \geqslant 0$, de $\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\,\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$.

II.B.3) Démontrer que la transformée de Radon de f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall q\in\mathbb{R}^+,\quad \forall\theta\in\mathbb{R}\qquad \hat{f}(q,\theta) = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\,\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$$

II.B.4) En déduire que $\forall q\in\mathbb{R}^+, \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\hat{f}(q,\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$.

III Transformée de Radon d'une fonction de $\mathcal{B}_1$

On considère dans cette partie une fonction f appartenant à $\mathcal{B}_1$ et on rappelle que

$$\hat{f}(q,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta + t\cos\theta)\,\mathrm{d}t$$

III.A – Vérifier que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

BY-NC-SA

III.B – Justifier que pour tout q et tout θ on a $\hat{f}(-q, \theta+\pi) = \hat{f}(q,\theta)$.

III.C – On pose encore $\bar{f}(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$.

III.C.1) Démontrer que $\bar{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.C.2) Démontrer que la fonction $r \mapsto r^2\bar{f}(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

III.C.3) Montrer que si on suppose de plus que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$, alors $r \mapsto r^4\bar{f}\,'(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Sous ces hypothèses, on peut démontrer en manipulant des intégrales doubles que la formule du II.B.4 reste vraie. Nous admettrons donc dans la suite que

$$\forall q \in \mathbb{R}^+ \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$$

IV Formule d'inversion

On souhaite retrouver la fonction f à partir de sa transformée $\hat{f}$. À cet effet on pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$R_{x,y}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(x\cos\theta + y\sin\theta + q, \theta)\,\mathrm{d}\theta$$

L'objectif est de démontrer la formule d'inversion de Radon : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = \dfrac{-1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{R'_{x,y}(q)}{q}\,\mathrm{d}q$.

IV.A – Résultats préliminaires

IV.A.1) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ et montrer que sa valeur est $\dfrac{\pi}{2}$.

IV.A.2) Soient ε et r fixés tels que $0<\varepsilon<r$. Avec le changement de variables $q = r\cos\theta$, établir que

$$\int_\varepsilon^r \frac{\mathrm{d}q}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} = \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}$$

IV.B – Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit h une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $r \mapsto r^2h(r)$ est bornée et on pose $H(q) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\,h(qt)}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$.

IV.B.1) Montrer que H est continue sur $]0,+\infty[$.

IV.B.2) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $H(q) = O\left(\dfrac{1}{q^2}\right)$.

IV.B.3) Démontrer que si on suppose de plus que $r \mapsto r^4h'(r)$ est bornée, alors la fonction H est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

IV.C – Vers la formule d'inversion

On considère une fonction f de $\mathcal{B}_1$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$.

On pose, avec les notations de la partie III : $\forall q\in\mathbb{R}^+, F(q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\hat{f}(q,\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$.

IV.C.1) Justifier que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$ on a $F(q) = O\left(\dfrac{1}{q}\right)$.

IV.C.2) Démontrer : $\forall\varepsilon>0, \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{F'(q)}{q}\,\mathrm{d}q = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{q^2}\left(\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}q$.

IV.C.3) On admet que l'on peut intervertir les deux intégrales ci dessus et donc que

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \int_\varepsilon^{+\infty}\left(\frac{1}{q^2}\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}q = \int_\varepsilon^{+\infty}\left(\int_\varepsilon^r\frac{r\bar{f}(r)}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}q\right)\mathrm{d}r$$

En déduire que $\forall\varepsilon>0, \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{F'(q)}{q}\,\mathrm{d}q = -2\varepsilon\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}r$.

BY-NC-SA

IV.D – La formule d'inversion

On considère une fonction f dans $\mathcal{B}_1$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$.

IV.D.1) Établir la formule d'inversion de Radon pour cette fonction f au point $(x, y) = (0, 0)$.

IV.D.2) Les hypothèses faites sur f sont-elles nécessaires pour que la formule d'inversion de Radon soit vérifiée au point $(x, y) = (0, 0)$?

IV.D.3) Proposer une démarche pour obtenir la formule d'inversion de Radon en tout couple (x, y) à partir de la formule en $(0, 0)$.

V Interprétation et application à la radiographie

La transformation de Radon peut être introduite dans le cadre plus général de l'analyse sur les groupes. Le but de cette partie est d'interpréter l'opérateur étudié plus haut en termes de fonctions invariantes sur G.

V.A – Fonctions invariantes sur G

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note f^* la fonction $f \circ \Phi$, définie sur G par $f^*(g) = f(\Phi(g))$ où $\Phi : G \to \mathbb{R}^2$ est la fonction introduite dans la question I.A.5.

V.A.1) Démontrer que pour tout g dans G et r tel que $\Phi(r) = \vec{0}$ on a $f^*(gr) = f^*(g)$.

On dit alors que f^* est *invariante* par les rotations du plan, vues comme des éléments de G.

V.A.2) On suppose à présent que f vérifie les hypothèses permettant de définir sa transformée de Radon et on va démontrer que $\hat{f}$ peut également être vue comme une fonction sur G, sujette à un autre type d'invariance. Démontrer que si deux droites $\Delta(q_1, \vec{u}_{\theta_1})$ et $\Delta(q_2, \vec{u}_{\theta_2})$ coïncident, alors $\hat{f}(q_1, \theta_1) = \hat{f}(q_2, \theta_2)$.

Ce résultat permet de faire l'abus de notation $\hat{f}(\Delta(q, \vec{u}_\theta)) = \hat{f}(q, \theta)$ sans qu'il en résulte d'ambiguïté.

V.A.3) On définit à présent $\hat{f}^\star$ sur G en composant $\hat{f}$ par Ψ : on pose, pour tout $g \in G$, $\hat{f}^\star(g) = \hat{f}(\Psi(g))$.

Démontrer que $\hat{f}^\star$ est H-invariante, c'est-à-dire que pour tous $g \in G$ et $h \in H$, $\hat{f}^\star(gh) = \hat{f}^\star(g)$.

V.B – Reconstruction en radiographie

Une technique courante en imagerie médicale consiste à mesurer l'intensité d'un faisceau de rayons X avant et après la traversée d'une certaine zone, l'objectif étant de déterminer la densité des tissus dans la zone. L'objectif des dernières questions du problème est d'illustrer, dans un modèle de dimension deux, comment la formule d'inversion de Radon peut être utilisée dans ce cadre.

On modélise la densité des tissus, exprimée dans des unités convenables, par une fonction inconnue f nulle en dehors de la zone à étudier et dont on suppose qu'elle vérifie des hypothèses assurant l'existence de $\hat{f}$.

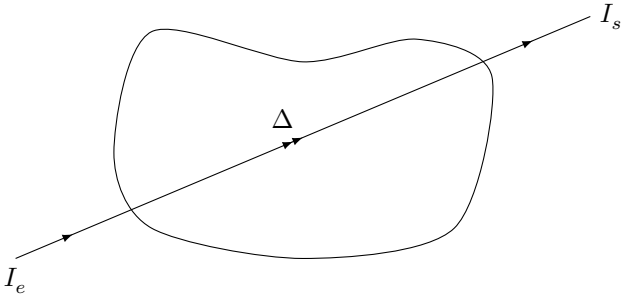


Figure 1

En supposant que chaque faisceau de rayons X incident est porté par une droite affine Δ, et en notant I son intensité mesurée de part et d'autre de la zone visée, un raisonnement heuristique donne

$$\ln\left(\frac{I_e}{I_s}\right) = \int_\Delta f \tag{V.1}$$

où le membre de droite désigne l'intégrale de f sur la droite Δ dans un sens à préciser.

V.B.1) Proposer une définition rigoureuse du membre de droite de (V.1) dans le cas où $\Delta = \Delta(q, \vec{u}_\theta)$.

V.B.2) Expliquer comment la formule d'inversion de Radon permet en principe de connaître la densité des tissus dans la zone radiographiée.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2015

Autour des sommes d'Euler

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de valeurs de la fonction ζ en des points entiers.

I Représentation intégrale de sommes de séries

I.A –

I.A.1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge.

I.A.2) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$. En déduire que $H_n \sim \ln n$.

I.B – Soit r un entier naturel.

Pour quelles valeurs de r, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

I.C –

I.C.1) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

I.C.2) En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

I.D – Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_{p,q}^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t$$

I.D.1) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

I.D.2) Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in]0,1[$, $I_{p,q}^{\varepsilon} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$.

I.D.3) En déduire que l'on a $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*$, $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

I.D.4) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

I.E – Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.

On suppose que pour tout x dans $]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Montrer que $\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) \,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$.

BY-NC-SA

I.F –

I.F.1) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geqslant 2$,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

I.F.2) Établir que l'on a alors $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$.

I.F.3) En déduire que $S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,\mathrm{d}t$

puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

II La fonction β

II.A – La fonction Γ

II.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On admettra que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

II.A.2) Soit x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

II.B – La fonction β ***et son équation fonctionnelle***

Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

II.B.1) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

II.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

II.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

II.B.4) En déduire que pour $x > 0$, $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$.

II.C – Relation entre la fonction β ***et la fonction*** Γ

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\quad \beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

II.C.1) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question on suppose $x > 1$ et $y > 1$.

II.C.2) Montrer que $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$.

II.C.3) On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y)$$

II.C.4) Soit $G(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)\,\mathrm{d}u$.

Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

II.C.5) Montrer que $\lim\limits_{a\to+\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$.

II.C.6) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c, d]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, puis que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.C.7) Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}

II.C.8) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

BY-NC-SA

III La fonction digamma

On définit la fonction ψ (appelée fonction digamma) sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme étant la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.

Pour tout réel $x > 0$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.A – Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

III.B – Sens de variation de ψ

III.B.1) À partir de la relation $(\mathcal{R})$, justifier que $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Établir que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y))$.

III.B.2) Soit $x > 0$ fixé. Quel est le sens de variation sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction $y \mapsto \beta(x,y)$?

III.B.3) Montrer que la fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III.C – Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions

III.C.1) Montrer que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

III.C.2) Soit n un entier $\geqslant 2$ et x un réel > -1. On pose $p = E(x) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Prouver que

$$0 \leqslant \psi(n+x+1) - \psi(n) \leqslant H_{n+p} - H_{n-1} \leqslant \frac{p+1}{n}$$

III.C.3) En déduire que, pour tout réel $x > -1$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

III.D – Un développement en série entière

On note g la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

III.D.1) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, +\infty[$.

Préciser notamment la valeur de $g^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k+1)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

III.D.2) Montrer que pour tout entier n et pour tout x dans $]-1, 1[$

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \zeta(2) |x|^{n+1}$$

Montrer que g est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

III.D.3) Prouver que pour tout x dans $]-1, 1[$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

BY-NC-SA

IV Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

Dans cette partie, on note B la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $B(x) = \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,1)$.

IV.A – Une relation entre B et ψ

Justifier que B est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

À l'aide de la relation trouvée au III.B.1 établir que pour tout réel $x > 0$

$$xB(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

En déduire que B est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

IV.B – Expression de S_r à l'aide de la fonction B

IV.B.1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $B(x) = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

IV.B.2) Donner sans justification une expression, à l'aide d'une intégrale, de $B^{(p)}(x)$, pour tout entier naturel p et tout réel $x > 0$.

IV.B.3) En déduire que pour tout entier $r \geqslant 2$, $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim\limits_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x)$.

IV.B.4) Retrouver alors la valeur de S_2 déjà calculée au I.F.3.

IV.C – Soit φ la fonction définie $]-1,+\infty[$ par $\varphi(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$.

IV.C.1) Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et donner pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ la valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ en fonction des dérivées successives de ψ au point 1.

IV.C.2) Conclure que, pour tout entier $r \geqslant 3$,

$$2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k)$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — PSI — 2015

4 heures — Calculatrices autorisées

Dans ce problème, nous étudions le processus de Galton-Watson qui permet entre autres de modéliser le développement d'une population. Ce processus est par exemple utilisé en biologie ou en physique nucléaire.

Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si X est une variable aléatoire entière et positive sur cet espace, on notera G_X, série entière de rayon de convergence au moins 1, la fonction génératrice de X. On rappelle que la fonction génératrice de X est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [-1,1] \qquad G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)t^n$$

La fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise sa loi. Plus précisément, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si (a_n) est une suite de réels positifs tels que, pour tout $t \in [0,1[$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X=n)$.

On admettra le théorème suivant (lemme de Cesaro) : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels convergente vers l et si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, alors la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers l.

I Étude d'une suite récurrente

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1)=1$, $f'(0)<1$ et $f''(1)>0$.

On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On pose $m = f'(1)$.

I.A –

I.A.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note l sa limite.

I.A.2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera x_f.

I.A.3) Montrer que $l = x_f$.

I.B – On suppose $m > 1$. Montrer que $x_f \in [0,1[$.

I.C – On suppose maintenant $m \leqslant 1$. Montrer que $x_f = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

I.D – Dans cette question, on suppose $m = 1$.

I.D.1) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}$.

I.D.2) En déduire que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim \frac{2}{f''(1)n}$.

On pourra utiliser le lemme de Cesaro admis en préambule.

I.E – On suppose maintenant $m < 1$ et on pose encore, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$.

I.E.1) Montrer que la série de terme général ε_n est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général $\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$.

I.E.2) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim cm^n$.

II Formule de Wald

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des précédentes. $(T, X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis, $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

BY-NC-SA

II.A – On souhaite démontrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

II.A.1) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

II.A.2) En admettant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est indépendante de X_{k+1}, prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{S_k} = (G_X)^k$.

II.A.3) En admettant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T et S_n sont indépendantes, montrer que

$$\forall t \in [0,1[, \forall K \in \mathbb{N} \qquad G_S(t) = \sum_{k=0}^{K} P(T=k)\left(G_X(t)\right)^k + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n\right)$$

II.A.4) Pour $K \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1[$, on pose $R_K = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n\right)$.

Montrer que $0 \leqslant R_K \leqslant \dfrac{1}{1-t}\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)$.

II.A.5) Conclure.

II.B – En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $E(S) = E(T)E(X_1)$.

II.C – Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire d'œufs suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ensuite, la probabilité qu'un œuf donné devienne un nouvel insecte est $\alpha \in]0,1[$.

II.C.1) Rappeler la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

II.C.2) En utilisant la relation de composition ci-dessus, déterminer la loi du nombre d'insectes issus de la ponte.

III Processus de Galton-Watson

Soit μ une loi de probabilité caractérisée par la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombre réels entre 0 et 1 telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Dire qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit la loi μ signifie que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = p_k$.

On suppose que $p_0 + p_1 < 1$ (ce qui signifie qu'il existe au moins un entier k supérieur ou égal à 2 tel que $p_k \neq 0$).

On étudie un individu qui a un certain nombre de fils. Ces fils ont également chacun (indépendamment les uns des autres) un certain nombre de fils et ainsi de suite. Afin de modéliser la situation, on se donne des variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ indépendantes qui suivent toutes la loi μ, on pose Y_0 la variable certaine égale à 1 et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$,

$$\begin{cases} Y_{n+1}(\omega) = 0 & \text{si } Y_n(\omega) = 0 \\ Y_{n+1}(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) & \text{si } Y_n(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

Y_n représente le nombre d'individus à la génération n.

S'il n'y a pas d'individu à la génération n, il n'y en a pas plus à la génération suivante et sinon, le nombre de fils du $i$ème élément de la génération n est égal à $X_{n,i}$.

On dit qu'il y a extinction lorsqu'il existe un entier n tel que $Y_n = 0$.

On note f la fonction génératrice de la loi μ (et donc de chacune des variables $X_{n,i}$) et, pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n la fonction génératrice de la variable aléatoire Y_n.

On a donc en particulier, pour $t \in [0,1]$, $\varphi_0(t) = t$.

On suppose que toute variable aléatoire suivant la loi μ possède une espérance égale à m et une variance.

III.A – Probabilité d'extinction

III.A.1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$.

III.A.2) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_n en fonction de m et de n.

III.A.3)

a) Vérifier que la probabilité d'extinction est égale à la limite de la suite $\left(\varphi_n(0)\right)_{n\geqslant 0}$.

b) Vérifier qu'on peut appliquer les résultats de la partie I à la suite $\left(\varphi_n(0)\right)_{n\geqslant 0}$.

III.A.4) Si $m \leqslant 1$, montrer que la probabilité d'extinction est égale à 1.

BY-NC-SA

On définit alors le temps T d'extinction par :

$$\omega \in \Omega \quad \begin{cases} T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Y_n(\omega) = 0 \\ T(\omega) = -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admettra que T est une variable aléatoire.

III.B – Cas sous-critique $m < 1$

On suppose dans cette question que $m < 1$.

III.B.1) Vérifier que T admet une espérance.

III.B.2)

a) Montrer que, pour tout entier n, $P(Y_n \geqslant 1) \leqslant m^n$.

b) Montrer que $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.

c) En déduire une majoration de $E(T)$.

III.C – Étude de la lignée

Dans cette question, on suppose $m \leqslant 1$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n$.

On admettra que Z est une variable aléatoire définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{Y_k = 0\}$.

III.C.1) Montrer que Z est définie sur un ensemble de probabilité 1.

III.C.2)

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(P(Z_n \leqslant k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente. Déterminer sa limite.

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(P(Z_n = k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $P(Z = k)$.

c) Montrer que, pour tout $s \in [0, 1[$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}$,

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leqslant \sum_{k=0}^{K} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}$$

d) En déduire que la suite de fonctions (G_{Z_n}) converge simplement vers G_Z sur $[0, 1]$.

III.C.3)

a) Exprimer G_{Z_1} en fonction de f.

b) On admet que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout $s \in [0, 1]$, $G_{Z_n}(s) = sf(G_{Z_{n-1}}(s))$.
En déduire que, pour tout $s \in [0, 1[$, $G_Z(s) = sf(G_Z(s))$.

c) Montrer que Z est d'espérance finie si et seulement si $m < 1$. Calculer l'espérance lorsque c'est le cas.

IV Un exemple

On suppose dans cette partie que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \frac{1}{2^{k+1}}$.

IV.A – Exprimer, pour $t \in [0, 1]$, $f(t)$ et calculer m.

IV.B – Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1[$, $\varphi_n(t) \neq 1$.

On peut donc poser, $a_n(t) = \frac{1}{\varphi_n(t) - 1}$.

IV.C – Montrer que, pour $t \in [0, 1[$, la suite $\left(a_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

IV.D – En déduire que, pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) = \frac{n + (1-n)t}{1 + n - nt}$.

IV.E – Exprimer, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $P(Y_n = k)$ en fonction de n et k.

IV.F – Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'événement $T > n$.
La variable T admet-elle une espérance ?

IV.G – Exprimer, pour $s \in [0, 1[$, $G_Z(s)$ en fonction de s.
En déduire la loi de Z.

BY-NC-SA

V Cas surcritique

On suppose dans cette partie $m > 1$.

On étudie un problème légèrement différent : k étant un entier strictement positif fixé, on suppose qu'il y a k individus à la génération 0 ; ensuite tout se passe comme précédemment.

On note W_n le nombre d'individus à la $n$ième génération et on définit u_n la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k pour la première fois au rang n :

$$u_n = P\left((W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k)\right)\right)$$

Pour n et r entiers naturels non nuls, on définit de même $u_n^{(r)}$ comme la probabilité pour que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k pour la $r$ième fois au rang n.

V.A – Vérifier que les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n s^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} u_n^{(r)} s^n$ convergent quand $s \in [-1, 1]$.

On peut donc définir, pour $s \in [-1, 1]$, $U(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n s^n$ et $U_r(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(r)} s^n$.

V.B –

V.B.1) Montrer que $P(W_1 > k) > 0$.

V.B.2) Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur k est non nulle ; on note u cette probabilité.

On pourra étudier séparément les cas $p_0 = 0$ et $p_0 > 0$.

V.C –

V.C.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer la relation

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

V.C.2) En déduire que, pour tout entier r strictement positif, $U_r = U^r$ (U^r désigne $U \times U \times \cdots \times U$ r fois).

V.D –

V.D.1) Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

V.D.2) Montrer qu'il en est de même pour la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

V.E – Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements tous de probabilité 1.

Montrer que $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$. Qu'en déduit-on pour $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$?

V.F – Soit α la probabilité qu'il y ait extinction et β la probabilité que la suite (Y_n) diverge vers l'infini.

Montrer que $\alpha + \beta = 1$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — 4 heures — Calculatrices autorisées — PSI — 2015

Le problème de Dirichlet est un problème aux limites bien connu en théorie du potentiel, en particulier lorsqu'on est en présence d'une symétrie de révolution.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, étant donnée une succession continue de valeurs sur un contour fermé (en particulier sur le cercle trigonométrique), il s'agit de déterminer une fonction (par exemple un potentiel en physique) *harmonique* à l'intérieur du domaine délimité par ce contour et coïncidant avec les valeurs données sur le contour. Dans le cas particulier où l'on a des valeurs polynomiales sur le contour fermé, on obtient comme solution un *polynôme harmonique*.

Les applications physiques liées à ce type de problème aux limites sont nombreuses, par exemple en géophysique, en physique quantique et en cristallographie.

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|\cdot\|_2$ définie par $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$.
- Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$, la notation $D((x,y),r)$ (respectivement $\bar{D}((x,y),r)$) désigne le disque ouvert de centre (x,y) et de rayon r (respectivement le disque fermé de centre (x,y) et de rayon r). En particulier la notation $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le cercle de centre O et de rayon 1).
  On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Si f est une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$, $f:\left|\begin{array}{ccc}\Omega&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&f(x,y)\end{array}\right.$, $\partial_1 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (respectivement $\partial_2 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) est la dérivée partielle du premier ordre par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique.
  Si f est de classe C^2, $\partial_{11} f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (respectivement $\partial_{22} f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) est la dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique.
- Si $u:\Omega\to\mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur l'ouvert Ω, on rappelle que le laplacien de u est l'application Δu définie par $\Delta u:\left|\begin{array}{ccc}\Omega&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\partial_{11}u(x,y)+\partial_{22}u(x,y)\end{array}\right.$
- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une application $v:\Omega\to\mathbb{R}$ est dite harmonique (sur Ω) si v est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta v(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.
- On appelle fonction polynomiale des deux variables x et y sur $\mathbb{R}^2$ (ou plus simplement polynôme de deux variables, ou encore polynôme quand il n'y a pas de confusion possible) toute application de la forme

$$P:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\displaystyle\sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N}\\k+l\leqslant n}}\alpha_{kl}\,x^k y^l\end{array}\right.$$

  où n est un entier naturel fixé et les $(\alpha_{kl})_{0\leqslant k,l\leqslant n}$ sont des coefficients réels.
  Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls ; son degré est par convention $-\infty$.
  De plus, pour tout polynôme P non nul, le degré de P est l'entier naturel $d(P)$ défini par $d(P)=\max\{k+l/\ \alpha_{kl}\neq 0\}$.
  On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à deux variables et pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des polynômes à deux variables de degré inférieur ou égal à m. On admettra dans tout le problème que $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles et que $\mathcal{P}_m$ $(m\in\mathbb{N})$ en est un sous-espace vectoriel.
  Enfin, un polynôme est dit harmonique s'il définit en plus une application harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Objectifs

Dans la partie I, on donne quelques propriétés simples des polynômes et des polynômes harmoniques.

La partie II étudie certaines applications harmoniques ; les résultats obtenus seront utilisés dans la partie III.

La partie III s'intéresse au problème de Dirichlet sur le disque unité, puis la partie IV se focalise sur le problème de Dirichlet dans le cas où la condition au bord est polynomiale. On détermine pour finir la dimension de sous-espaces vectoriels de polynômes harmoniques.

BY-NC-SA

I Résultats préliminaires

I.A – Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et P un polynôme de deux variables, tel que $P(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.

I.A.1)

a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\Omega$, l'ouvert Ω contient un sous-ensemble de la forme $I\times J$, où I et J sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ contenant respectivement x et y.

L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

b) En déduire que P est le polynôme nul.

On pourra se ramener à étudier des fonctions polynomiales d'une variable.

I.A.2) Ce résultat subsiste-t-il si l'ensemble Ω admet une infinité d'éléments mais n'est pas supposé ouvert ?

I.B –

I.B.1) Soit $m\in\mathbb{N}$. Justifier que l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$ est de dimension finie et déterminer sa dimension.

I.B.2) Déterminer un polynôme harmonique de degré 1, puis de degré 2.

I.B.3)

a) Montrer que l'ensemble des polynômes harmoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

b) Pour tout $m\geqslant 2$, on note Δ_m la restriction de Δ à $\mathcal{P}_m$. Montrer que $\dim(\ker\Delta_m)\geqslant 2m+1$.

c) Que peut-on déduire pour la dimension de l'espace vectoriel des polynômes harmoniques ?

I.C – Déterminer, dans chacun des cas suivants, un polynôme harmonique H qui vérifie $H(x,y)=f(x,y)$ pour tout $(x,y)\in C(0,1)$:

I.C.1) $f(x,y)=xy$;

I.C.2) $f(x,y)=x^4-y^4$.

II Quelques exemples d'applications harmoniques

Soit Ω un sous-ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^2$. On définit, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et tout couple $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$:

$$\Omega_{x_0,y_0,\lambda}=\{\lambda(x,y)+(x_0,y_0)\mid(x,y)\in\Omega\}$$

II.A – On prend pour Ω (uniquement dans cette question) l'intérieur du triangle équilatéral de sommets $(1,0)$, $(-1/2,\sqrt{3}/2)$ et $(-1/2,-\sqrt{3}/2)$. Faire un dessin sur lequel apparaissent Ω et $\Omega_{2,1,1/2}$.

II.B – Soient $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ fixés.

II.B.1) Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une application harmonique de classe C^2 telle que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe C^2 sur Ω. Montrer que les applications $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont également harmoniques sur Ω.

II.B.2) Par quelle(s) transformation(s) géométrique(s) l'ensemble $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est-il l'image de Ω ? Justifier que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II.B.3) Soit $g:\Omega_{x_0,y_0,\lambda}\to\mathbb{R}$ une application harmonique.

Montrer que l'application $(x,y)\mapsto g(\lambda(x,y)+(x_0,y_0))$ est harmonique sur Ω.

II.C –

II.C.1) Montrer que les applications

$$h_1:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\ln(x^2+y^2)\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad h_2:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\dfrac{x}{x^2+y^2}\end{array}\right.$$

sont harmoniques.

II.C.2) En déduire que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, l'application $(x,y)\mapsto\dfrac{1-((x+\cos t)^2+(y+\sin t)^2)}{x^2+y^2}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

II.D – ***Un exemple fondamental***

Pour $(x,y)\in D(0,1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z=x+iy$ et on pose pour t réel (quand l'expression a un sens) :

$$\mathrm{N}(x,y,t)=\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}=\frac{1-(x^2+y^2)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}$$

BY-NC-SA

II.D.1) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$\mathrm{N}_t : \left| \begin{array}{ccc} D(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{N}(x,y,t) \end{array} \right.$$

est harmonique.

On pourra utiliser la question II.B.3.

II.D.2) Dans la suite de cette partie, le couple (x,y) est fixé dans $D(0,1)$.

Montrer que $t \mapsto \mathrm{N}(x,y,t)$ est définie et continue sur $[0,2\pi]$.

II.D.3) Soit $t \in [0,2\pi]$ fixé. Déterminer deux nombres complexes α et β, indépendants de t et de z, tels que

$$\mathrm{N}(x,y,t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}}$$

II.D.4) En déduire que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(x,y,t)\,\mathrm{d}t = 1$.

On pourra écrire $\dfrac{1}{1 - ze^{-it}}$ sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

III Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0,1)$, harmoniques sur $D(0,1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(0,1)$.

Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f, consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

On définit en outre, en reprenant les notations de la partie II, l'application

$$\mathrm{N}_f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(x,y,t) f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$$

sur $D(0,1)$ et l'application

$$u(x,y) = \begin{cases} \mathrm{N}_f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(0,1) \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C(0,1) \end{cases}$$

sur $\bar{D}(0,1)$.

III.A – Étude de l'application N_f

III.A.1)

a) Montrer que N_f admet une dérivée partielle $\partial_{11}\,\mathrm{N}_f$ d'ordre 2 par rapport à x.

De même on peut montrer que N_f admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à toutes ses variables, continues sur $D(0,1)$. Ce résultat est admis pour la suite.

Exprimer, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\partial_{ij}\,\mathrm{N}_f(x,y)$ en fonction de $\partial_{ij}\,\mathrm{N}(x,y,t)$.

b) En déduire que u est harmonique sur $D(0,1)$.

III.A.2) Dans cette question, on fixe $t_0 \in [0,2\pi]$, $(x,y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0,2\pi] \mid \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \delta\}$$

a) Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

b) Montrer, en utilisant l'application f, l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{t \in I_0^\delta} \mathrm{N}(x,y,t)\big(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)\big)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

c) Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \delta/2$, alors

$$|\,\mathrm{N}(x,y,t)| \leqslant 4\frac{1 - (x^2+y^2)}{\delta^2}$$

BY-NC-SA

d) Déduire de la question précédente que, pour $\delta > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x,y)-(\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \eta$, alors

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} \mathrm{N}(x,y,t)(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0))\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

III.A.3) Prouver que u est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Qu'en conclut-on pour l'application u ?

III.B – Dans cette sous-partie, on suppose que f est l'application nulle sur $C(0,1)$ et que u est un élément de $\mathcal{D}_f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application

$$u_n : \left| \begin{array}{ccc} \bar{D}(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & u(x,y) + \frac{1}{n}(x^2+y^2) \end{array} \right.$$

III.B.1) Supposons que u_n admette un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D(0,1)$.

a) En s'intéressant au comportement de la fonction $x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$ montrer que, dans ce cas, $\partial_{11} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant 0$.

De même, on peut montrer que $\partial_{22} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant 0$. *Ainsi* $\Delta u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant 0$. *Ce résultat est admis pour la suite.*

b) En déduire que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(0,1)$.

III.B.2) En déduire que, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, $u_n(x,y) \leqslant 1/n$.

III.B.3) Montrer que u est identiquement nulle sur $\bar{D}(0,1)$.

III.C – Prouver que, pour toute application continue $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ admet exactement un élément.

IV Retour sur les polynômes harmoniques

IV.A – Dans cette question, m est un entier supérieur ou égal à 2. On considère un polynôme $P \in \mathcal{P}_m$ et on note P_C la restriction de P au cercle $C(0,1)$.

IV.A.1) Montrer que l'application

$$\phi_{m-2} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{m-2} & \to & \mathcal{P} \\ Q & \mapsto & \Delta \tilde{Q} \end{array} \right. \qquad \text{où} \qquad \tilde{Q}(x,y) = (1-x^2-y^2)Q(x,y)$$

est linéaire et injective et que $\operatorname{Im} \phi_{m-2} \subset \mathcal{P}_{m-2}$.

IV.A.2) En déduire qu'il existe un polynôme $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $P+(1-x^2-y^2)T$ soit un polynôme harmonique.

IV.A.3) Montrer que l'unique élément de l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ est la restriction à $\bar{D}(0,1)$ d'un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

IV.A.4) Expliciter l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ quand le polynôme P est défini par $P(x,y) = x^3$.

IV.B –

IV.B.1) Soit $P \in \mathcal{P}$. Montrer que P se décompose de manière unique sous la forme :

$$P(x,y) = H(x,y) + (1-x^2-y^2)Q(x,y)$$

où H est un polynôme harmonique et $Q \in \mathcal{P}$.

IV.B.2) Soit $m \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{H}_m$ le sous-espace vectoriel des polynômes harmoniques de degré inférieur ou égal à m. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_m$.

IV.B.3) Déterminer explicitement une base de $\mathcal{H}_3$.

IV.C – Dans cette dernière sous-partie, on se place sur $\mathbb{R}^n$ pour un entier naturel $n \geqslant 3$ et on reprend les notations précédentes, en adaptant les outils au contexte de $\mathbb{R}^n$; en particulier on considère maintenant les applications polynomiales à n variables. On admet que le problème de Dirichlet sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, associé à une fonction continue et définie sur la sphère unité (notée $S_n(0,1)$) $f : S_n(0,1) \to \mathbb{R}$, admet encore une unique solution.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

IV.C.1) Montrer que l'ensemble

$$\{(i_1, i_2, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n \mid i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m\}$$

a pour cardinal $\binom{n+m-1}{m}$. En déduire la dimension de $\mathcal{P}_m$.

IV.C.2) Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_m$ en fonction de m et de n.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2015

4 heures Calculatrices autorisées

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.

Si f est un endomorphisme de E, pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.

Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on définit la suite $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N} \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n.

Pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$.

I Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

I.A – Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

I.B –

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.

I.B.2) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.

Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que trois sous-espaces stables.

I.C –

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f. Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f.

I.C.2) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f.

I.C.3) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?

I.D – Dans cette sous-partie, E est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f.

On pourra partir d'une base de F et d'une base de E constituée de vecteurs propres de f.

I.D.2) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f, alors f est diagonalisable.

Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

II Deuxième partie

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

II.A.1) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ est stable par f.

II.A.2) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F.

Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

CC BY-NC-SA

II.A.3) Si on note $H_x = \{i \in [\![1,p]\!] \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = [\![1,r]\!]$ avec $1 \leqslant r \leqslant p$. Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $[\![1,r]\!]$.

On note $V_x = \text{Vect}(x_1, ..., x_r)$.

Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, ..., x_r)$ est une base de V_x.

II.A.4) Montrer que pour tout j de $[\![1,r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $\left(f^{j-1}(x)\right)_{1\leqslant j\leqslant r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$.

II.A.5) Montrer que $\left(f^{j-1}(x)\right)_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de V_x.

II.A.6) En déduire que pour tout i de $[\![1,p]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.

II.B.1) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.

II.B.2) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

II.B.3) Si $n \geqslant 3$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

III Troisième partie

III.A – On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$.

III.A.1) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

III.A.2) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tels que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

b) Montrer que la famille $\left(D^i(R)\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de F.

c) En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.

III.A.3) Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

III.B – On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

III.B.1) Déterminer l'ensemble des vecteurs u de E tels que la famille $\mathcal{B}_{f,u} = \left(f^{n-i}(u)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit une base de E.

III.B.2) Dans le cas où $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E, quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$?

III.B.3) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1}.

III.B.4) Donner tous les sous-espaces de E stables par f. Combien y en a-t-il ? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux $\ker(f^i)$ pour i dans $[\![0,n]\!]$.

IV Quatrième partie

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = MX$ pour tout X de E.

IV.A – Si on note $X_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}$ où $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$ et $\mathcal{B}_n = (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de E, quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_n$?

IV.B – Montrer que si n est impair, alors f admet au moins une valeur propre réelle.

IV.C – Dans cette question, $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$, avec (α, β) dans $\mathbb{R}^2$, est une valeur propre non réelle de M et Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul est tel que $MZ = \lambda Z$.

Si $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ on note $\overline{M} = (m'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ avec $m'_{i,j} = \overline{m}_{i,j}$ (conjugué du nombre complexe $m_{i,j}$) pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ et si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ on note $\overline{Z} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ avec $z'_i = \overline{z}_i$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$.

On pose $X = \dfrac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ et $Y = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(Z - \overline{Z})$.

IV.C.1) Vérifier que X et Y sont dans E et montrer que la famille (X, Y) est libre dans E.

BY-NC-SA

IV.C.2) Montrer que le plan vectoriel F engendré par X et Y est stable par f et donner la matrice de f_F dans la base (X, Y).

IV.D – Que penser de l'affirmation : « tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable » ?

IV.E – Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant ni droite ni plan stable ?

IV.F – Dans cette question on considère le système différentiel linéaire $\mathcal{S} : X' = AX$ associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On appelle *trajectoires de* $\mathcal{S}$ les arcs de l'espace $\mathbb{R}^3$ paramétrés par les solutions de $\mathcal{S}$. On veut déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes de $\mathcal{S}$.

IV.F.1) Construire une matrice P inversible et une matrice $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec (α, β, γ) dans $(\mathbb{R}^*)^3$ telles que $P^{-1}AP = T$ et déterminer un plan F et une droite G stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

IV.F.2) Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_U : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = U \end{cases}$ lorsque U appartient à G.

IV.F.3) Pour tout $\sigma = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$, on considère le problème de Cauchy $\mathcal{C}_\sigma : \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \\ x(0) = a,\ y(0) = b \end{cases}$ et $\varphi = (x, y)$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ l'unique solution de $\mathcal{C}_\sigma$.

Préciser $x'(0)$ et $y'(0)$; montrer que x et y sont solutions d'une même équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants et ainsi en déduire φ en fonction de a et de b.

IV.F.4) Déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes du système différentiel $X' = AX$.

V Cinquième partie

Dans cette partie E est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

On considère un endomorphisme f de E et on note A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

V.A –

V.A.1) Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormée.

Ce produit scalaire est noté de manière usuelle par $\langle u, v \rangle$ ou plus simplement $u \cdot v$ pour tout (u, v) de E^2.

V.A.2) Si u et v sont représentés par les matrices colonnes respectives U et V dans la base $\mathcal{B}$, quelle relation simple existe-t-il entre $u \cdot v$ et le produit matriciel ${}^tUV$ (où ${}^tU$ est la transposée de U) ?

V.B – Soit H un hyperplan de E et D son supplémentaire orthogonal.

Si (u) est une base de D et si U est la matrice colonne de u dans $\mathcal{B}$, montrer que H est stable par f si et seulement si U est un vecteur propre de la transposée de A.

V.C – Déterminer ainsi le(s) plan(s) stable(s) de f lorsque $n = 3$ et A est la matrice considérée en IV.F.

V.D – Dans cette question, E est un espace vectoriel réel de dimension n et f est un endomorphisme de E.

V.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors il existe n hyperplans de E, $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, tous stables par f tels que $\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$.

V.D.2) Un endomorphisme f de E pour lequel il existe n hyperplans de E stables par f et d'intersection réduite au vecteur nul est-il nécessairement diagonalisable ?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

4 heures Calculatrices autorisées

2015

L'objet du problème est l'étude de quelques outils permettant l'étude des signaux déterministes.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction f de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est à *support compact* s'il existe deux réels a et b vérifiant $a<b$ tels que f est nulle en dehors du segment $[a,b]$.

On considère dans tout le problème l'ensemble $\mathcal{F}_{sr}$ des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on appelle de telles fonctions des signaux réguliers.

On note $f^{(k)}$ la fonction dérivée k-ième d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$; si $k=0$, $f^{(k)}=f$.

I Étude de nouveaux espaces fonctionnels

I.A – Fonction test $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

Dans cette sous-partie, on note φ la fonction définie par :

$$\begin{cases}\varphi(x)=0 & \text{si } |x|\geqslant 1\\ \varphi(x)=\exp(-\dfrac{x^2}{1-x^2}) & \text{si } |x|<1\end{cases}$$

I.A.1)

a) Étudier les variations de φ.

b) Tracer la représentation graphique de φ.

c) Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$.

d) Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$.

I.A.2) Montrer que la fonction dérivée de tout élément de $\mathcal{D}$ est un élément de $\mathcal{D}$.

I.A.3)

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel strictement positif.

b) Pour tout réel x, on pose $\theta(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $\rho_n(x)=n\theta(nx)$.

Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad \int_{\mathbb{R}}\rho_n(x)\,\mathrm{d}x=1$$

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}_{sr}$ et tout entier naturel non nul n, on pose

$$(f*\rho_n)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\rho_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

I.A.4) Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}_{sr}$.

Montrer que la fonction $f*\rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

I.A.5) Soit I la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle $[-1,1]$, et 0 ailleurs. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x)=I*\rho_n(x)$.

a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, exprimer $I_n(x)$ en fonction de φ.

b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que I_n appartient à $\mathcal{D}$ et étudier ses variations.

c) Représenter graphiquement I_2 et I_3.

d) Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge simplement vers une fonction J que l'on déterminera. Montrer que J et I sont égales sauf sur un ensemble fini de points.

e) La suite de fonction (I_n) converge-t-elle uniformément vers J ?

BY-NC-SA

I.B – Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide

On dit qu'une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est à décroissance rapide si

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \lim_{x\to+\infty} x^m f^{(n)}(x) = \lim_{x\to-\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide.

I.B.1) Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Montrer que si f est dans $\mathcal{S}$ alors $f^{(p)}$ est dans $\mathcal{S}$ pour tout entier naturel p.

I.B.3) Montrer que si P est une fonction polynôme et si f est dans $\mathcal{S}$, alors Pf appartient à $\mathcal{S}$.

II Espace des distributions sur $\mathcal{D}$

II.A – Définitions, exemples

On dit que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers la fonction φ de $\mathcal{D}$ et on note $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(\varphi_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi^{(k)}$ et s'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| > a \Longrightarrow \varphi_n(x) = 0$$

On appelle distribution sur $\mathcal{D}$ toute application linéaire $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \forall (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} \qquad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Longrightarrow T(\varphi_n) \to T(\varphi)$$

On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}$.

II.A.1) Montrer que si $f \in \mathcal{F}_{sr}$ alors l'application T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

définit une distribution sur $\mathcal{D}$.

On appelle distribution régulière toute distribution de la forme T_f, où $f \in \mathcal{F}_{sr}$.

II.A.2) Soit U la fonction définie par

$$\begin{cases} U(x) = 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ U(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Justifier que U définit une distribution sur $\mathcal{D}$.

II.A.3) Soit a un nombre réel.

a) Montrer que l'application δ_a qui à tout $\varphi \in \mathcal{D}$ associe $\varphi(a)$ est une distribution.

b) En utilisant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_n(t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{(t-a)^2}{(t-a+1/n)(t-a-1/n)}\right) & \text{si } t \in]a-1/n, a+1/n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer que $\forall f \in \mathcal{F}_{sr}$, $T_f \neq \delta_a$.

II.B – Dérivation des distributions sur $\mathcal{D}$

Si T est une distribution sur $\mathcal{D}$, on définit la distribution dérivée T' par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

II.B.1) Justifier que T' est une distribution sur $\mathcal{D}$.

Dans la suite du problème, pour $f \in \mathcal{F}_{sr}$, on notera $T'_f = (T_f)'$.

II.B.2) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que $(T_f)' = T_{f'}$. Adapter ce résultat au cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

II.B.3) Montrer que $T'_U = \delta_0$.

BY-NC-SA

II.B.4) On considère l'application T qui à toute fonction φ de $\mathcal{D}$ associe le nombre réel $T(\varphi)$ défini par

$$T(\varphi) = \int_{-1}^{0} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que T est une distribution régulière.

b) Calculer la dérivée de cette distribution.

II.B.5) Si f est un élément de $\mathcal{F}_{sr}$ et si a est un réel, on pose

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$$

La différence $f(a^+) - f(a^-)$, appelée saut en a, est notée $\sigma(a)$.

a) Soient $a_1, ..., a_p$ des réels tels que $a_1 < ... < a_p$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On suppose de plus que f est continue sur $]-\infty, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup ... \cup]a_p, +\infty[$.

Montrer que

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^{p} \sigma(a_i)\delta_{a_i}$$

b) Retrouver par cette méthode les résultats des questions II.B.3 et II.B.4.b.

II.C – Suites de distributions sur $\mathcal{D}$

On dit que la suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution T si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi)$$

II.C.1) Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction U_n nulle sur les réels négatifs, affine sur l'intervalle $[0, 1/n]$, égale à 1 pour les réels plus grand que $1/n$ et continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la suite de distributions régulières $(T_{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T_U.

b) Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad T'_{U_n}(\varphi) = \int_{0}^{1/n} n\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire que la distribution T'_{U_n} est régulière et donner une fonction V_n telle que $T_{V_n} = T'_{U_n}$.

d) Représenter V_n pour $n = 1, 2, 4$.

e) Montrer que si la suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution T, alors $(T'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T'.

f) Quelle est la limite de T'_{U_n} quand n tend vers l'infini ?

II.C.2) Pour tout entier naturel non nul n, on considère les fonctions

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2} & \\ g_n(x) = nx^n & \text{si } x \in [0,1] \text{ et nulle ailleurs} \\ h_n(x) = n^2 \sin nx & \text{si } x \in [-\pi/n, \pi/n] \text{ et nulle ailleurs} \end{cases}$$

a) Vérifier qu'elles appartiennent à $\mathcal{F}_{sr}$.

b) Étudier les variations des fonctions f_n, g_n et h_n puis tracer leur représentation graphique pour $n = 1$ et $n = 2$.

c) Étudier la convergence des suites de distributions (T_{f_n}), (T_{g_n}) et (T_{h_n}).

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI

2015

4 heures Calculatrices autorisées

I Autour des matrices tridiagonales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par convention $M^0 = I_n$.

Les trois sous-parties I.A, I.B et I.C sont indépendantes.

I.A – Cas des matrices 3 × 3 et 4 × 4 — Applications en physique et en chimie

I.A.1) Préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.

b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $a_0, ..., a_N$ dans $\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P\left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k\right) P^{-1}$.

c) Expliciter $\sum_{k=0}^{N} a_k B^k$ lorsque B est la matrice diagonale : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

I.A.2) Diagonalisation d'une famille de matrices 3 × 3

On considère, dans cette question, les matrices $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice diagonale D_3 et une matrice inversible P_3 telles que $A_3 = P_3 D_3 P_3^{-1}$.

b) On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base.

c) Justifier que toute matrice $M(a,b,c)$ de $\mathcal{F}$ est diagonalisable.

d) Exprimer A_3^2 en fonction de J et de I_3.

e) Soit $M(a,b,c)$ appartenant à $\mathcal{F}$. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, A_3 et A_3^2.

f) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $M(a,b,c)$.

I.A.3) Application en physique

On considère, dans cette question, la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère un système de 3 oscillateurs couplés, où les 4 ressorts sont identiques et de constante de raideur k. Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1, x_2 et x_3 à partir de leur position d'origine respective O_1, O_2 et O_3, positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus. On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m}, x_{2m} et x_{3m} sans vitesse initiale.

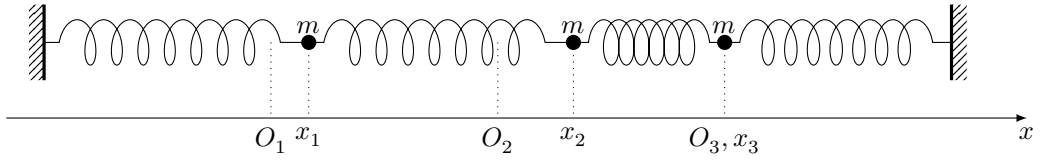


Figure 1

BY-NC-SA

On montre, en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en posant $\omega_0^2 = k/m$ (avec $\omega_0 \in \mathbb{R}^{+*}$), que les abscisses x_1, x_2 et x_3 vérifient le système différentiel

$$(S1) : \begin{cases} x_1''(t) &= -2\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 x_2(t) \\ x_2''(t) &= \omega_0^2 x_1(t) - 2\omega_0^2 x_2(t) + \omega_0^2 x_3(t) \\ x_3''(t) &= \omega_0^2 x_2(t) - 2\omega_0^2 x_3(t) \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice M_3 telle que $(S1)$ s'écrive $X''(t) = M_3 X(t)$.

b) Exprimer cette matrice M_3 en fonction de A_3 et de I_3.

c) En déduire une matrice D_3' diagonale et une matrice P_3' inversible telles que $M_3 = P_3' D_3' P_3'^{-1}$.

d) Résoudre alors le système $(S1)$, c'est-à-dire déterminer les expressions de x_1, x_2 et x_3 en fonction de t et des conditions initiales x_{1m}, x_{2m} et x_{3m}.

I.A.4) Application en chimie

On considère, dans cette question, la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

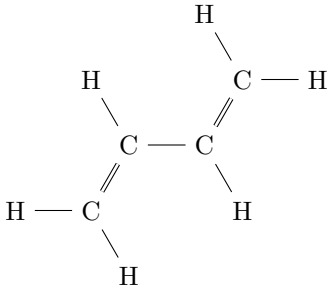


Figure 2 trans-butadiène

Dans le modèle quantique de l'atome, on ne considère plus que les électrons d'un atome sont en orbite circulaire autour du noyau, mais occupent de manière probabiliste certaines régions de l'espace autour du noyau. Une orbitale atomique correspond à une région de l'espace dans laquelle on a 95% de chance de trouver un électron considéré. Pour une molécule, constituée de plusieurs atomes, on parle d'orbitale moléculaire. En 1930, Hückel publie une méthode permettant de déterminer des orbitales moléculaires qui conduit à diagonaliser des matrices tridiagonales. Par exemple, si on s'intéresse à la construction des orbitales moléculaires du trans-butadiène (figure 2), les orbitales moléculaires, notées π, sont des combinaisons linéaires d'orbitales atomiques, notées respectivement p_1, p_2, p_3 et p_4 des atomes de carbone, elles s'écrivent sous la forme $\pi = C_1 p_1 + C_2 p_2 + C_3 p_3 + C_4 p_4$.

On est alors amené à déterminer les valeurs de ε, pour lesquelles il existe C_1, C_2, C_3 et C_4 réels non tous nuls, solutions du système

$$(S2) : \begin{cases} \alpha C_1 + \beta C_2 &= \varepsilon C_1 \\ \beta C_1 + \alpha C_2 + \beta C_3 &= \varepsilon C_2 \\ \beta C_2 + \alpha C_3 + \beta C_4 &= \varepsilon C_3 \\ \beta C_3 + \alpha C_4 &= \varepsilon C_4 \end{cases}$$

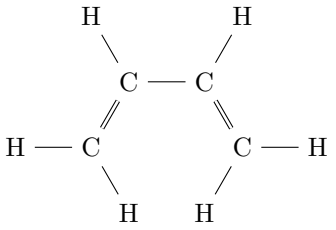


Figure 3 cis-butadiène

Les différentes valeurs de ε que l'on va trouver correspondent aux énergies des différentes orbitales moléculaires possibles. α et β sont des constantes données, indépendantes des atomes de carbone considérés. La constante α correspond à une énergie propre à l'atome de carbone. La constante β correspond à une énergie d'interaction entre deux atomes de carbone voisins.

a) À la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de quelle matrice correspond la recherche des ε, pour lesquelles il existe C_1, C_2, C_3 et C_4 non tous nuls, solutions de $(S2)$?

On note M_4 cette matrice.

b) Exprimer M_4 en fonction de I_4 et de A_4.

c) On admet que si on pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $D_4 = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi \end{pmatrix}$ et $P_4 = \begin{pmatrix} \varphi - 1 & \varphi & \varphi & \varphi - 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \varphi - 1 & \varphi & -\varphi & 1-\varphi \end{pmatrix}$,

alors P_4 est inversible et on a $D_4 = P_4^{-1} A_4 P_4$.

Déterminer, en fonction de φ, une matrice D_4' diagonale et une matrice P_4' inversible telle que $D_4' = P_4'^{-1} M_4 P_4'$. En déduire les différentes valeurs de ε possibles et, pour chaque valeur de ε, les valeurs de C_1, C_2, C_3 et C_4 correspondantes.

d) On s'intéresse maintenant aux orbitales moléculaires de la molécule de cis-butadiène (cf figure 3). On souhaite appliquer à cette molécule la même méthode que précédemment, mais sans négliger l'énergie d'interaction entre le premier et le dernier atome de carbone. Quels coefficients de M_4 doit-on modifier ? On ne demande pas de calcul.

BY-NC-SA

I.B – Diagonalisation de A_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on appelle χ_n le polynôme caractéristique de A_n : $\chi_n(X) = \det(XI_n - A_n)$ et, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, on pose $u_n = \chi_n(2\cos\alpha) = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos\alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2\cos\alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$.

I.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, déterminer une relation de récurrence liant u_n, u_{n-1} et u_{n-2}.

I.B.2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$.

I.B.3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, A_n possède n valeurs propres deux à deux distinctes, que l'on explicitera.

I.B.4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A_n.

On pourra considérer les vecteurs $X_\alpha = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \sin 2\alpha \\ \vdots \\ \sin n\alpha \end{pmatrix}$.

I.C – Localisation des valeurs propres de certaines matrices tridiagonales

Dans cette sous-partie, on considère un entier $n \geqslant 2$, a et b deux nombres réels strictement positifs et B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante : $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathrm{sp}(B)$ le spectre de la matrice B c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice réelle B et, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $C_\lambda = B - \lambda I_n$. Le but de cette sous-partie est de localiser les valeurs propres réelles de B, c'est-à-dire de trouver un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sp}(B) \subset I$.

I.C.1) Soit λ une éventuelle valeur propre réelle de B. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, non nul, vérifiant $C_\lambda X = 0$.

On pose $|x_k| = max(|x_1|, ..., |x_n|)$.

a) En examinant la k-ième ligne du système $C_\lambda X = 0$, montrer que $|\lambda| \leqslant a + b$.

b) En déduire un premier intervalle I tel que $\mathrm{sp}(B) \subset I$.

I.C.2) Dans la suite de cette sous-partie, on considère λ quelconque dans $\mathbb{R}$.

On dira qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (R) lorsque l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} : bu_k - \lambda u_{k+1} + au_{k+2} = 0$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Montrer que X vérifie $C_\lambda X = 0$ si et seulement si les nombres $x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ sont les $n+2$ premiers termes d'une suite vérifiant (R).

I.C.3) On suppose dans cette question que $\lambda^2 > 4ab$.

a) Déterminer l'ensemble des suites vérifiant (R).

b) Montrer que si un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ vérifie $C_\lambda X = 0$ alors c'est le vecteur nul.

I.C.4) On suppose dans cette question que $\lambda^2 = 4ab$.

a) Déterminer l'ensemble des suites vérifiant (R).

b) Montrer que si un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ vérifie $C_\lambda X = 0$ alors c'est le vecteur nul.

I.C.5) En déduire que $\mathrm{sp}(B) \subset]-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}[$.

I.C.6) Le résultat de la question I.C.5 est-il meilleur que celui du I.C.1 ?

II Séries de pile ou face

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté. Pour décrire la succession de n lancers, on introduit la notion de séries de lancers amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi, la première série est de longueur $m \in [\![1, n-1]\!]$ si les m premiers

BY-NC-SA

lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)$-ième l'autre côté, et de longueur n si les n lancers ont amené le même côté de la pièce. Si la longueur de la première série est égale à $m < n$, la deuxième série commence au $(m+1)$-ième lancer et se termine au lancer précédant un changement de côté s'il y a au moins un deuxième changement de côté au cours des n lancers, sinon on dit qu'elle est de longueur $n-m$. On peut définir de même les séries suivantes.

Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou face au bout de n lancers. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ième lancer amène pile » et F_i l'événement contraire.

Les deux sous-parties II.A et II.B sont indépendantes.

II.A – Étude des longueurs de séries

On considère dans cette sous-partie que $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

II.A.1) On note L_1 la longueur de la première série.

a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$ (ensemble des valeurs prises par L_1).

b) On suppose que $m < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+1$. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m)$.

c) On suppose maintenant que $m = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = n)$.

d) Vérifier que $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m) = 1$.

II.A.2) On note L_2 la longueur de la deuxième série, s'il y en a une, et on pose $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série.

a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.

b) On suppose que $m + k < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+k+1$. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

c) On suppose que $m + k = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

d) En déduire la valeur de $P(L_2 = k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

e) Calculer $P(L_2 = 0)$.

II.B – Étude du nombre de séries lors de n lancers

On considère dans toute cette sous-partie que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = 1/2$. On suppose que l'on effectue n ($n \geqslant 3$) lancers indépendants et on note N_k le nombre de séries lors des k premiers lancers ($k \leqslant n$). Par exemple, si on prend $n = 11$ et si les lancers successifs donnent : `FFPPPPFFPPP` (`F` désignant face et `P` pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_{11}$: $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$, $N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$ et $N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4$. On admettra que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, N_k est une variable aléatoire sur Ω_n.

II.B.1) Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

II.B.2) Déterminer $N_n(\Omega_n)$, puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

II.B.3) Fonctions génératrices de N_n

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$, $G_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k$.

a) Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

b) Que représente $G_n'(1)$?

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})$$

Montrer alors que $P(N_n = k) = \dfrac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \dfrac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1)$.

d) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $G_n(s) = \dfrac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$.

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$.

e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n lancers.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI

4 heures Calculatrices autorisées

2015

Notations et définitions

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On notera par ailleurs :

- S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ des entiers compris entre 1 et n, c'est-à-dire des applications de $[\![1,n]\!]$ vers lui-même qui sont bijectives. C'est un ensemble fini ayant $n!$ éléments et qui forme un groupe pour la loi de composition $\circ$, appelé groupe symétrique d'ordre n.
- $\mathcal{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il est muni du produit scalaire défini par $\langle X, Y\rangle = X^T Y$ ainsi que de la norme associée définie par $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$.
- $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est muni du produit scalaire défini par $(A \mid B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ ainsi que de la norme associée définie par $N(A) = \sqrt{(A \mid A)}$.
- $I_n = \mathrm{diag}(1, ..., 1)$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}(n) = \{P \in \mathcal{M}_n : P^T P = I_n\}$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n$. On rappelle que c'est un groupe pour le produit matriciel appelé groupe orthogonal d'ordre n.
- $\mathcal{SO}(n) = \{P \in \mathcal{O}(n) : \det(P) = 1\}$.

On définit également les points suivants.

- Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n$, on définit le segment $[A, B] = \{(1-t)A + tB,\ t \in [0,1]\}$.
- Une partie Φ de $\mathcal{M}_n$ est dite *convexe* lorsque pour tous $A, B \in \Phi$, on a $[A, B] \subset \Phi$.
- Si Φ est convexe, $A \in \Phi$ est dit *extrémal* (dans Φ) si l'égalité $A = (1-t)A_1 + tA_2$ avec $t \in]0,1[$ et A_1, A_2 dans Φ implique $A = A_1 = A_2$.

Ce problème a pour objectif d'étudier des propriétés de certains sous-ensembles de $\mathcal{M}_n$ et d'en donner quelques illustrations géométriques. Il est constitué de cinq parties, largement indépendantes entre elles.

I Étude de l'ensemble $\mathcal{E}_n$

Dans toute cette partie, on s'intéresse à l'ensemble défini par $\mathcal{E}_n = \{P \in \mathcal{M}_n :\ \forall X \in \mathcal{R}^n,\quad \|PX\| \leqslant \|X\|\}$.

I.A – Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathcal{E}_2$.

I.B – Si $M \in \mathcal{E}_n$, que dire de ses valeurs propres réelles ?

Calculer le spectre de $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et en déduire que A n'appartient pas à $\mathcal{E}_3$.

I.C – Montrer que $\mathcal{E}_n$ est convexe.

I.D – Soit $M \in \mathcal{M}_n$. On note $C_1, C_2, ..., C_n$ ses vecteurs colonnes.

Montrer que $N(M)^2 = \sum_{j=1}^{n} \|C_j\|^2$. En déduire une expression de $N(M)$ à l'aide des coefficients de M.

I.E – Montrer alors que $\mathcal{E}_n$ contient la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n$.

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

I.F – Montrer que $\mathcal{E}_n$ est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$. Montrer de plus que cette inclusion est stricte dans le cas $n = 3$.

I.G – Soit $A \in \mathcal{M}_n$ symétrique (vérifiant $A^T = A$). Montrer que $A \in \mathcal{E}_n$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont dans $[-1, 1]$.

I.H – Soit $B \in \mathcal{M}_n$ et $A = B^T B$. Montrer que $B \in \mathcal{E}_n$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, 1]$.

II Matrices de permutation

II.A – ***Cas*** $n = 3$

L'ensemble S_3 des permutations de $[\![1,3]\!]$ contient 6 éléments. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{R}^3$.

II.A.1) Sachant qu'une application σ de S_3 est déterminée par la donnée du triplet $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$, expliciter les 6 applications de S_3.

BY-NC-SA

II.A.2) Justifier que $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et préciser ses valeurs propres complexes.

II.A.3) Justifier que $L \in \mathcal{SO}(3)$. En déduire l'existence de $M \in \mathcal{SO}(3)$ telle que $M^3 = L$. Combien existe-t-il de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^3 = L$?

II.A.4) Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Le segment $[K, L]$ est-il contenu dans $\mathcal{O}(3)$?

Les ensembles $\{K^r L^h \ : \ r \in \{0,1\}, h \in \{0,1,2\}\}$ et $\{M_\sigma : \ \sigma \in S_3\}$ sont-ils égaux ?

II.A.5) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel (réel) de $\mathcal{M}_3$ engendré par l'ensemble $\{M_\sigma : \ \sigma \in S_3\}$.

II.B – Cas général $n \geqslant 1$

II.B.1) On note $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathcal{R}^n$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on note M_σ l'unique matrice de $\mathcal{M}_n$ telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $M_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$.

Préciser les coefficients de M_σ et justifier que $M_\sigma \in \mathcal{O}(n)$.

II.C – Une matrice de la forme M_σ est dite *matrice de permutation* et on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que l'application $\varphi : \sigma \mapsto M_\sigma$ du groupe $(S_n, \circ)$ dans le groupe multiplicatif $\mathcal{O}(n)$ est injective et que, pour tout σ et σ' de S_n, $\varphi(\sigma \circ \sigma') = \varphi(\sigma) \circ \varphi(\sigma')$.

On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$, fini de cardinal $n!$.

II.C.1) Pour tout $\sigma \in S_n$, montrer que $\{(M_\sigma)^k : \ k \in \mathbb{N}^*\}$ est fini. En déduire l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(M_\sigma)^p = I_n$.

III Matrices magiques

Une matrice $M = (m_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n$ est dite *magique* s'il existe un réel $s(M)$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait :

$$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} = s(M)$$

On note Π_n l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n$.

On note encore $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n$ et $J = UU^T = \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & ... & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$.

Soient également $D = \text{vect}(U)$ la droite de $\mathcal{R}^n$ engendrée par U et $H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n : \sum_{i=1}^{n} h_i = 0 \right\}$ (l'ensemble des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont la somme des coordonnées vaut 0).

III.A – Montrer que les matrices de permutations sont magiques, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_n \subset \Pi_n$.

III.B – Montrer que les sous espaces D et H sont supplémentaires dans $\mathcal{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

III.C – Soit $M \in \mathcal{M}_n$.

III.C.1) Montrer que M est magique si et seulement s'il existe un réel λ tel que $MJ = JM = \lambda J$.

III.C.2) Montrer que M est magique si et seulement si M laisse stable D et H.

III.C.3) Montrer que Π_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ stable pour le produit matriciel.

III.C.4) Montrer que $s : M \in \Pi_n \mapsto s(M) \in \mathbb{R}$ est une application linéaire, vérifiant $s(MM') = s(M)s(M')$ pour tous $M, M' \in \Pi_n$.

III.C.5) Soit M magique et inversible. Montrer que M^{-1} est magique et calculer $s(M^{-1})$.

III.D – Déterminer $\dim(\Pi_n)$.

III.E – Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $J^k \in \Pi_n$ et que $Z = \text{vect}(I_n, J)$ est stable pour le produit matriciel.

III.F – Déterminer le centre de Π_n c'est-à-dire : $\{M \in \Pi_n : \forall A \in \Pi_n, AM = MA\}$.

On pourra utiliser les matrices de permutation élémentaire $P_{i,j}$ avec $i < j$, associée à la permutation de $[\![1, n]\!]$ qui échange i et j et laisse invariant les autres éléments.

III.G – Déterminer un supplémentaire de $\ker(s)$ dans Π_n.

III.H – Matrices super-magiques

Une matrice M à coefficients dans $\mathbb{R}$ de taille $n \times n$ est dite *super-magique* s'il existe un nombre $s(M)$ tel que les sommes des coefficients sur les lignes, sur les colonnes et sur les deux diagonales soient toutes égales à $s(M)$.

BY-NC-SA

III.H.1) Exprimer les conditions précédentes en fonction des $M_{i,j}$ (coefficient de M à la i-ème ligne et j-ème colonne).

III.H.2) On choisit $n = 3$. Déterminer une base de l'espace vectoriel des matrices super-magiques de $\mathcal{M}_3$.

IV Matrices bistochastiques

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est dite *bistochastique* si M est magique ($M \in \Pi_n$), tous les coefficients de M sont positifs et $s(M) = 1$. Ainsi si $M = (m_{i,j})$ on doit avoir : $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,j} \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} = 1$.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n$.

IV.A – Montrer que les matrices de permutation sont bistochastiques, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$.

IV.B – Les matrices bistochastiques sont-elles toujours inversibles ?

IV.C – Montrer que $\mathcal{B}_n$ est stable pour le produit matriciel.

IV.D – Montrer que $\text{vect}(\mathcal{B}_n) = \Pi_n$.

IV.E – Exemple 1

IV.E.1) Pour tout $a \in [0, 1]$, on note $U_a = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$.

Justifier qu'une telle matrice U_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

IV.E.2) Déterminer $a \in [0, 1]$ tel que U_a soit une matrice orthogonale.

IV.E.3) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{B}_2 = \{U_a : \ a \in [0, 1]\}$.

IV.F – Exemple 2

Pour tout $b \in [0, \frac{1}{2}]$, on note $V_b = \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix}$.

IV.F.1) Justifier qu'une telle matrice est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

IV.F.2) Existe-t-il $b \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que V_b soit une matrice orthogonale ?

IV.G – Exemple 3

IV.G.1) Soit $\Gamma = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(3) \right\}$.

Montrer que Γ est la réunion de deux cercles de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique) dont on précisera les centres et rayons.

IV.G.2) Soient $a, b, c \in [0, 1]$ tels que $a + b + c = 1$ et $W = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Préciser dans quels cas $W \in \mathcal{O}(3)$.

V Points extrémaux de $\mathcal{B}_n$

V.A – Les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_n$ sont-ils convexes : $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{B}_n$, Π_n et $GL_n(\mathbb{R})$?

V.B – Matrices de permutations

V.B.1) Décomposer la matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire, à coefficients positifs et de somme 1, de matrices de permutations. Y a-t-il unicité de cette décomposition ?

V.B.2) Montrer que les matrices de permutation sont des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

V.C – On peut en fait établir la réciproque et le théorème (de Birkhoff) : « Les points extrémaux de $\mathcal{B}_n$ sont exactement les matrices de permutations $\mathcal{P}_n$ ».

On souhaite juste ici établir ce résultat dans le cas simple $n = 2$.

En supposant que $U_a = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}_2$, avec $a \in [0, 1]$ est un point extrémal, justifier que U_a est une matrice de permutation.

• • • FIN • • •

CC BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2016

Matrices positives (im)primitives

Ce problème étudie diverses propriétés des matrices primitives et des matrices irréductibles, définies dans les parties III et V respectivement, et s'appuie sur la notion de chemin dans une matrice positive, que l'on définit dans le préambule.

Généralités

- Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
  Pour tous entiers naturels i et j, avec $i \leqslant j$, la notation $[\![i,j]\!]$ désigne $\{k \in \mathbb{N},\ i \leqslant k \leqslant j\}$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$ le coefficient de A situé en ligne i et colonne j.
  On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  On note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux successifs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.
  Si A est une matrice carrée de terme général $a_{i,j}$, on note $a_{i,j}^{(m)}$ le terme général de la matrice A^m.
- Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Sp}(A)$ (spectre de A) l'ensemble des valeurs propres complexes de A.
  On appelle *rayon spectral* de A la quantité $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
  On dit qu'une valeur propre λ de A est *dominante* si : $\forall \mu \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{\lambda\},\ |\mu| < |\lambda|$.
- On identifie une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé. Cela permet de légitimer les notations $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.
- On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.
- On identifie un élément $x = (x_i)$ de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice-colonne associée, ce qui légitime la notation Ax pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dans ces conditions $x^\top$ désigne la matrice-ligne associée au vecteur x.
- Dans la partie IV, on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, défini par $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^\top y$.

Matrices positives

- On dit que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* et on note $A \geqslant 0$, si : $\forall (i,j),\ a_{i,j} \geqslant 0$.
  On dit que A est *strictement positive* et on note $A > 0$, si : $\forall (i,j),\ a_{i,j} > 0$.
  Ces définitions s'appliquent aux vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ (notations $x \geqslant 0$ ou $x > 0$).
  On prendra bien garde au fait que l'implication $(A \geqslant 0 \text{ et } A \neq 0) \Longrightarrow A > 0$ est fausse !
- Il est clair (et on ne demande pas de le démontrer) que les puissances A^k (avec $k \geqslant 1$) d'une matrice carrée positive (respectivement strictement positive) sont positives (respectivement strictement positives).

Chemins dans une matrice positive

- Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Un *chemin* dans A est une suite $\mathcal{C} = (i_k)_{0 \leqslant k \leqslant m}$ de $[\![1,n]\!]$, avec $m \geqslant 1$, telle que : $\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ a_{i_k, i_{k+1}} > 0$.
  Un tel chemin sera noté : $i_0 \to \cdots \to i_k \to \cdots \to i_m$.
- On dit que $\mathcal{C}$ a pour *longueur* m et qu'il va de i_0 (son *origine*) à i_m (son *extrémité*) en *passant* par les i_k.
- On dit que $\mathcal{C}$ est *un chemin élémentaire* si $i_0, ..., i_m$ sont distincts deux à deux.
- On dit que $\mathcal{C}$ est un *circuit* si $i_m = i_0$ et un *circuit élémentaire* si de plus $i_0, ..., i_{m-1}$ sont distincts. Dans un circuit, la notion d'origine et d'extrémité perd de son intérêt. On pourra donc dire d'un circuit qu'il *passe* par un indice i (sans se préoccuper de la position de i dans ce circuit).

I Si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{m \to +\infty} A^m = 0$

Cette partie est pratiquement indépendante du reste du problème. Elle démontre un résultat qui ne sera utilisé que dans la question IV.B.

On dit qu'une norme $A \mapsto \|A\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *sous-multiplicative* si : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

I.A – Deux exemples de normes sous-multiplicatives

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

I.A.1) Montrer que l'application $A \mapsto N(A)$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.A.2) Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A \mapsto \|A\| = N(Q^{-1}AQ)$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

BY-NC-SA

I.B – Une conséquence de l'inégalité $\rho(A) < 1$

On se donne A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\rho(A) < 1$. On veut montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m = 0$.

I.B.1) Soit P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et soit T triangulaire supérieure, telles que $A = PTP^{-1}$. On se donne $\delta > 0$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(1, \delta, ..., \delta^{n-1})$ et $\widehat{T} = \Delta^{-1}T\Delta$.

Montrer que $\widehat{T}$ est triangulaire supérieure et qu'on peut choisir δ de sorte que $N(\widehat{T}) < 1$.

I.B.2) Avec ce choix de δ, on pose $Q = P\Delta$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $M \mapsto \|M\| = N(Q^{-1}MQ)$.

Montrer que $\|A\| < 1$ et en déduire $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m = 0$.

II Chemins dans les matrices positives

Cette partie aborde les notions de base sur les chemins dans une matrice positive A (et notamment le lien entre l'existence de tels chemins et le caractère strictement positif de coefficients des puissances de A).

Une bonne compréhension des résultats démontrés ici est importante dans la perspective des parties III et IV.

Dans cette partie, A désigne une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.A – Réduction d'un chemin à un chemin élémentaire

Montrer que s'il existe dans A un chemin de i vers j, avec $i \neq j$, alors il existe un chemin *élémentaire* de i vers j et de longueur $\ell \leqslant n-1$. De même, montrer que s'il existe dans A un circuit passant i, alors il existe un circuit *élémentaire* passant par i et de longueur $\ell \leqslant n$.

II.B – Une caractérisation de l'existence d'un chemin de i *à* j

Soit $A \geqslant 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$. Soit $m \geqslant 1$. Montrer l'équivalence des propositions :

- il existe dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j, de longueur m ;
- le coefficient d'indice i, j de A^m (noté $a_{i,j}^{(m)}$) est strictement positif.

On pourra procéder par récurrence sur l'entier $m \geqslant 1$.

II.C – Chemins dans une puissance de A

Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$, et soit ℓ et m dans $\mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence des propositions :

- il existe dans A^m un chemin d'origine i, d'extrémité j, de longueur ℓ ;
- il existe dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j, de longueur $m\ell$.

III Matrices primitives et indice de primitivité

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \geqslant 0$. On dit que A est *primitive* s'il existe $m \geqslant 1$ tel que $A^m > 0$.

Avec cette définition, il est clair que toute matrice carrée strictement positive est primitive.

Dans toute la suite, *matrice primitive* signifie *matrice carrée positive primitive*.

Si A est primitive, on appelle *indice de primitivité* de A le plus petit entier $m \geqslant 1$ tel que $A^m > 0$.

III.A – Chemins élémentaires dans une matrice primitive

Soit A une matrice primitive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que pour tous $i \neq j$ il existe dans A un chemin élémentaire de i à j et de longueur $\ell \leqslant n-1$, et que pour tout i il existe dans A un circuit élémentaire passant par i et de longueur $\ell \leqslant n$.

III.B – Puissances d'une matrice primitive

III.B.1) Donner un exemple simple d'une matrice carrée primitive mais non strictement positive.

III.B.2) Soit $B > 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$. Montrer que $Bx > 0$.

III.B.3) Soit A une matrice primitive et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m > 0$. Montrer que $\forall p \geqslant m$, $A^p > 0$.

On pourra remarquer, en le justifiant, qu'aucune des colonnes $c_1, c_2, ..., c_n$ de A n'est nulle.

III.B.4) Prouver que si A est primitive, alors A^k est primitive pour tout $k \geqslant 1$.

III.B.5) Montrer que le rayon spectral d'une matrice primitive est strictement positif.

III.C – La matrice de Weilandt

On définit la matrice $W_n = (w_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $w_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i < n \text{ et } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = n \text{ et } j \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Par exemple, pour $n = 5$, $W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

BY-NC-SA

Le but de cette question est de prouver que W_n est primitive, d'indice de primitivité n^2-2n+2.

III.C.1) Montrer que le polynôme caractéristique de W_n est X^n-X-1.

En déduire $W_n^{n^2-2n+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}W_n^k$, puis que $W_n^{n^2-2n+2}=I_n+W_n+\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n-2}{k-2}W_n^k$.

III.C.2) Préciser le plus court circuit passant par l'indice 1 dans la matrice W_n.

En déduire que la matrice positive $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive.

III.C.3) Montrer que pour tous i,j de $[\![1,n]\!]$, avec $i\neq j$, il existe dans W_n au moins un chemin d'origine i, d'extrémité j, et de longueur inférieure ou égale à $n-1$.

On pourra traiter successivement les deux cas $1\notin\{i,j\}$ et $1\in\{i,j\}$.

En déduire que la matrice $W_n^{n^2-2n+2}$ est strictement positive et conclure.

III.D – Indice de primitivité maximum

Le but de cette sous-partie est de prouver que si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive, on a toujours $A^{n^2-2n+2}>0$, c'est-à-dire que l'indice de primitivité de A est inférieur ou égal à n^2-2n+2. Ce majorant est en fait un maximum, comme on l'a vu avec la matrice W_n de Weilandt dans la question précédente.

Dans toute cette sous-partie, A est une matrice primitive donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On peut donc appliquer à la matrice A les résultats de la question III.A.

En particulier, on note $\ell\in[\![1,n]\!]$ la plus petite longueur d'un circuit élémentaire de A.

III.D.1) Par l'absurde, on suppose $\ell=n$.

Montrer qu'alors tous les circuits de A sont de longueur multiple de n.

En déduire que les matrices A^{kn+1} (avec $k\in\mathbb{N}$) sont de diagonale nulle et aboutir à une contradiction.

III.D.2) D'après ce qui précède, il existe dans A un circuit élémentaire $\mathcal{C}$ de longueur $\ell\leqslant n-1$.

Pour simplifier la rédaction, et parce que cela n'enlève rien à la généralité du problème, on suppose qu'il s'agit du circuit $1\to2\to...\to\ell-1\to\ell\to1$ (les $n-\ell$ indices restants $\ell+1,\ell+2,...,n$ étant donc situés « en dehors » du circuit $\mathcal{C}$).

Nous allons montrer que $A^{n+\ell(n-2)}$ est strictement positive.

Pour cela, on se donne i et j dans $[\![1,n]\!]$. Tout revient à établir qu'il existe dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j et de longueur $n+\ell(n-2)$.

a) Montrer que dans A, on peut former un chemin d'origine i, de longueur $n-\ell$, et dont l'extrémité est dans $\{1,2,...,\ell\}$ (on notera k cette extrémité).

On pourra traiter le cas $1\leqslant i\leqslant\ell$, puis le cas $\ell+1\leqslant i\leqslant n$.

b) Dire pour quelle raison les ℓ premiers coefficients diagonaux de A^ℓ (et en particulier le k-ième) sont strictement positifs.

Montrer alors qu'il existe un chemin de longueur $n-1$ dans A^ℓ (c'est-à-dire un chemin de longueur $\ell(n-1)$ dans A) d'origine k et d'extrémité j.

c) En déduire finalement $A^{n+\ell(n-2)}>0$, puis $A^{n^2-2n+2}>0$.

IV Étude des puissances d'une matrice primitive

Cette partie utilise uniquement la définition des matrices primitives : elle est pratiquement indépendante de la partie III. Par ailleurs, les résultats de la partie IV ne seront pas réutilisés dans les parties V et VI.

Pour toute matrice primitive A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on admet le résultat suivant :

> *Le rayon spectral $\rho(A)$ de A (dont on sait qu'il est strictement positif) est une valeur propre dominante de A et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle qui possède un vecteur directeur $x>0$.*

Dans toute cette partie, on se donne une matrice primitive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour simplifier les notations, on note r (plutôt que $\rho(A)$) le rayon spectral de A. On rappelle que $r>0$.

Il est clair que $A^\top$ est primitive, et que A et $A^\top$ ont le même rayon spectral r.

On peut donc noter x (respectivement y) un vecteur directeur strictement positif de la droite $D=\mathrm{Ker}(A-rI_n)$ (respectivement de la droite $\Delta=\mathrm{Ker}(A^\top-rI_n)$). On note $H=\mathrm{Im}(A-rI_n)$.

Quitte à multiplier y par un coefficient strictement positif adéquat, on suppose $(y\mid x)=y^\top x=1$.

On note $L=x\,y^\top$ (c'est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

IV.A – Puissances de la matrice $B=A-rL$

IV.A.1) Montrer que H est l'hyperplan orthogonal à la droite Δ (c'est-à-dire $H=\Delta^\perp$).

BY-NC-SA

IV.A.2) Prouver que L est la matrice, dans la base canonique, de la projection de $\mathbb{R}^n$ sur la droite D, parallèlement à l'hyperplan H.

IV.A.3) Vérifier que L est de rang 1, qu'elle est strictement positive, et que $L^\top y = y$.

IV.A.4) Montrer que $AL = LA = rL$. En déduire : $\forall m \in \mathbb{N}^*, (A - rL)^m = A^m - r^m L$.

IV.B – La matrice $B = A - rL$ vérifie $\rho(B) < r$

Dans cette question, on pose $B = A - rL$. On va montrer que $\rho(B) < r$ et en déduire un résultat intéressant sur la suite des puissances successives de A.

Soit λ une valeur propre *non nulle* de B et soit z un vecteur propre associé.

IV.B.1) Montrer que $Lz = 0$, puis $Az = \lambda z$. En déduire $\rho(B) \leqslant r$.

IV.B.2) Par l'absurde, on suppose $\rho(B) = r$. On peut donc choisir λ de telle sorte que $|\lambda| = r$. Montrer qu'alors $\lambda = r$ puis $Lz = z$ et aboutir à une contradiction. Conclure.

IV.B.3) Déduire de ce qui précède (et de la sous-partie IV.A) que $\lim\limits_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^m = L$.

IV.C – Le rayon spectral de A est une valeur propre simple

Dans cette sous-partie, on montre que la valeur propre dominante de A (c'est-à-dire son rayon spectral r) est *simple* (on sait déjà que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle).

Soit μ la multiplicité de r comme valeur propre de A et soit $T = PAP^{-1}$ une réduite triangulaire de A.

En examinant la diagonale de $\left(\frac{1}{r}T\right)^m$ quand $m \to +\infty$, montrer que $\mu = 1$.

V Matrices carrées positives irréductibles

Soit $A = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \geqslant 0$. On dit que A est *irréductible* si, pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, il existe $m \geqslant 0$ (dépendant a priori de i et j) tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$.

Avec cette définition, il est clair que toute matrice primitive est irréductible.

Dans toute la suite, *matrice irréductible* signifie *matrice carrée positive irréductible*.

Dans toute cette partie, A est une matrice positive donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

V.A – Premières propriétés des matrices irréductibles

V.A.1) Exprimer l'irréductibilité de A en termes de chemins dans A.

V.A.2) Montrer que si A est irréductible, alors pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, il existe $m \in [\![0, n-1]\!]$ (dépendant a priori de i et j) tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$.

V.A.3) Donner un exemple simple d'une matrice carrée irréductible mais non primitive.

V.A.4) Montrer que si A n'est *pas* irréductible, alors A^2 n'est *pas* irréductible.

En revanche, donner un exemple simple d'une matrice A irréductible telle que A^2 ne soit pas irréductible.

V.A.5) Montrer que le rayon spectral d'une matrice irréductible est strictement positif.

V.B – Deux caractérisations de l'irréductibilité et une condition nécessaire

V.B.1) Pour la matrice positive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- la matrice A est irréductible ;
- la matrice $B = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ est strictement positive ;
- la matrice $C = (I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.

V.B.2) Soit A irréductible. Montrer qu'aucune ligne (et aucune colonne) de A n'est identiquement nulle.

V.C – Deux conditions suffisantes de primitivité

Dans cette question, A est une matrice *irréductible* donnée.

V.C.1) On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} > 0$. Montrer que $A^{n-1} > 0$ (donc A est primitive).

On raisonnera en termes de chemins dans A.

V.C.2) On suppose que : $\exists i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} > 0$. Montrer que A est primitive.

Pour tous j et k dans $[\![1, n]\!]$, on pourra montrer qu'il existe dans A un chemin de j à k et passant par i, et considérer le maximum m des longueurs des chemins ainsi obtenus. On prouvera que $A^m > 0$.

BY-NC-SA

VI Le coefficient d'imprimitivité

Soit $A = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \geqslant 0$.

On dit que A est *imprimitive* si A est irréductible mais n'est pas primitive.

Pour toute matrice A imprimitive dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on admet le résultat suivant :

> *Les valeurs propres λ de A telles que $|\lambda| = \rho(A)$ sont simples. Ce sont les solutions de l'équation $\lambda^p = \rho(A)^p$ pour un certain entier $p \geqslant 2$. En particulier $\rho(A)$ est valeur propre simple de A. Plus généralement, la totalité du spectre de A est invariante dans la multiplication par $\omega = \exp(2i\pi/p)$. Par ailleurs, et pour la valeur propre $\rho(A)$, la matrice A possède un vecteur propre $x > 0$.*

L'indice $p \geqslant 2$ dont il est question dans le résultat précédent est appelé le *coefficient d'imprimitivité* de A.

Remarque : si on rapproche ce qui précède et le résultat admis au début de la partie IV, on peut fort bien dire qu'une matrice primitive a pour coefficient d'imprimitivité $p = 1$.

VI.A – Diagonales des puissances d'une matrice imprimitive

Soit A une matrice imprimitive de coefficient d'imprimitivité $p \geqslant 2$.

Pour tout entier m non multiple de p, montrer que la diagonale de A^m est identiquement nulle.

> On pourra s'intéresser à la trace de A^m.

En déduire que le résultat de la question IV.B.3 ne tient plus si A est imprimitive.

VI.B – Une matrice de Weilandt « modifiée »

On définit la matrice $Z_n = (z_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i < n \text{ et } j = i+1 \\ 1 & \text{si } (i,j) \in \{(n-1,1),(n,2)\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Par exemple, pour $n = 5$: $Z_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le but de cette question est de prouver que Z_n est imprimitive.

VI.B.1) Montrer que la matrice Z_n est irréductible.

VI.B.2) Montrer que le polynôme caractéristique de Z_n est $X(X^{n-1} - 2)$.

En déduire que Z_n est imprimitive et préciser son coefficient d'imprimitivité.

VI.B.3) Montrer que $Z_n^{n^2-2n+2} = 2^{n-1} Z_n$ et retrouver le fait que Z_n n'est pas primitive.

VI.C – Coefficient d'imprimitivité et polynôme caractéristique

Soit $A \geqslant 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice irréductible. On note r son rayon spectral.

Soit $p \geqslant 1$ le coefficient d'imprimitivité de A (rappel : par convention, $p = 1$ si A est primitive).

Soit $\chi_A(X) = X^n + c_{k_1} X^{n-k_1} + c_{k_1} X^{n-k_2} + \cdots + c_{k_s} X^{n-k_s}$ son polynôme caractéristique, écrit suivant les puissances décroissantes et en ne laissant apparaître que les coefficients c_k non nuls.

On va montrer la propriété suivante : *l'entier p est le pgcd des entiers $k_1, k_2, ..., k_s$*.

VI.C.1) On rappelle que le spectre de A est invariant par le produit $z \mapsto \omega z$, où $\omega = \exp(2i\pi/p)$.

En déduire que, pour tout $k \in \{k_1, k_2, ..., k_s\}$, l'entier k est divisible par p.

> Penser aux fonctions symétriques élémentaires des λ_i.

VI.C.2) Réciproquement, on suppose par l'absurde que les k_j sont tous divisibles par qp, avec $q \geqslant 2$.

On pose $\beta = \mathrm{e}^{2i\pi/(qp)}$ (donc $\beta^q = \omega$). Montrer que βr est valeur propre de A et conclure.

VI.D – Coefficient d'imprimitivité et longueur des circuits

Dans cette question, on va établir un théorème de Romanovsky en 1936, établissant que le coefficient d'imprimitivité p d'une matrice irréductible (éventuellement $p = 1$ dans le cas d'une matrice primitive) est le pgcd des longueurs des circuits passant un indice donné (ce pgcd ne dépendant en fait pas de l'indice en question).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice irréductible. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note $L_i = \{m \in \mathbb{N}^*, a_{i,i}^{(m)} > 0\}$ l'ensemble (non vide) des longueurs des circuits de A qui passent par i, et on note d_i le pgcd des éléments de L_i.

VI.D.1) Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$. On sait qu'il existe r et s dans $\mathbb{N}$ tels que $a_{i,j}^{(r)} > 0$ et $a_{j,i}^{(s)} > 0$.

Pour tout k dans $\{0\} \cup L_j$, montrer que d_i divise $r + k + s$. En déduire que d_i divise d_j.

Par symétrie, il en résulte évidemment que tous les d_i sont égaux. On note d leur valeur commune.

VI.D.2) Montrer que si $p = 1$ (c'est-à-dire si A est primitive), alors $d = 1$ (utiliser la question III.B.3).

BY-NC-SA

VI.D.3) Dans la suite de cette question, on suppose $p \geqslant 2$.

Montrer que p divise d (utiliser la question VI.A).

VI.D.4) On va montrer que d divise p. Il en résultera bien sûr l'égalité $d = p$.

On rappelle que la diagonale de A est nulle (c'est une conséquence de la question VI.A).

Soit $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A.

On sait que $\chi_A(x) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)}$, où la somme est étendue aux permutations σ de $[\![1, n]\!]$.

On fixe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$, on pose $\Psi(\sigma) = \prod_{j=1}^{n} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)}$ et on suppose $\Psi(\sigma) \neq 0$.

On note H l'ensemble des éléments j de $[\![1, n]\!]$ tels que $\sigma(j) \neq j$, et $\text{card}(H) = h$, avec $0 \leqslant h \leqslant n$.

a) Montrer que $\Psi(\sigma) = (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)}$.

b) La restriction à H de la permutation σ se décompose en produits de cycles à supports disjoints (et de longueur $\geqslant 2$ puisque par hypothèse aucun des éléments de H n'est invariant par σ).

Soit $s = (j_1, j_2, ..., j_m)$, avec $m \geqslant 2$, l'un quelconque des cycles entrant dans cette décomposition.

Montrer que $j_1 \to j_2 \cdots \to j_m \to j_1$ est un circuit dans la matrice A.

En déduire que m, puis h, sont des multiples de d.

c) Montrer finalement que $\chi_A(x)$ s'écrit : $\chi_A(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-d} + \alpha_2 x^{n-2d} + \cdots + \alpha_k x^{n-kd} + \cdots$

En déduire que d est un diviseur de p (utiliser le résultat de la question VI.C). Conclure.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2016

Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, où les a_k sont des réels et les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{1,-1\}$

La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes.

À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et vérifiant

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(X_k=1)=P(X_k=-1)=\frac{1}{2}$$

I Suites et intégrales

I.A – Étude d'une intégrale à paramètre

Pour $x\in\mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

I.A.1) Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

I.A.2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

I.A.3) Exprimer f'' sur $]0,+\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

I.A.4) Montrer

$$\begin{cases}\forall x>0,\quad f(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\\ f(0)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

I.A.5) Montrer

$$\forall s\in\mathbb{R},\quad |s|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

I.B – Étude d'une suite d'intégrales

Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_0^{\infty}\frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

I.B.1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.B.2) Montrer que $u_1=u_2=\frac{\pi}{2}$.

I.C – Calcul d'un équivalent de u_n

I.C.1) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\,v_n\qquad\text{avec}\qquad v_n=\int_0^{\infty}\frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

BY-NC-SA

I.C.2) Montrer que

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1], \quad \left|1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| \leqslant u$$

I.C.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant

$$l = \int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

I.C.4) On admet la relation $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Conclure que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

II Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

II.A – Étude de $E(|S_n|)$

II.A.1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

II.A.2) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.

Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

II.A.3) On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$ pour tout réel t.

Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t.

II.A.4) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi}u_n$.

On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

II.A.5) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n+2}$.

II.B – Étude de $\dfrac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Z}_n = \left\{\omega \in \Omega,\ \exists k \geqslant n,\ U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

II.B.1) Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.B.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}$.

II.B.3) Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

II.B.4) En considérant $\mathcal{Z} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$, montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

BY-NC-SA

III D'autres sommes aléatoires

On conserve la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la partie précédente et on considère de plus une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs ou nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

III.A – Étude de $E(|T_n|)$

III.A.1) Montrer que la suite $\left(E(|T_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

III.A.2) Montrer que si la série $\sum a_n^2$ est convergente, alors la suite $\left(E(|T_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

III.A.3) On suppose $a_1 \geqslant a_2 + \cdots + a_n$. Montrer $E(|T_n|) = E(|T_1|) = a_1$.

III.B – Application à une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$J_n = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

III.B.1) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bien définie et qu'elle est croissante et convergente.

On posera $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$ et on exprimera l'espérance de $|T_n|$ avec la méthode de la question II.A.4.

III.B.2) Montrer que $J_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 7$ et que $(J_n)_{n\geqslant 7}$ est strictement croissante.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrices autorisées

2016

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n ;
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$;
- $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0,1]$;
- $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne ;
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M, mais la notation M^T est également utilisable.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3 \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \exp(-1) & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$$

Ce problème aborde l'étude de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$ à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres. Les deux premières parties étudient quelques propriétés algébriques et topologiques des ensembles $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$ définis ci-dessus. La partie III étudie le cas particulier des matrices de permutation. La partie IV étudie deux modalités de génération aléatoire de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.

I Généralités

I.A – Propriétés élémentaires

I.A.1) Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

I.A.2) Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$, $\det(M) \leqslant n!$ et qu'il n'y a pas égalité.

I.A.3) Démontrer que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe et compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A.4) Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Démontrer que $|\lambda| \leqslant n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

I.B – Étude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

I.B.1) Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$. Préciser (en justifiant) ceux qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Démontrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2$. Est-ce que, pour $n \geqslant 2$, $\mathcal{X}'_n$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

II Deux problèmes d'optimisation

II.A – Étude de la distance à $\mathcal{Y}_n$

Pour tout $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on note

$$(M|N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$$

II.A.1) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter $(M|N)$ en fonction des coefficients de M et N.

On notera $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

II.A.2) On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{Y}_n$ telle que :

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n \quad \|A-M\| \leqslant \|A-N\|$$

II.A.3) Justifier l'unicité de la matrice M ci-dessus et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de A.

II.B – Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$

II.B.1) Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$ (noté x_n) et un maximum sur $\mathcal{Y}_n$ (noté y_n).

BY-NC-SA

II.B.2) Démontrer que la suite $(y_k)_{k\geqslant 2}$ est croissante.

II.B.3) Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$.

Calculer $\det(M)$ et en déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = +\infty$.

II.B.4) Soient $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0,1[$.

Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0, soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leqslant \det(N')$.

En déduire que $x_n = y_n$.

III Matrices de permutations

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $(e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ dans lui-même (appelées *permutations*).

Pour tout $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice de $\mathcal{P}_n$ dont le coefficient ligne i, colonne j vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. On dit que P_σ est la *matrice de permutation* associée à σ.

On note u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ.

III.A – Description de $\mathcal{P}_n$

III.A.1) Donner deux définitions d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et démontrer leur équivalence.

III.A.2) Démontrer que si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors son déterminant vaut 1 ou -1. Que penser de la réciproque ?

III.A.3) Démontrer que $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et déterminer son cardinal.

III.B – Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

III.B.1) Soient σ et σ' deux éléments de S_n.

Démontrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.

Justifier que l'application $\begin{cases} \mathbb{Z} \to S_n \\ k \mapsto \sigma^k \end{cases}$ n'est pas injective.

En déduire qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $\sigma^N = \mathrm{Id}_{\{1,...,n\}}$, où $\mathrm{Id}_{\{1,...,n\}}$ désigne l'application identité sur l'ensemble $\{1, ..., n\}$.

III.B.2) Démontrer que tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

III.B.3) Déterminer les vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

III.B.4) On se propose de démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma \in S_n$ sont $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ et l'hyperplan H orthogonal à D.

a) Vérifier que ces quatre sous-espaces vectoriels sont stables par tous les u_σ.

b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ. Démontrer qu'il existe un couple $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ avec $i \neq j$ tel que $e_i - e_j \in V$, puis que les $n-1$ vecteurs $e_k - e_j$ ($k \in \{1, ..., n\}, k \neq j$) appartiennent à V.

c) Conclure.

III.C – Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$

On se donne une matrice M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers naturels et telle que l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini.

Démontrer que M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et en déduire que M est une matrice de permutation. Que dire de la réciproque ?

IV Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

IV.A – Génération par une colonne aléatoire

Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

IV.A.1) Calculer la probabilité que $X_1, ..., X_n$ soient égales.

IV.A.2) Quelle est la loi de $S = X_1 + ... + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.

IV.A.3) Soient i et j dans $\{1, ..., n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$

CC BY-NC-SA

IV.A.4) Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)\,{}^t(U(\omega))$. L'application $M : \begin{cases} \Omega \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \omega \mapsto M(\omega) \end{cases}$ est ainsi une variable aléatoire.

a) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

b) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\mathrm{tr}(M(\omega)) \in \{0, ..., n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leqslant 1$.

c) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega) \in \{0, 1\}$.

IV.A.5) Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.

IV.A.6) Exprimer M^k en fonction de S et M.

Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente ?

Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

IV.A.7) Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

IV.B – Génération par remplissage aléatoire

Soit $p \in]0, 1[$. On part de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée M_0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice M_{k+1} à partir de la matrice M_k de la manière suivante

– on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité p ;
– chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les M_k sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_n$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k \geqslant 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la k-ième vague est noté N_k. Dans l'exemple ci-dessus : $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $N_4 = 1$, $N_5 = 0$.

On s'intéresse au plus petit indice k pour lequel la matrice M_k ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est *totalement remplie*. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

On note $q = 1 - p$ et $m = n^2$.

IV.B.1) Dans toute cette question on utilise le langage Python. `M` désigne une matrice carrée d'ordre n. Ses lignes et ses colonnes sont numérotées de 0 à $n - 1$. L'expression `M[i,j]` permet d'accéder à l'élément situé à l'intersection de la ligne `i` et de la colonne `j` et `len(M)` donne l'ordre de la matrice `M`.

a) Écrire une fonction `Somme(M)` qui renvoie la somme des coefficients de la matrice `M`.

b) Écrire une fonction `Bernoulli(p)` qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1-p$. On pourra utiliser l'expression `random()` qui renvoie un réel de l'intervalle $[0, 1[$ selon la loi uniforme.

c) À l'aide de la fonction `Bernoulli(p)`, écrire une fonction `Modifie(M,p)` qui modifie aléatoirement la matrice `M` suivant le principe décrit au IV.B ci-dessus.

d) Écrire une fonction `Simulation(n,p)` qui renvoie le plus petit entier k tel que M_k est totalement remplie à partir d'un remplissage aléatoire de la matrice nulle d'ordre `n` (qui peut être obtenue par `zeros((n,n))`). Il n'est pas demandé de mémoriser les M_k.

IV.B.2) Donner la loi de N_1, puis la loi conditionnelle de N_2 sachant $(N_1 = i)$ pour i dans un ensemble à préciser. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

IV.B.3) Soient i et j dans $\{1, ..., n\}$. Le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que le coefficient ligne i, colonne j de M_k vaut 1 est noté $T_{i,j}$ (dans l'exemple ci-dessus : $T_{1,1} = 1$ et $T_{1,2} = 3$). Donner la loi de $T_{i,j}$.

IV.B.4) Pour un entier $k \geqslant 1$, donner la valeur de $P(T_{i,j} \geqslant k)$

IV.B.5) Soient $r \geqslant 1$ un entier et $S_r = N_1 + \cdots + N_r$. Que représente S_r ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).

IV.B.6) On note N le plus petit indice k pour lequel la matrice M_k est totalement remplie.

a) Proposer une démarche pour approcher l'espérance de N à l'aide d'une simulation informatique utilisant les fonctions précédentes.

b) Donner une expression de la valeur exacte de cette espérance faisant intervenir q et m.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2016

4 heures Calculatrices autorisées

Ce problème aborde l'étude de deux transformations intégrales utilisées pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier et celle de Laplace. Chacune d'elles permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie I étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie II aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie III traite le cas particulier d'un signal dont le spectre des fréquences est limité à $[-1/2, 1/2]$. La partie IV étudie le cas particulier d'un signal périodique. Le résultat auquel elle aboutit est utilisé dans la partie V pour démontrer le théorème de l'échantillonnage de Shannon. La partie VI utilise un résultat classique de probabilité pour démontrer l'injectivité de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles hors d'un segment.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

I Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{\text{cpm}}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} \, \mathrm{d}t$$

I.A – On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

I.B – On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \qquad \text{et} \qquad \psi(0) = 1$$

I.B.1) Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} |\psi(x)| \, \mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi^2}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

I.C – Soit $f \in E_{\text{cpm}}$. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.D – Soit $f \in \mathcal{S}$.

I.D.1) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathcal{F}(f)\right)^{(n)}(\xi) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2\pi i t \xi} \, \mathrm{d}t$$

I.E – On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp\left(-\pi x^2\right)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

I.E.1) Justifier que θ appartient à $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad y'(\xi) = -2\pi \xi \, y(\xi)$$

I.E.2) Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

BY-NC-SA

II Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. On suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\,\mathrm{d}\xi \qquad\qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathcal{F}(\theta)(t)\,\mathrm{d}t$$

II.A – Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

II.B – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

II.C – Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = J_n$.

On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)e^{-2\pi\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)e^{-2\pi\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi$$

II.D – Démontrer que $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

En déduire, en utilisant la fonction $h : t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{II.1}$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

II.E – ***Une application***

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi\mathrm{i}x\xi}}{1+(2\pi\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

III Transformée de Fourier à support compact

Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. D'après la relation II.1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

III.A – Démontrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

III.B – Prouver que

$$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}\int_{-1/2}^{1/2} (2\pi\mathrm{i}\xi)^n \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2\pi\mathrm{i}x_0\xi}\,\mathrm{d}\xi = f(x)$$

III.C – On suppose que f est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$. Montrer que $f = 0$.

IV Cas des fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n, on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi\mathrm{i}kx}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

– la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\},\ g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{\sin(\pi x)} \qquad g(0) = \frac{f'(0)}{\pi} \qquad g(1) = g(-1) = -g(0)$$

– la suite de complexes $\left(c_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{-2\pi\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x$$

BY-NC-SA

IV.A –

IV.A.1) Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et continue sur $]-1,1[$.

IV.A.2) Calculer la limite de g' en 0. En déduire que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

IV.B – Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,\mathrm{d}x$.

IV.C – Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\},\quad S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

IV.D – Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x$$

IV.E – À l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{C}{2n+1}$$

IV.F – Soit $t \in [-1/2,1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2,1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad G_t(x) = f'(x+t)\sin(\pi x) - \big(f(x+t)-f(t)\big)\pi\cos(\pi x)$$

Établir l'existence d'un réel D, indépendant de x et de t, tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad |G_t(x)| \leqslant Dx^2$$

IV.G – Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad \left|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2\pi\mathrm{i}kt}\right| \leqslant \frac{E}{2n+1} \tag{IV.1}$$

On pourra introduire la fonction $h_t : x \mapsto f(x+t)$.

V Formule d'échantillonnage de Shannon

Soit $f \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2,1/2]$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{Z},\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \psi_k(x) = \psi(x+k) \tag{V.1}$$

où ψ est définie à la question I.B.

V.A – Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\quad (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

V.B – Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathcal{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2,1/2]$. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

V.C – À l'aide de l'inégalité IV.1, prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2\pi\mathrm{i}kx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(f)$ sur $[-1/2,1/2]$.

V.D – Démontrer que la suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} d_k\psi_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On notera symboliquement $f = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k\psi_k$.

V.E – Établir que $\forall j \in \mathbb{Z},\ f(-j) = d_j$.

L'égalité $f = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k)\psi_k$ traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $\big(f(k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$.

BY-NC-SA

VI Transformation de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. On définit la fonction $\mathcal{L}(f)$ (*transformée de Laplace de* f) sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

On admettra que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\mathcal{L}(f)\right)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} f(t)t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Rappelons que, pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

VI.A – On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

VI.A.1) Par récurrence, démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.
On admettra que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les variables S_n et X_{n+1} sont mutuellement indépendantes.

VI.A.2) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|S_n - n\lambda| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

VI.A.3) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier les deux inclusions suivantes

$$(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geqslant n\varepsilon)$$
$$(S_n \leqslant n(\lambda - \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geqslant n\varepsilon)$$

VI.A.4) Dans toutes les questions qui suivent, on suppose $x \geqslant 0$.
Déduire du VI.A.3 que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant nx) = 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \lambda \\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant nx) = 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

VI.B – À l'aide de la question VI.A, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant \lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

VI.C – Dans la suite de cette partie, on admettra que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant \lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{si } x = \lambda$$

VI.C.1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant \lfloor nx\rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \left(\mathcal{L}(f)\right)^{(k)}(n) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

VI.C.2) En déduire que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est injective sur l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles en dehors d'un segment.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2016

4 heures Calculatrices autorisées

On utilise la fonction Gamma d'Euler Γ (partie I) pour calculer, en partie II, une intégrale dépendant d'un paramètre. En partie III, en liaison avec des variables aléatoires suivant une loi de Poisson, on détermine l'équivalent, quand $n \to +\infty$, de sommes dépendant d'un paramètre entier n. Les trois parties sont largement indépendantes.

I Autour de la fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

I.A –

I.A.1) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ ?

I.A.2) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

En déduire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\Gamma(x+n)$ en fonction de x, n et $\Gamma(x)$, ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

I.A.3) Montrer l'existence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t$ et les exprimer à l'aide de Γ.

I.B –

I.B.1) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a,b]$,

$$t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$$

I.B.2) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de Γ au point x, sous forme d'une intégrale.

I.C –

I.C.1) Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.

I.C.2) En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$. Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ.

II Une transformée de Fourier

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{-3/4}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

II.A – Montrer que la fonction $F : \begin{array}{c}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto F(x)\end{array}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de F en x. Préciser $F(0)$.

II.B –

II.B.1) Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, la fonction F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \qquad (S)$$

où c_n est la valeur de Gamma en un point à préciser. On exprimera c_n en fonction de n et de c_0.

BY-NC-SA

Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de (S) ?

II.B.2) On admet que $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{(x-1/2)}\, \mathrm{e}^{-x}$.

Étudier si la série du second membre de (S) converge absolument lorsque $|x| = R$.

II.B.3) Soit $R(x)$ la partie réelle et $I(x)$ la partie imaginaire de $F(x)$.

Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de $R(x)$ à l'ordre 3 et de $I(x)$ à l'ordre 4.

II.C –

II.C.1) Prouver que F vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + A\,F = 0$, où A est une fonction à préciser.

II.C.2) En déduire une expression de $F(x)$.

On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{8}\ln(1+x^2) + \dfrac{\mathrm{i}}{4}\arctan x$.

III Autour de la loi de Poisson

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X \in A)$ désigne la probabilité de l'événement $X^{-1}(A)$.

On note $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)t^k$ (série génératrice de la variable aléatoire X).

III.A – Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

III.A.1) Déterminer $G_X(t)$.

III.A.2) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type de X.

III.A.3) Soit μ un réel strictement positif. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ et telle que X et Y soient indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

III.B – Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle que, quels que soient les entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ et les intervalles I_1, I_2,...I_k de $\mathbb{R}$

$$\mathrm{P}(X_{i_1} \in I_1,\, X_{i_2} \in I_2,\, ...,\, X_{i_k} \in I_k) = \prod_{j=1}^{j=k} \mathrm{P}(X_{i_j} \in I_j)$$

III.B.1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer la loi de $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

III.B.2) Déterminer l'espérance et l'écart type des variables aléatoires S_n et $T_n = \dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

III.B.3) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c(\varepsilon)$ tel que, si $c \geqslant c(\varepsilon)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \varepsilon$.

III.C – Dans cette sous-partie, on fixe deux réels a et b tels que $a < b$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $a + \sqrt{n\lambda} > 0$, on pose

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} |\ n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant k \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda}\}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $x_{k,n} = \dfrac{k - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

On considère enfin la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III.C.1) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que f soit une fonction M-lipschitzienne.

III.C.2)

a) Montrer que, si x, $h \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, alors $\left|hf(x) - \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\frac{h^2}{2}$.

BY-NC-SA

b) En déduire, lorsque I_n est non vide, une majoration de

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t\Big|$$

où p est le plus petit élément de I_n et q est le plus grand.

c) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

III.C.3) Pour tout $k \in I_n$, on note $y_{k,n} = \left(1 - \dfrac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}\right)^k \exp(x_{k,n}\sqrt{n\lambda})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$ et tout $k \in I_n$, les inégalités suivantes soient satisfaites :

a) $\dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n} \leqslant \mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!} \leqslant \dfrac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n}$;

On utilisera la formule de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

b) $(1-\varepsilon)f(x_{k,n}) \leqslant y_{k,n} \leqslant (1+\varepsilon)f(x_{k,n})$.

III.C.4) Exprimer, sous forme d'intégrale, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k\in I_n} \dfrac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

III.C.5) Comparer $\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b)$ et $\sum\limits_{k\in I_n} \mathrm{P}(S_n = k)$, où S_n et T_n sont définies en III.B.

III.C.6) Déterminer les limites, quand $n \to +\infty$, de

$$\mathrm{P}(T_n \geqslant a), \qquad \mathrm{P}(T_n = a), \qquad \mathrm{P}(T_n > a) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(T_n \leqslant b)$$

III.D –

III.D.1) Déduire de la question III.C.6) la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

III.D.2) Déterminer un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{\lfloor n\lambda\rfloor}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

où $\lfloor t\rfloor$ désigne la partie entière du réel t.

On interprétera $\mathrm{e}^{-n\lambda}A_n$ comme la probabilité d'un événement lié à S_n et donc à T_n.

III.D.3) Pour $\lambda \neq 1$, on note $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(n\lambda)^k}{k!}$ et $D_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(n\lambda)^k}{k!}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda}C_n$ si $\lambda < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda}D_n$ si $\lambda > 1$.

III.E – On suppose $\lambda < 1$.

III.E.1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((n\lambda)^{-n}\displaystyle\int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)$.

III.E.2) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, en déduire un équivalent de D_n quand $n \to +\infty$.

III.F – Si $\lambda > 1$, déterminer un équivalent de C_n lorsque $n \to +\infty$.

Considérer l'intégrale $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} (r-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et choisir convenablement le réel r.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

PC

2016

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ l'application $f^k : E \to E$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A – L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$$

I.A.1) Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

I.A.2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.

I.A.3) Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.

I.A.4) Préciser l'ensemble des valeurs propres de τ. L'application τ est-elle diagonalisable ?

I.A.5) L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question I.A.2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

I.A.6) Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.

I.A.7) On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{I.1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

I.A.8) En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{I.2}$$

I.A.9) On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (I.1) ? Vérifier alors la formule (I.2).

BY-NC-SA

I.B – L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

I.B.1) Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

I.B.2) En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et l'image $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.

I.B.3) Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{I.3}$$

I.B.4) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

I.B.5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{I.4}$$

I.B.6) Dans cette question, on se propose de montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

a) Montrer que u et δ^2 commutent.

b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.

c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Conclure.

I.B.7) Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.

a) Pour un polynôme non nul P de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), ..., \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

II Applications en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

II.A – Quelques cas particuliers

II.A.1) Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$?

II.A.2) Déterminer $S(n, n)$.

II.A.3) Déterminer $S(n+1, n)$.

II.B – Recherche d'une expression générale

II.B.1) Combien y a-t-il d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

II.B.2) Pour $p \geqslant n$, établir la formule

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p, k) \tag{II.1}$$

où $S(p, 0) = 0$ par convention.

II.B.3) En déduire une expression de $S(p, n)$ pour $p \geqslant n$.

II.B.4) En relisant la question I.B.5, commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

II.C – Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$$

BY-NC-SA

III Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \quad \text{pour } k \in [\![1,n]\!] \end{cases}$$

III.A – Généralités

III.A.1) Montrer que la famille $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.A.2) Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.

III.A.3) La matrice M définie à la question I.A.3 et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

III.A.4) Montrer que, pour k, $l \in [\![0,n]\!]$,

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

III.A.5) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} (\delta^k(P))(0) H_k$$

III.B – Étude d'un exemple

III.B.1) Donner les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.

III.B.2) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$

III.B.3) Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

III.C – Polynômes à valeurs entières

III.C.1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

III.C.2) En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

III.C.3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

III.C.4) Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont entières.

III.C.5) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application

$$\delta(f) : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x+1) - f(x) \end{cases}$$

IV.A –

IV.A.1) Montrer que $\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comparer $(\delta(f))'$ et $\delta(f')$.

BY-NC-SA

IV.A.2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, exprimer $(\delta^n(f))(x)$ à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ et des $f(x+j)$ (où l'indice j appartient à $[\![0, n]\!]$).

IV.A.3) Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, il existe un $y_1 \in]0, 1[$ tel que

$$(\delta(f))(x) = f'(x + y_1)$$

IV.A.4) En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in]0, n[$ tel que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n). \tag{IV.1}$$

On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser les trois questions précédentes.

IV.B – On considère dans toute la suite de cette partie un réel α. On suppose que pour tout nombre p premier, p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

IV.B.1) Montrer que pour tout entier k strictement positif, k^α appartient à $\mathbb{N}^*$.

IV.B.2) Montrer que α est positif ou nul.

IV.B.3) On considère l'application f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que α est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

IV.C – On applique la relation (IV.1) à la fonction f_α et à l'entier $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

IV.C.1) Montrer que l'expression

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$$

est un entier relatif.

IV.C.2) Les notations sont celles de la question IV.A.4. Quelle est la limite de l'expression $f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$ quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$?

IV.C.3) Conclure.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI 2016

4 heures Calculatrices autorisées

Nombres de Stirling et problème du collectionneur

Ce problème est consacré à l'étude de nombre introduits au XVIII^{e} siècle par James Stirling et intervenant en particulier en théorie des probabilités et dans l'étude de la fiabilité de certains circuits électroniques.

Les parties du problème sont très largement indépendantes. Tout candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie.

On rappelle les conventions $0! = 1$ et $\forall a \in \mathbb{R}, a^0 = 1$ et on note
- $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est continue sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

I Généralités sur les nombres de Stirling

Si E est un ensemble et k un entier naturel non nul, une partition de E est un ensemble $\{A_1, ..., A_k\}$ de parties de E non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E :

$$\forall i \in \{1, ..., k\},\ A_i \neq \emptyset \qquad \forall (i,j) \in \{1, ..., k\}^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = E$$

Par exemple, $\{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$ est une partition de $E = \{1,2,3,4,5\}$ en trois parties. On notera en particulier que l'ordre dans lequel interviennent les parties $A_1, ..., A_k$ n'a pas d'incidence sur la définition de la partition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, ..., n\}$, on note $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. On pose également $S_{0,0} = 1$ et $S_{n,0} = 0$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

Les nombres $S_{n,k}$ sont appelés nombres de Stirling de deuxième espèce.

I.A – Premières propriétés des nombres de Stirling

I.A.1)

a) Déterminer la valeur de $S_{3,2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que valent $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$?

I.A.2) Soit n un entier, $n \geqslant 2$, k un entier compris entre 1 et $n-1$ et $E = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble à n éléments. On souhaite établir une relation entre $S_{n,k}$, $S_{n-1,k-1}$ et $S_{n-1,k}$.

a) Dans cette question, on étudie l'exemple $E = \{1,2,3,4\}$ $(n = 4)$ et $k = 2$.

i. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$.

ii. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une contient 4 tout en étant différente du singleton $\{4\}$.

iii. Vérifier, pour l'exemple traité, la relation $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.

b) On revient au cas général présenté en début de question I.A.2.

i. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une est $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.

ii. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une contient x_n tout en étant différente du singleton $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.

iii. En déduire que $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.

I.A.3) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_{n,n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On pourra par exemple procéder par récurrence.

I.A.4) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $S_{n,2} + 1 = 2(S_{n-1,2} + 1)$ et en déduire la valeur de $S_{n,2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

I.A.5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et deux ensembles $E = \{x_1, ..., x_n\}$ et $F = \{y_1, ..., y_k\}$. On note $\sigma_{n,k}$ le nombre d'applications surjectives de E dans F.

a) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n < k$?

b) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n = k$?

c) Expliciter les applications surjectives de E dans F lorsque $n = 3$ et $k = 2$, et préciser la valeur de $\sigma_{3,2}$.

BY-NC-SA

d) Dans cette question, on souhaite obtenir une relation entre $\sigma_{n,k}$ et $S_{n,k}$.

Si f est une application de E dans F et j un entier compris entre 1 et k, on note $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ l'ensemble des antécédents par f de y_j.

i. Étant donnée une application f surjective de E dans F, montrer que $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_k\}$ est une partition de E en k parties. On note $\Pi(f)$ cette partition.

ii. Étant donnée $\mathcal{A}' = \{A_1', ..., A_k'\}$ une partition de E en k parties, combien y a-t-il d'applications f surjectives de E dans F telles que $\Pi(f) = \mathcal{A}'$?

iii. En déduire la relation $\sigma_{n,k} = k!\, S_{n,k}$.

I.A.6) Montrer, par exemple par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{0, ..., n\}$, $S_{n,k} \leqslant (2k)^n$.

I.B – Utilisation des nombres de Stirling en algèbre linéaire

Soit $N \in \mathbb{N}^*$; on note $\mathbb{R}_N[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$. On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_k = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X - j) \quad \text{pour tout } k \in \{1, ..., N\} \end{cases}$$

I.B.1) Montrer que la famille $\{P_0, ..., P_N\}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, que l'on notera $\mathcal{B}_0$.

I.B.2)

a) Pour tout entier $k \in \{0, ..., N-1\}$, démontrer l'égalité $XP_k = P_{k+1} + kP_k$.

b) En déduire par récurrence que, pour tout entier $n \in \{0, ..., N\}$, $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k$. On pourra utiliser la relation démontrée en I.A.2.

I.B.3) Donner la matrice M de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$, en précisant en particulier ses coefficients diagonaux.

I.B.4)

a) Quel est le polynôme caractéristique de la matrice M ?

b) Montrer que la matrice M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ lorsque $N \geqslant 2$. Qu'en est-il si $N = 1$?

I.C – Un lien entre nombres de Stirling et loi de Poisson

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour les réels x pour lesquels cette somme a un sens, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^n}{i!}x^i$.

I.C.1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^n}{i!}x^i$ et en déduire le domaine de définition de la fonction f_n.

I.C.2) Déterminer les valeurs de $f_0(x)$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

I.C.3) Soit $k \in \{0, ..., n\}$ et $i \in \mathbb{N}$. Préciser la valeur de $P_k(i)$ en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k-1$ (lorsque k est non nul) et $i \geqslant k$.

I.C.4) À l'aide de la relation montrée en I.B.2, vérifier que pour tout couple (n, i) d'entiers naturels

$$i^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k(i)$$

I.C.5) Montrer que $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{x^i}{(i-k)!}$ et en déduire l'égalité $f_n(x) = e^x \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k}x^k$.

I.C.6) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y^n admet une espérance $E(Y^n)$ et donner une expression de $E(Y^n)$ en fonction des nombres de Stirling. Confronter les valeurs trouvées pour $E(Y)$ et $E(Y^2)$ avec les résultats du cours sur l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

I.D – Comportement asymptotique des nombres de Stirling

I.D.1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère l'équation différentielle

$$y'(x) = (k+1)y(x) + \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k \tag{I.1}$$

d'inconnue $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

BY-NC-SA

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(k+1)!}(e^x-1)^{k+1}$ est solution de (I.1).

b) Résoudre l'équation différentielle (I.1).

I.D.2) On se propose de démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{S_{n,k}}{n!}x^n = \frac{1}{k!}(e^x-1)^k \tag{I.2}$$

a) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. En utilisant par exemple l'inégalité établie en I.A.6, montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{S_{n,k}}{n!}x^n$ est infini.

b) Montrer que la proposition (I.2) est vraie pour $k=0$.

c) Soit k un entier naturel fixé tel que la proposition (I.2) soit vraie. Montrer alors, en utilisant le résultat de la question I.A.2, que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{S_{n,k+1}}{n!}x^n$ est solution de l'équation différentielle (I.1).

d) Conclure.

I.D.3) En déduire, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,...,n\}$, l'égalité $S_{n,k} = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$. On pourra commencer par développer $(e^x-1)^k$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

I.D.4) On fixe un entier $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n,k}}{k^n}$ et en déduire un équivalent de $S_{n,k}$ lorsque $n \to +\infty$.

II Nombres de Stirling et problème du collectionneur

Le problème du collectionneur (« *coupon collector's problem* ») est un problème de probabilités classique. Un fabricant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des images. Chaque tablette vendue contient une image de la collection, que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Chaque image peut être collée dans un album contenant k emplacements (k est un entier supérieur ou égal à deux) correspondant au nombre d'images distinctes de la collection. La probabilité pour un acheteur de découvrir dans une tablette une image donnée est égale à $1/k$.

On se propose de déterminer le nombre moyen d'achats nécessaires pour constituer la collection complète des k images et d'étudier comment les nombres de Stirling interviennent dans le problème du collectionneur.

Pour i entier compris entre 1 et k, on note X_i le nombre minimum d'achats nécessaires pour obtenir i vignettes différentes et Z_i le nombre minimum d'achats nécessaires pour qu'un collectionneur possédant déjà i vignettes distinctes puisse enrichir sa collection d'une vignette autre que celles qu'il possède déjà.

II.A – Équivalent de $E(X_k)$ lorsque $k \to +\infty$

II.A.1) Préciser la loi de la variable aléatoire X_1 et donner $E(X_1)$, son espérance.

II.A.2) Pour i compris entre 1 et $k-1$, vérifier que la variable aléatoire Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{k-i}{k}$ et donner $E(Z_i)$, son espérance.

II.A.3) Pour i compris entre 1 et $k-1$, comparer $X_{i+1}-X_i$ et Z_i.

II.A.4) En remarquant que $X_k = X_1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(X_{i+1}-X_i)$, donner une expression de $E(X_k)$, l'espérance de X_k, sous la forme d'une somme.

II.A.5)

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) - \ln(n)$. Montrer que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ ($n \geqslant 2$) est convergente. Qu'en déduit-on pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b) En déduire un équivalent de $E(X_k)$ lorsque k tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

II.B – Équivalent de $P(X_k = n)$ lorsque $n \to +\infty$

Dans cette sous-partie, on fixe l'entier k.

II.B.1) Quelle est la valeur de $P(X_k = n)$ pour n compris entre 1 et $k-1$?

II.B.2) Montrer que si n est un entier supérieur ou égal à k, alors $P(X_k = n) = \dfrac{k(k-1)!\,S_{n-1,k-1}}{k^n}$.

II.B.3) En déduire un équivalent et la limite de $P(X_k = n)$ lorsque $n \to +\infty$, et interpréter ce résultat.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — TSI — 2016

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

- $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant 3 lignes et 3 colonnes.
- $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles.
- $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales.
- I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Le polynôme caractéristique d'une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A)$.
- $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant 3 lignes et 1 colonne.
- La norme euclidienne d'un élément $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, égale à $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, est notée $\|u\|$.
- On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est bornée s'il existe une constante $C \geqslant 0$ indépendante de n telle que $\|u_n\| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ converge vers $\ell \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de A et $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres de A ; on appelle $\rho(A)$ le rayon spectral de A.
  On a donc $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
- $T_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$ (autrement dit, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont réelles).

Objectif du problème

L'objectif du problème est d'étudier le comportement asymptotique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$, où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en fonction de la condition initiale u_0 et du rayon spectral $\rho(A)$.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes entre elles.

I Généralités

I.A – Cas des matrices orthogonales

On considère une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et un vecteur $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.A.1) Exprimer $\|u_{n+1}\|$ en fonction de $\|u_n\|$ et justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

I.A.2) À quelle condition, portant sur le vecteur u, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

I.A.3) Que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice A qui appartient à la fois à $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et à $T_3(\mathbb{R})$? En déduire la description de tous les éléments de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \cap T_3(\mathbb{R})$.

I.B – Étude d'un exemple

Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $B_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & s^2 & 0 \end{pmatrix}$.

I.B.1) Pour quelles valeurs du paramètre s la matrice B_s appartient-elle à $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$? Pour ces valeurs de s, donner une description géométrique de l'endomorphisme associé à B_s dans la base canonique.

I.B.2) Pour quelles valeurs du paramètre s la matrice B_s appartient-elle à $T_3(\mathbb{R})$? Que vaut alors son rayon spectral $\rho(B_s)$?

I.B.3) Pour tout entier $\ell \geqslant 1$, calculer la matrice $B_s^{2\ell}$.

I.B.4) Déduire des deux questions précédentes qu'il existe $A \in T_3(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$ ne soit pas bornée dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II Un exemple issu des probabilités

Deux personnes sont perdues dans un labyrinthe composé de cinq pièces disposées comme indiqué sur le dessin de la figure 1. Chaque pièce est reliée aux deux pièces voisines par un couloir. Les couloirs sont représentés par les segments du dessin.

BY-NC-SA

À l'instant $n = 0$, les deux personnes se situent dans deux pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2). Elles partent alors à la recherche l'une de l'autre selon les règles suivantes :

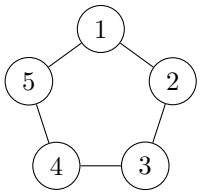


Figure 1

- à partir d'une pièce, chacune peut aller dans l'une ou l'autre des deux pièces voisines, les deux possibilités étant de probabilité 1/2 ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- les choix des déplacements sont indépendants les uns des autres ;
- on suppose que les deux personnes ne peuvent ni se retrouver ni se voir dans les couloirs qui relient entre elles les différentes pièces ;
- les deux personnes se déplacent jusqu'à se retrouver dans une même pièce ; une fois qu'elles se sont retrouvées, elles restent ensemble lors de leurs déplacements futurs.

Pour tout entier naturel n on note :

- A_n l'événement « les deux personnes sont dans la même pièce après n déplacements » et $a_n = P(A_n)$;
- B_n l'événement « les deux personnes sont dans des pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2 ou 1 et 5) après n déplacements » et $b_n = P(B_n)$;
- C_n l'événement « les deux personnes sont dans des pièces non voisines (par exemple les pièces 1 et 3 ou 1 et 4) après n déplacements » et $c_n = P(C_n)$.

II.A – Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

II.B – Soit n un entier naturel. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{A_n}(A_{n+1})$ de A_{n+1} sachant A_n. Calculer de même les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.

II.C – En déduire l'égalité $P(A_{n+1}) = P(A_n) + \dfrac{1}{4}P(C_n)$.

II.D – Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4}c_n$, $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n$.

II.E – On note $u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que la relation $u_{n+1} = Au_n$ soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.F – On se propose de déterminer l'expression des trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.F.1) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$$

II.F.2) En déduire l'expression de b_n, puis celles de c_n et de a_n en fonction de n.

II.F.3) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites et en donner une interprétation.

II.G – Soit X la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires pour que les deux personnes se retrouvent pour la première fois.

II.G.1) Quelles sont les valeurs prises par X ?

II.G.2) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction de A_n et C_{n-1}.

II.G.3) Donner la loi de X.

Justifier que pour $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Calculer l'espérance de X.

Comment peut-on l'interpréter dans le cadre du problème du labyrinthe.

III Rayon spectral

III.A – Quelques résultats intermédiaires

Dans cette sous-partie, on fixe un nombre réel $\mu \geqslant 0$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}APw\| \leqslant \mu\|w\|$.

III.A.1) Démontrer l'inégalité $\|P^{-1}A^{n+1}Pw\| \leqslant \mu\|P^{-1}A^nPw\|$, pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute matrice $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire que $\|P^{-1}A^nPw\| \leqslant \mu^n\|w\|$.

III.A.2)

a) Justifier brièvement l'inégalité

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \left\|P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\| \leqslant |x|\left\|P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| + |y|\left\|P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| + |z|\left\|P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$$

BY-NC-SA

b) Pour $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$, on pose $C(P) = \sqrt{p_{11}^2 + p_{21}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2 + p_{22}^2 + p_{32}^2 + p_{13}^2 + p_{23}^2 + p_{33}^2}$.
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des vecteurs bien choisis, démontrer l'inégalité

$$\forall w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \|Pw\| \leqslant C(P)\|w\|$$

III.A.3) Déduire de ce qui précède l'inégalité $\|A^n P w\| \leqslant C(P)\mu^n \|w\|$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On considère à présent un vecteur $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la suite définie par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = A\,u_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.A.4) En introduisant $w = P^{-1}u$, démontrer l'inégalité $\|u_n\| \leqslant C(P^{-1})C(P)\mu^n\|u\|$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.A.5)

a) Dans le cas où $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Dans le cas où $0 \leqslant \mu < 1$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

III.B – Cas d'une matrice diagonalisable

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

III.B.1) Justifier l'égalité $\rho(A) = \rho(P^{-1}AP)$, valable pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

III.B.2) Préciser le rayon spectral $\rho(D)$ de la matrice D.

III.B.3) Pour tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, démontrer l'inégalité $\|Dw\| \leqslant \rho(D)\|w\|$.

On suppose dans la suite de cette sous-partie que que A est *diagonalisable* sur $\mathbb{R}$ et on considère un vecteur $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme précédemment, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = A\,u_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.B.4) Expliquer pourquoi il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que l'on a l'inégalité $\|P^{-1}APw\| \leqslant \rho(A)\|w\|$ pour tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

III.B.5) En déduire que si $\rho(A) \leqslant 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

III.B.6) Le résultat de la question précédente est-il cohérent avec la question II.F.3 ? Justifier la réponse.

III.B.7) Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\rho(A) < 1$?

III.C – Optimalité de l'hypothèse $\rho(A) < 1$ dans le cas général

III.C.1) On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Que vaut $\rho(A)$? A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

III.C.2) Donner l'expression de A^ℓ, valable pour tout $\ell \in \mathbb{N}^\star$.

III.C.3) Comme précédemment, pour $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$.
Démontrer qu'il existe $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

III.D – Cas d'une matrice $A \in T_3(\mathbb{R})$ avec $\rho(A) < 1$

Dans toute cette sous-partie, A désigne une matrice de $T_3(\mathbb{R})$ qui vérifie l'hypothèse $\rho(A) < 1$.

III.D.1)

a) Expliquer pourquoi il existe une matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}AQ = T$.

b) Exprimer le rayon spectral $\rho(A)$ en fonction des coefficients de la matrice T.

III.D.2)

a) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer l'inégalité $(ay + bz)^2 \leqslant (a^2 + b^2)(y^2 + z^2)$, valable pour tout vecteur $(a, b, y, z) \in \mathbb{R}^4$.

b) En déduire, pour tous vecteurs $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité $(ay+bz)^2+c^2z^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(y^2+z^2)$.

BY-NC-SA

III.D.3)

a) En notant $D = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$, justifier l'inégalité $\|Tw\| \leqslant \|Dw\| + \|(T-D)w\|$, valable pour tout $w \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b) Démontrer l'inégalité $\|Tw\| \leqslant \left(\rho(A) + \sqrt{t_{12}^2 + t_{13}^2 + t_{23}^2}\right)\|w\|$.

III.D.4)

a) Soit δ un réel strictement positif. Justifier que la matrice $\Delta_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer la matrice $\Delta_\delta^{-1} T \Delta_\delta$.

b) Démontrer l'inégalité $\|\Delta_\delta^{-1} T \Delta_\delta w\| \leqslant \left(\rho(A) + \sqrt{\delta^2 t_{12}^2 + \delta^4 t_{13}^2 + \delta^2 t_{23}^2}\right)\|w\|$.

III.D.5) Comme précédemment, pour tout vecteur $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En exploitant l'hypothèse $\rho(A) < 1$ et la question III.A.5b, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On pourra poser $P = Q\Delta_\delta$ pour un δ bien choisi.

IV Méthode de Jacobi

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $MX = B$, avec les notations suivantes :

- $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur inconnu ;
- $M = \left(m_{ij}\right)_{(i,j)}$ est une matrice de $T_3(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ dont aucun élément diagonal n'est nul ;
- $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La méthode de Jacobi consiste à calculer une solution approchée de la solution exacte de l'équation $MX = B$. On admettra le résultat suivant, plus fort que celui obtenu dans la partie précédente : si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\rho(A) < 1$, alors pour tout $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $u_0 = u$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = Au_n$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Partant d'un vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{m_{11}}(-m_{12}y_n - m_{13}z_n + \alpha) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{m_{22}}(-m_{21}x_n - m_{23}z_n + \beta) \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{m_{33}}(-m_{31}x_n - m_{32}y_n + \gamma) \end{cases}$$

IV.A – Prouver qu'il existe une matrice D diagonale et inversible telle que $X_{n+1} = (I - D^{-1}M)X_n + D^{-1}B$.

IV.B – Justifier l'existence et l'unicité de $\tilde{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, solution exacte de l'équation $MX = B$.

IV.C – Démontrer que $X_{n+1} - \tilde{X} = (I - D^{-1}M)(X_n - \tilde{X})$.

IV.D – En déduire que si $\rho(I - D^{-1}M) < 1$ la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{X}$.

IV.E – Pour chacun des deux exemples ci-dessous, calculer $\tilde{X}$ et $\rho(I - D^{-1}M)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

IV.F – Pour chacun des deux exemples, calculer X_1, X_2, X_3, X_4 et commenter les résultats obtenus.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2017

Sur la partie symétrique d'une matrice

Notations

Si n et p sont des entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On définit de façon analogue $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée $A^\top$. On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si $A^\top = A$ et qu'elle est dite *antisymétrique* si $A^\top = -A$.

Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Le groupe des matrices orthogonales à n lignes et n colonnes est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A_s = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ et $A_a = \frac{1}{2}(A - A^\top)$. Ainsi, A_s est une matrice symétrique, A_a est une matrice antisymétrique et $A = A_s + A_a$. On dit que A_s est la *partie symétrique* de A et que A_a est sa *partie antisymétrique*.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ le spectre réel de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

Une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives et elle est dite *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Objectif

L'objectif du problème est d'étudier certaines propriétés des matrices réelles carrées dont la partie symétrique est définie positive.

La première partie apporte quelques résultats préliminaires.

La deuxième partie, où on étudie les matrices F-singulières, et la troisième partie, qui traite des matrices positivement stables, sont largement indépendantes.

I Résultats préliminaires

I.A – Distance de A à A_s

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique donné par $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}(M^\top N)$ où tr désigne la trace. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée.

I.A.1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs dimensions.

I.A.2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|A - A_s\|_2 \leqslant \|A - S\|_2$. Préciser à quelle condition sur $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, cette inégalité est une égalité.

I.B – Valeurs propres de A_s

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.B.1) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $X^\top M Y$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on convient de l'identifier au nombre réel égal à son unique coefficient.

Avec cette convention, montrer que $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top A_s X \geqslant 0$ et que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^\top A_s X > 0$.

I.B.2) Pour toute valeur propre réelle λ de A, montrer que $\min \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leqslant \lambda \leqslant \max \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$.

En déduire que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors A est inversible.

I.B.3) On suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe une unique matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_s$.

b) Montrer qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = \det(A_s)\det(I_n + Q)$.

c) En déduire que $\det(A) \geqslant \det(A_s)$.

BY-NC-SA

I.B.4) On suppose A inversible et, conformément aux notations du problème, $(A^{-1})_s$ désigne la partie symétrique de l'inverse de A. Montrer que $\left(\det(A)\right)^2 \det((A^{-1})_s) = \det(A_s)$.

On pourra considérer $A(A^{-1})_s A^\top$.

I.C – Partie symétrique des matrices orthogonales

I.C.1) Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de A_s sont dans $[-1,1]$.

I.C.2) Donner un exemple de matrice symétrique S dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1,1]$ et pour laquelle il n'existe pas de matrice $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A_s = S$.

I.C.3) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a) On suppose que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1,1]$ et que pour toute valeur propre λ de S dans $]-1,1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$.

b) Réciproquement, montrer que s'il existe $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$, alors $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1,1]$ et pour toute valeur propre λ de S dans $]-1,1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire.

II Matrices *F*-singulières

Dans la suite de cette partie, on note $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini par

$$\forall X, Y \in E_n, \quad (X \mid Y) = X^\top Y$$

où, comme au I.B.1, on identifie la matrice $X^\top Y$ à son unique coefficient.

Si $1 \leqslant p \leqslant n$, on note $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *singulière* si elle n'est pas inversible.

Si F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de E_n et si $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que K est *F-singulière* s'il existe $X \in F$ non nul tel que $\forall Z \in F$, $Z^\top K X = 0$. Dans le cas contraire, on dit que K est *F-régulière*.

II.A – Cas où F est un hyperplan

II.A.1) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est singulière si et seulement si elle est E_n-singulière.

Dans cette sous-partie II.A, on suppose désormais $n \geqslant 2$. Soit $F = H$ un hyperplan de E_n et soit $N \in E_n$ un vecteur unitaire normal à H.

II.A.2) Montrer que A est H-singulière si et seulement s'il existe un vecteur non nul X de H et un réel λ tels que $AX = \lambda N$.

II.A.3) En déduire que A est H-singulière si et seulement si la matrice $A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^\top & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est singulière.

Dans les questions suivantes, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.A.4) Montrer qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B_3 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $B_4 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que : $A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1} N \end{pmatrix}$.

II.A.5) En déduire que $\det(A_N) = -N^\top A^{-1} N \det(A)$.

II.A.6) Montrer que si $\det((A^{-1})_s) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est H-singulière.

II.A.7) En déduire que si $\det(A_s) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est H-singulière.

II.A.8) On suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que A est H-régulière pour tout hyperplan H de E_n.

II.B – Exemple

On traitera l'exemple

$$A = A(\mu) = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu \\ -1 & 2-\mu & \mu-1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.B.1) Montrer que $A(\mu)$ est inversible pour tout réel μ.

II.B.2) Calculer $A(\mu)_s$ et montrer que $A(\mu)_s$ est singulière pour $\mu = 1,\ 1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}$.

II.B.3) Déterminer un hyperplan H tel que $A(1)$ soit H-singulière.

BY-NC-SA

II.C – Cas où F est de dimension $n-2$

On suppose ici $n \geqslant 3$. Soit F un sous-espace vectoriel de E_n de dimension $n-2$. On considère (N_1, N_2) une base de $F^\perp$ et on pose

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$$

II.C.1) Montrer que A est F-singulière si et seulement s'il existe un élément non nul X de F et deux réels λ_1, λ_2 tels que $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$.

II.C.2) En déduire que A est F-singulière si et seulement si la matrice

$$A_N = \begin{pmatrix} A & N_1 & N_2 \\ N_1^\top & 0 & 0 \\ N_2^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & N \\ N^\top & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$$

est singulière.

Dans les questions suivantes, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C.3) Montrer qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, $B_3 \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1} N \end{pmatrix}$$

II.C.4) En déduire que $\det(A_N) = \det(N^\top A^{-1} N)\det(A)$.

II.C.5) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det(P^\top A^{-1} P) = 0$ si et seulement s'il existe $P' \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det({P'}^\top A P') = 0$.

II.C.6) Montrer que si $N' = \begin{pmatrix} N'_1 & N'_2 \end{pmatrix}$ alors

$$\det({N'}^\top A N') = ({N'_1}^\top A_s N'_1)({N'_2}^\top A_s N'_2) - ({N'_1}^\top A_s N'_2)^2 + ({N'_1}^\top A_a N'_2)^2$$

II.C.7) En déduire que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(N^\top A^{-1} N) > 0$.

II.C.8) En conclure que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A est F-régulière pour tout sous-espace vectoriel F de dimension $n-2$ de E_n.

II.D – Exemple

On reprend l'exemple de la sous-partie II.B avec $\mu = 1$.

II.D.1) Comment choisir $N' = \begin{pmatrix} N'_1 & N'_2 \end{pmatrix}$ de façon que $\det({N'}^\top A N') = 0$?

II.D.2) Déterminer un sous-espace vectoriel F de E_3 tel que $\dim F = 1$ et tel que $A(1)$ soit F-singulière.

II.E – Cas général

Soit F un sous-espace vectoriel de E_n de dimension $n-p$, où $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

II.E.1) Montrer que A est F-singulière si $\det({N'}^\top A N') = 0$ pour une matrice $N' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ que l'on définira.

On suppose désormais que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.E.2) Montrer que si $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est non nul alors $X^\top {N'}^\top A N' X > 0$.

II.E.3) En déduire que les valeurs propres réelles de ${N'}^\top A N'$ sont strictement positives.

II.E.4) En déduire que $\det({N'}^\top A N') > 0$.

II.E.5) En déduire que A est F-régulière pour tout sous-espace vectoriel $F \neq \{0\}$ de E_n.

III Matrices positivement stables

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positivement stable* si toutes ses valeurs propres complexes ont une partie réelle strictement positive.

III.A – Exemples

III.A.1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est positivement stable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

III.A.2)

a) La somme de deux matrices positivement stables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle nécessairement positivement stable ?

b) Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices positivement stables qui commutent. Montrer que $A+B$ est positivement stable.

BY-NC-SA

III.A.3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A_s soit définie positive.

a) Soit $X = Y + \mathrm{i}Z$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, où Y et Z appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\overline{X} = Y - \mathrm{i}Z$ et on identifie la matrice $\overline{X}^\top AX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ au nombre complexe égal à son unique coefficient.

Montrer que, si $X \neq 0$, alors $\mathrm{Re}(\overline{X}^\top AX) > 0$, où $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.

b) Montrer que A est positivement stable.

III.A.4) Donner un exemple de matrice A positivement stable telle que A_s n'est pas définie positive.

III.B – Dans cette sous-partie III.B, on établit un résultat sur l'exponentielle de matrice qui sera utile par la suite.

On rappelle que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle de M est définie par

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

La fonction $t \mapsto \exp(tM)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est donnée par

$$t \mapsto M\exp(tM) = \exp(tM)M$$

de plus, $\exp(-tM)\exp(tM) = I_n$ pour tout réel t.

III.B.1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Soit u une fonction à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

On suppose que la fonction $v = u' + \lambda u$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que u est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra considérer l'équation différentielle $y' + \lambda y = v$.

III.B.2) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure à coefficients complexes. On suppose que les coefficients diagonaux de T sont des nombres complexes de partie réelle strictement positive. Soit $u_1, ..., u_n$ des fonctions à valeurs complexes, définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et soit, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $U'(t) + TU(t) = 0$.

Montrer que les fonctions u_j, où $1 \leqslant j \leqslant n$, sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

III.B.3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positivement stable de valeurs propres complexes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et soit α un réel tel que $0 < \alpha < \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{Re}(\lambda_j)$.

Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\exp(-tA)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra appliquer la question III.B.2 à une matrice triangulaire T semblable à $A - \alpha I_n$.

III.C – Une caractérisation des matrices positivement stables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positivement stable. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = A^\top M + MA.$$

III.C.1) Montrer que Φ est positivement stable, c'est-à-dire que sa matrice dans une base quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positivement stable.

III.C.2)

a) Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top B + BA = I_n$.

b) Montrer que B est symétrique et que $\det(B) > 0$.

III.C.3) Pour tout réel t, on pose $V(t) = \exp(-tA^\top)\exp(-tA)$ et $W(t) = \displaystyle\int_0^t V(s)\,\mathrm{d}s$.

a) Montrer que, pour tout réel t, $V(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que, si $t > 0$, $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que, pour tout réel t, $A^\top W(t) + W(t)A = I_n - V(t)$.

c) Qu'obtient-on en faisant tendre t vers $+\infty$ dans l'égalité précédente ? En déduire que la matrice B de la question III.C.2 est définie positive.

• • • FIN • • •

CC BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2017

Ce problème a pour objet la représentation de la loi d'une variable aléatoire comme loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

On s'intéresse d'abord au cas d'une somme de deux variables à valeurs entières, puis au cas de variables aléatoires dont la loi est celle de la somme d'un nombre quelconque de variables indépendantes de même loi.

Notations

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont discrètes. On note $\mathbb{P}_X$ la loi d'une variable aléatoire X.

Si X et X' sont deux variables aléatoires définies sur les espaces probabilisés respectifs $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, la notation $X \sim X'$ signifie que X et X' ont même loi, c'est-à-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X sa fonction génératrice, définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$$

lorsque la série converge.

On pourra si nécessaire utiliser librement le résultat suivant.

> Si $m \in \mathbb{N}^*$ et si $\mathcal{L}$ est une loi de probabilité sur un espace probabilisé Ω_1, alors il existe des variables aléatoires $X_1, ..., X_m$, définies sur un espace probabilisé Ω_m, mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{L}$.

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on désigne par $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

I Variables aléatoires entières décomposables

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *décomposition* de X toute relation de la forme $X \sim Y + Z$ où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé pouvant être distinct de celui sur lequel X est définie.

On dit que X est *décomposable* si X admet une décomposition où Y et Z ne sont pas constantes presque sûrement.

I.A – Premiers exemples

I.A.1) Soit X et X' deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Justifier que $X \sim X'$ si et seulement si $G_X = G_{X'}$.

I.A.2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une décomposition $X \sim Y + Z$, où Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Quelle relation lie G_X, G_Y et G_Z ?

I.A.3) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$. Montrer que X est décomposable si et seulement si $n \geqslant 2$.

I.A.4) Soit $A(T) \in \mathbb{R}[T]$ le polynôme : $A(T) = T^4 + 2T + 1$.

a) Soit $U(T)$ et $V(T)$ deux polynômes à coefficients réels positifs ou nuls tels que $U(T)V(T) = A(T)$. Montrer que l'un des polynômes $U(T)$ ou $V(T)$ est constant.

> On pourra distinguer les cas selon les valeurs des degrés de $U(T)$ et $V(T)$.

b) En déduire qu'il existe une variable aléatoire décomposable X telle que X^2 ne soit pas décomposable.

> On pourra considérer le polynôme $\frac{1}{4}A(T)$.

I.B – Variables uniformes

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \text{ si } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } \mathbb{P}(X = k) = 0 \text{ sinon}$$

I.B.1) Variables uniformes décomposables

On suppose dans cette question que n n'est pas premier : il existe des entiers a et b, supérieurs ou égaux à 2, tels que $n = ab$.

BY-NC-SA

a) Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires entières (Q, R) définies sur Ω telles que

$$X = aQ + R \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega,\ R(\omega) \in [\![0, a-1]\!]$$

On pourra considérer une division euclidienne.

b) Préciser la loi de (Q, R), puis les lois de Q et de R.

c) Montrer que X est décomposable. En déduire une expression de G_X comme produit de deux polynômes non constants que l'on précisera.

I.B.2) Variables uniformes non décomposables

On suppose dans cette question que n est un nombre premier et on établit que X n'est pas décomposable.

a) Montrer qu'il suffit de prouver le résultat suivant : si U et V sont des polynômes de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que $U(T)V(T) = 1 + T + \cdots + T^{n-1}$, alors l'un des deux polynômes U ou V est constant.

Dans ce qui suit, on fixe des polynômes U et V de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que

$$U(T)V(T) = 1 + T + \cdots + T^{n-1}$$

On pose $r = \deg U$ et $s = \deg V$ et on suppose par l'absurde que r et s sont non nuls.

b) Montrer que $U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$ et $V(T) = T^s V\left(\frac{1}{T}\right)$.

On note alors $U(T) = 1 + u_1 T + \cdots + u_{r-1}T^{r-1} + T^r$ et $V(T) = 1 + v_1 T + \cdots + v_{s-1}T^{s-1} + T^s$ avec $r \leqslant s$ (quitte à échanger les rôles de U et V).

c) Montrer que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $u_k v_k = 0$.

d) En déduire que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $u_k \in \{0, 1\}$ et $v_k \in \{0, 1\}$.

e) Conclure.

On pourra d'abord montrer que tous les coefficients de V sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

II Variables infiniment divisibles : exemples

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est *infiniment divisible* si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires réelles discrètes $X_{m,1}, ..., X_{m,m}$ mutuellement indépendantes, de même loi, et vérifiant $X \sim X_{m,1} + \cdots + X_{m,m}$. Dans cette définition, l'espace probabilisé Ω_m sur lequel sont définies les $X_{m,i}$ peut dépendre de m.

II.A – Variables bornées

II.A.1) On suppose que X est constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Montrer que X est infiniment divisible.

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que toute variable aléatoire bornée infiniment divisible est presque sûrement constante.

Soit X une variable aléatoire bornée infiniment divisible définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M = \sup_\Omega |X|$, de sorte que $|X(\omega)| \leqslant M$ pour tout $\omega \in \Omega$.

II.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, et telles que $X_1 + \cdots + X_n$ ait même loi que X.

a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que $X_i \leqslant \dfrac{M}{n}$ presque sûrement, puis $|X_i| \leqslant \dfrac{M}{n}$ presque sûrement.

b) En déduire que $\mathbb{V}(X) \leqslant \dfrac{M^2}{n}$, où $\mathbb{V}(X)$ désigne la variance de X.

II.A.3) Conclure que X est presque sûrement constante.

II.B – Étude du caractère infiniment divisible de quelques variables entières

II.B.1) Une variable binomiale est-elle infiniment divisible ?

II.B.2) Soit n un entier naturel non nul et soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

II.B.3) Soit X une variable aléatoire de Poisson. Montrer que X est infiniment divisible.

II.B.4) Soit r un entier naturel non nul et soit $X_1, ..., X_r$ des variables aléatoires de Poisson mutuellement indépendantes. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} iX_i$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

BY-NC-SA

II.C – Séries de variables aléatoires à valeurs entières

II.C.1) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que si A et B sont des événements de $\mathcal{A}$, et si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont leurs événements contraires respectifs, alors

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leqslant \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

b) En déduire que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leqslant 2\mathbb{P}(X \neq Y)$.

II.C.2) Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série des $\mathbb{P}(U_i \neq 0)$ soit convergente.

a) Soit $Z_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \geqslant n, U_i(\omega) \neq 0\}$. Montrer que (Z_n) est une suite décroissante d'événements et que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$.

b) En déduire que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\}$ est presque sûrement fini.

c) On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ et $S = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$. Justifier que S est définie presque sûrement. Montrer que G_{S_n} converge uniformément vers G_S sur $[-1, 1]$.

II.C.3) Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum \lambda_i$ est convergente, et on note $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i, X_i suive une loi de Poisson de paramètre λ_i. On convient que, si $\lambda_i = 0$, X_i est la variable aléatoire nulle.

a) Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ est convergente.

b) Montrer que la série $\sum_{i\geqslant 1} X_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme (définie presque sûrement) suit une loi de Poisson de paramètre λ.

c) Montrer que la série $\sum_{i\geqslant 1} iX_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme $X = \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$ définit une variable aléatoire infiniment divisible.

III Variables entières infiniment divisibles : étude générale

III.A – Série entière auxiliaire

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

III.A.1) Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X = k - j)$$

III.A.2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer

$$|\lambda_k|\mathbb{P}(X = 0) \leqslant \mathbb{P}(X = k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\mathbb{P}(X = k - j) \leqslant (1 - \mathbb{P}(X = 0)) \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right)$$

III.A.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer : $1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X = 0)^k}$.

III.A.4) Montrer que la série entière $\sum \lambda_k t^k$ a un rayon de convergence $\rho(X)$ supérieur ou égal à $\mathbb{P}(X = 0)$.

Pour tout réel t de $]-\rho(X), \rho(X)[$, on pose

$$H_X(t) = \ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t^k$$

À toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, on associe ainsi une série entière H_X. Dans la suite du problème, H_X sera appelée *série entière auxiliaire* de X.

III.A.5) Pour $t \in]-\rho(X), \rho(X)[$, montrer $G'_X(t) = H'_X(t)G_X(t)$, puis $G_X(t) = \exp(H_X(t))$.

III.A.6) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur l'espace Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit H_X et H_Y leurs séries entières auxiliaires. Montrer $H_{X+Y}(t) = H_X(t) + H_Y(t)$ pour tout réel t vérifiant $|t| < \min(\rho(X), \rho(Y))$.

BY-NC-SA

III.B – Variables aléatoires entières λ-positives

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X=0)>0$, et soit H_X sa série entière auxiliaire :

$$H_X(t)=\ln(\mathbb{P}(X=0))+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k t^k$$

On dira que X est λ-*positive* si $\lambda_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

On suppose dans cette sous-partie que X est λ-positive.

III.B.1) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\lambda_k \leqslant \dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$. En déduire que la série $\sum\lambda_k$ converge.

III.B.2) Montrer que, pour tout $t\in[-1,1]$, $G_X(t)=\exp(H_X(t))$ et que $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=-\ln(\mathbb{P}(X=0))$.

III.B.3) Soit (X_i) la suite de variables aléatoires définie au II.C.3. Montrer que $X\sim\sum_{i=1}^{\infty} iX_i$.

III.C – Caractérisation des variables entières infiniment divisibles

Soit X une variable aléatoire infiniment divisible à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X=0)>0$.

Le but de cette sous-partie est de montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(i) X est infiniment divisible ;

(ii) X est λ-positive ;

(iii) il existe une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables de Poisson indépendantes, comme au II.C.3, telle que $X\sim\sum_{i=1}^{\infty} iX_i$.

Dans les questions III.C.1 à III.C.4, on suppose que X est une variable aléatoire infiniment divisible à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X=0)>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe donc n variables aléatoires indépendantes $X_{n,1},\ldots,X_{n,n}$ de même loi telles que la variable aléatoire $X_{n,1}+\cdots+X_{n,n}$ suive la loi de X.

III.C.1)

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $X_{n,1}$ est presque sûrement positive ou nulle.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X_{n,1}=0)>0$.

c) Montrer que les variables aléatoires $X_{n,i}$ sont presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

III.C.2)

a) Montrer $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_{n,1}=0)=1$.

b) En déduire que, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_{n,1}=i)=0$.

III.C.3) Soit H_X la série entière auxiliaire de X, comme elle est définie à la question III.A.4, et soit $\rho(X)$ son rayon de convergence.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit H_n la série entière auxiliaire de $X_{n,1}$.

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer $nH_n=H_X$.

b) En déduire, pour tous n et k dans $\mathbb{N}^*$

$$kn\mathbb{P}(X_{n,1}=k)=\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\mathbb{P}(X_{n,1}=k-j)$$

III.C.4) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, montrer que la suite $\left(n\mathbb{P}(X_{n,1}=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers λ_k. En déduire que X est λ-positive.

III.C.5) Conclusion

a) Montrer le résultat annoncé au début de cette sous-partie III.C.

b) Comment adapter ce résultat aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$?

c) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p\in\,]0,1[$:

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad \mathbb{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}p$$

La variable aléatoire X est-elle infiniment divisible ?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

2017

4 heures Calculatrices autorisées

Grandes déviations

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans ce sujet sont supposées discrètes.

La partie **I** est composée de trois sous-parties mutuellement indépendantes **A**, **B**, **C**, toutes trois utilisées dans la partie **II**.

Notations et rappels

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi de X. On pose $S_0 = 0$ et, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1, on note $E(Y)$ l'espérance de Y.

Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note $V(Y)$ la variance de Y.

Si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on abrège « Y est d'espérance finie » en « $E(Y) < +\infty$ ».

Si τ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, on dit que X vérifie (C_τ) si $E\left(\mathrm{e}^{\tau|X|}\right) < +\infty$.

On pourra utiliser la propriété suivante :

$(\mathcal{P})$ pour Z et Y variables aléatoires réelles telles que $0 \leqslant Y \leqslant Z$, $\quad E(Z) < +\infty \implies E(Y) < +\infty$

Étant données deux variables aléatoires Y et Z définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on dit que Y est *presque surement* égale à Z lorsque $P(Y = Z) = 1$.

On admet le résultat suivant (lemme des coalitions) : soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ disjoints. Alors toute variable aléatoire fonction des $Y_n, n \in A$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $Y_n, n \in B$.

I Premiers résultats

I.A – Une classe de variables aléatoires

I.A.1) Soient U et V deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant un moment d'ordre 2 et telles que V n'est pas presque surement nulle. Montrer que $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 \geqslant 0$ et que $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U$ est presque surement nulle.

I.A.2)

a) On suppose que X est bornée. Justifier que X vérifie (C_τ) pour tout τ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

b) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Quels sont les réels t tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$? Pour ces t, donner une expression simple de $E(\mathrm{e}^{tX})$.

c) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

Quels sont les réels t tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$? Pour ces t, donner une expression simple de $E(\mathrm{e}^{tX})$.

I.A.3) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose $E(\mathrm{e}^{aX}) < +\infty$ et $E(\mathrm{e}^{bX}) < +\infty$.

a) Montrer $\forall t \in [a, b],\ \mathrm{e}^{tX} \leqslant \mathrm{e}^{aX} + \mathrm{e}^{bX}$. En déduire $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$.

Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}; E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty\}$?

b) Soient k dans $\mathbb{N}$, t dans $]a, b[$. On note $\theta_{k,t,a,b}$ la fonction $y \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{y^k \mathrm{e}^{ty}}{\mathrm{e}^{ay} + \mathrm{e}^{by}}$.

Déterminer les limites de $\theta_{k,t,a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $E(|X|^k \mathrm{e}^{tX}) < +\infty$.

CC BY-NC-SA

d) On reprend les notations de la question b). Soient k dans $\mathbb{N}$, c et d deux réels tels que $a < c < d < b$. Montrer qu'il existe $M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in [c,d]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\left|\theta_{k,t,a,b}(y)\right| \leqslant M_{k,a,b,c,d}$.

I.A.4) Dans cette question, τ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et X vérifie (C_τ).

a) Montrer que l'ensemble des réels t tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$ est un intervalle I contenant $[-\tau, \tau]$.

Pour t dans I, on note $\varphi_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX})$.

b) Montrer que si $X(\Omega)$ est fini, φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I.

c) On suppose maintenant que $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels deux à deux distincts et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(X = x_n)$.

En utilisant les résultats établis à la question I.A.3 et deux théorèmes relatifs aux séries de fonctions que l'on énoncera complètement, montrer que φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I.

d) Vérifier que pour t dans l'intérieur de I et k dans $\mathbb{N}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = E(X^k \mathrm{e}^{tX})$.

e) Soit $\psi_X = \dfrac{\varphi_X'}{\varphi_X}$.

Montrer que ψ_X est croissante sur I et que, si X n'est pas presque surement égale à une constante, ψ_X est strictement croissante sur I.

I.B – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

I.B.1) Soit δ un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$P(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

I.B.2) Si u et v sont deux nombres réels tels que $u < E(X) < v$, déterminer la limite de la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \pi_n = P(nu \leqslant S_n \leqslant nv)$$

I.C – Suites sur-additives

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{m+n} \geqslant u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

I.C.1) Soient m, q et r des éléments de $\mathbb{N}$. On pose $n = mq + r$. Comparer les deux nombres réels u_n et $qu_m + u_r$ et montrer que $u_n - ns \geqslant q(u_m - ms) + u_r - rs$.

I.C.2) On fixe m dans $\mathbb{N}^*$ et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. En utilisant la division euclidienne de n par m, montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$,

$$\frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

I.C.3) Montrer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = s$.

II Le théorème des grandes déviations

Soit a un nombre réel.

II.A – Exposant des grandes déviations

II.A.1) Montrer $P(X \geqslant a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geqslant na) = 0$.

II.A.2) Soient m et n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $S_{m+n} - S_m$ et S_n ont même loi.

b) Soit b un nombre réel. Montrer $P(S_{m+n} \geqslant (n+m)b) \geqslant P(S_n \geqslant nb)\, P(S_m \geqslant mb)$.

On suppose dans toute la suite du problème $P(X \geqslant a) > 0$.

II.A.3) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(P(S_n \geqslant na))}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite γ_a négative ou nulle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(S_n \geqslant na) \leqslant \mathrm{e}^{n\gamma_a}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que X vérifie (C_τ) pour un certain $\tau > 0$ et n'est pas presque surement constante. On suppose également que a est strictement supérieur à $E(X)$.

BY-NC-SA

On se propose d'établir que $\gamma_a < 0$ (ce qui montre que la suite $(P(S_n \geqslant na))_{n\geqslant 1}$ converge géométriquement vers 0) puis de déterminer γ_a.

II.B – Majoration des grandes déviations

L'intervalle I et la fonction φ_X sont définis comme dans la question I.A.4.

II.B.1) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $I \cap \mathbb{R}^+$

$$E\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) = (\varphi_X(t))^n, \qquad P(S_n \geqslant na) \leqslant \frac{\varphi_X(t)^n}{\mathrm{e}^{nta}}$$

II.B.2) On définit la fonction $\chi : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(\varphi_X(t)) - ta \end{array} \right.$

a) Montrer que la fonction χ est minorée sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

On note η_a la borne inférieure de χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

b) Donner un équivalent de $\chi(t)$ lorsque t tend vers 0. En déduire $\eta_a < 0$.

c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geqslant na) \leqslant \mathrm{e}^{n\eta_a}$.

En déduire que $\gamma_a < 0$.

d) Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels a vérifiant les conditions $P(X \geqslant a) > 0$ et $a > E(X)$; puis, pour a vérifiant ces conditions, calculer η_a.

i. X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

ii. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

II.C – Le théorème de Cramer

On suppose ici que la borne inférieure η_a de la fonction χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$ est atteinte en un point σ intérieur à $I \cap \mathbb{R}^+$.

Soient t un nombre réel intérieur à I et tel que $t > \sigma$, b un nombre réel tel que $b > \dfrac{\varphi_X{}'(t)}{\varphi_X(t)}$.

II.C.1)

a) Calculer $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \frac{\mathrm{e}^{tx}}{E(\mathrm{e}^{tX})} P(X = x)$.

On admet alors (quitte à modifier $(\Omega, \mathcal{A}, P)$)

– qu'il existe une variable aléatoire X' sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $X'(\Omega) = X(\Omega)$ et dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X' = x) = \frac{\mathrm{e}^{tx}}{E(\mathrm{e}^{tX})} P(X = x)$$

– qu'il existe une suite $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la même loi que X'.

b) Montrer

$$E(X') = \frac{\varphi_X{}'(t)}{\varphi_X(t)}, \qquad E(X') > a$$

II.C.2) On admet que, si n dans $\mathbb{N}^*$ et si f est une application de $X(\Omega)^n$ dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$E(f(X'_1, ..., X'_n)) = \frac{E(f(X_1, ..., X_n)\,\mathrm{e}^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X'_k$. Montrer $P(na \leqslant S'_n \leqslant nb) \leqslant P(S_n \geqslant na)\,\dfrac{\mathrm{e}^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$.

On pourra introduire l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega)^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } na \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant nb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

b) En utilisant les questions I.B.2, II.B.2c et le a) ci-dessus, montrer finalement que $\eta_a = \gamma_a$.

BY-NC-SA

II.C.3) Dans cette question on pourra utiliser les résultats du II.B.2d.

a) Soit α dans $]0,1/2[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \left\{k \in \{0,...,n\},\ \left|k - \frac{n}{2}\right| \geqslant \alpha n\right\}, \qquad U_n = \sum_{k\in A_n} \binom{n}{k}$$

Déterminer la limite de la suite $\left(U_n^{1/n}\right)_{n\geqslant 1}$.

b) Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, α dans $]\lambda,+\infty[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geqslant \alpha n}} \frac{n^k\lambda^k}{k!}$$

Déterminer la limite de la suite $\left(T_n^{1/n}\right)_{n\geqslant 1}$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

4 heures Calculatrices autorisées

2017

Objectifs

L'objectif du problème est l'étude de l'évolution de certains systèmes (discrets ou continus) à coefficients périodiques, dans le cadre de la théorie de Floquet. Dans la première partie on démontre quelques propriétés des suites complexes périodiques et des normes matricielles. La théorie de Floquet est introduite dans la partie II à travers l'étude de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients périodiques. Dans la partie III, le résultat est généralisé au cas des suites vectorielles. Une approche du cas continu est proposée dans la partie IV. La partie V est consacrée à la preuve d'un lemme nécessaire à la partie III ; en dehors de cette finalité elle est indépendante des autres parties.

Notations

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes ;
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices colonnes de taille n à coefficient complexes ; on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ représente l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\mathrm{tr}(M)$ est la trace de la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrice triangulaires supérieures d'ordre n.
- $0_{1,n}$ est la matrice ligne de taille n dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|Y\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i|$.
- Pour toute matrice $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|C\|_0 = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |c_{i,j}|$.

On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$ et que $\|\cdot\|_0$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont deux matrices colonnes de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$, on note $[A, B]$ la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

I Préliminaire

I.A – Une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite périodique s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_{k+p} = z_k$; p est alors une période de la suite (z_k) qui est dite p-périodique.

I.A.1) Vérifier qu'une suite périodique est bornée.

I.A.2) Que peut-on dire des suites 1-périodiques ?

I.A.3) Vérifier que, si (z_k) est p-périodique, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_{n+kp} = z_n$.

I.A.4) Que peut-on dire des suites qui sont à la fois périodiques et convergentes ?

I.B – Vérifier les deux propriétés suivantes.

I.B.1) $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2 \quad \|AB\|_0 \leqslant n\|A\|_0 \cdot \|B\|_0$

I.B.2) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall Y \in \mathbb{C}^n \quad \|AY\|_\infty \leqslant n\|A\|_0 \cdot \|Y\|_\infty$

II Exemples de suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients périodiques

II.A – Dans cette sous-partie II.A, a est un nombre réel non nul. On note Sol(II.1) l'ensemble des suites complexes $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad z_{k+1} + az_k + z_{k-1} = 0 \tag{II.1}$$

II.A.1) Donner la forme générale des suites appartenant à Sol(II.1) en fonction des racines complexes r_1 et r_2 de l'équation $r^2 + ar + 1 = 0$. Que valent $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$?

II.A.2) Montrer que si $|a| > 2$, la suite nulle est la seule solution périodique de (II.1).

II.A.3) Montrer que si $a = -2$ alors, (II.1) admet une infinité de solutions constantes et une infinité de solutions non bornées.

BY-NC-SA

II.A.4) Montrer que si $a = +2$ alors, (II.1) admet une infinité de solutions 2-périodiques et une infinité de solutions non bornées.

II.A.5) On suppose dans cette question que p est un entier supérieur ou égal à 3. Donner une valeur de $a \in]-2, 2[$ pour laquelle toutes les solutions de l'équation (II.1) sont p-périodiques.

II.B – Dans toute la suite de cette partie, on suppose que p est un entier supérieur ou égal à 2, que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres réels p-périodiques et que $\forall k \in \mathbb{N},\ b_k \neq 0$. On note Sol(II.2) l'ensemble des suites complexes $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad b_k z_{k+1} + a_k z_k + b_{k-1} z_{k-1} = 0 \tag{II.2}$$

II.B.1) Justifier que l'application $\Psi : \begin{vmatrix} \text{Sol(II.2)} & \to & \mathbb{C}^2 \\ (z_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

II.B.2) On se fixe $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, deux suites solutions de (II.2).

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $W_k = b_k(y_k z_{k+1} - z_k y_{k+1})$. Montrer que la suite $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante.

II.B.3) Montrer que les deux suites $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base de Sol(II.2) si et seulement si $W_0 \neq 0$.

II.C – À toute suite complexe $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on associe la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}^2$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Z_k = \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}$$

Démontrer que la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est solution de (II.2) si et seulement si la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est solution d'un système (II.3) de la forme

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Z_{k+1} = A_k Z_k \tag{II.3}$$

Préciser la matrice $A_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II.D – On note dorénavant $Q = A_{p-1}A_{p-2}\cdots A_0$. On se fixe dans cette sous-partie une solution $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de (II.3).

II.D.1) Démontrer que $\det Q = 1$.

II.D.2) Démontrer que, pour tout entier naturel k et tout entier naturel $r \in [\![1, p-1]\!]$,

$$\begin{cases} Z_{kp} = Q^k Z_0 \\ Z_{kp+r} = A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_0 Q^k Z_0 \end{cases}$$

II.E –

II.E.1) Démontrer que (II.2) admet une solution périodique non nulle de période p si et seulement si 1 est une valeur propre de Q.

II.E.2) En déduire que (II.2) admet une solution périodique non nulle de période p si et seulement si $\mathrm{tr}(Q) = 2$.

Démontrer que dans ce cas, ou bien toutes les solutions de (II.2) sont périodiques de période p, ou bien (II.2) admet une solution non bornée.

> On pourra démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et un nombre complexe α tels que $Q = P\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et, dans le cas où $\alpha \neq 0$, considérer la suite de Sol(II.2) dont l'image par Ψ est le vecteur $P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.E.3) Montrer que si $|\operatorname{tr} Q| < 2$, alors toute solution de (II.2) est bornée.

III Généralisation

Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

On se fixe dans toute cette partie une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ que l'on suppose p-périodique, c'est-à-dire telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_{k+p} = A_k$.

On note Sol(III.1) l'ensemble des suites $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Y_{k+1} = A_k Y_k \tag{III.1}$$

III.A – Justifier qu'on définit une suite $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ en posant $\begin{cases} \Phi_0 = I_n \\ \Phi_{k+1} = A_k\Phi_k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

et que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in$ Sol(III.1) si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}$, $Y_k = \Phi_k Y_0$.

BY-NC-SA

III.B –

III.B.1) Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Phi_{k+p} = \Phi_k \Phi_p$.

La matrice Φ_p est appelée *matrice de Floquet* de l'équation (III.1) et ses valeurs propres complexes sont appelées les *multiplicateurs de Floquet* de (III.1).

III.B.2) Soit ρ un multiplicateur de Floquet de (III.1).

a) Démontrer qu'il existe une solution $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de (III.1) non nulle vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$, $Y_{k+p} = \rho Y_k$.

b) Soit $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une telle solution, démontrer que, si $|\rho| < 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$.

Dans toute la suite de cette partie III, on note B une matrice appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et vérifiant $B^p = \Phi_p$ (l'existence d'une telle matrice sera démontrée dans la partie V).

III.C – Démontrer qu'il existe une unique suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right)^{\mathbb{N}}$, périodique de période p, telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Phi_k = P_k B^k$$

III.D – Soit $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une solution de (III.1).

III.D.1) Justifier l'existence de $M = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \|P_k\|_0$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\Phi_k\|_0 \leqslant nM\|B^k\|_0$.

III.D.2)

a) Démontrer que si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|B^k\|_0 = 0$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$.

b) Démontrer que si la suite $\left(\|B^k\|_0\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $\left(\|Y_k\|_\infty\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est également bornée.

III.E – On suppose toujours que p est un entier supérieur ou égal à 2.

III.E.1) Soit $R \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 à racines simples. Démontrer que le polynôme $R(X^p)$ est à racines simples si et seulement si $R(0) \neq 0$.

III.E.2) En déduire que Φ_p est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

III.E.3) On suppose que B est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Démontrer que pour toute solution $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de (III.1), $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$.

IV Le cas continu en dimension 2

Soient A une fonction continue, périodique de période $T > 0$ et X une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

$$A : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ t \mapsto A(t) \end{vmatrix} \qquad X : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

On s'intéresse au système différentiel homogène d'inconnue X

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \tag{IV.1}$$

On se fixe $t_0 \in \mathbb{R}$. On note $U : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$ et $V : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$ les deux solutions du système différentiel (IV.1) vérifiant $U(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

IV.A –

IV.A.1) On considère le système différentiel linéaire (IV.2) dont les solutions sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t) = A(t)M(t) \tag{IV.2}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $E(t) = [U(t), V(t)]$. Vérifier que E est la solution de (IV.2) vérifiant $E(t_0) = I_2$.

IV.A.2) Réciproquement, si $M : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ t \mapsto [F(t), G(t)] \end{vmatrix}$ est une solution de (IV.2) et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, démontrer que la fonction $Y : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \\ t \mapsto M(t)W = w_1 F(t) + w_2 G(t) \end{vmatrix}$ est une solution de (IV.1).

IV.B –

IV.B.1) Soit $t_1 \in \mathbb{R}$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. On suppose que $E(t_1)W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la fonction $Y : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \\ t \mapsto E(t)W = w_1 U(t) + w_2 V(t) \end{vmatrix}$ est nulle. En déduire que pour tout réel t, $E(t)$ est inversible.

BY-NC-SA

IV.B.2) Soit $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ une solution du système (IV.2).
Montrer que pour tout réel t, $M(t) = E(t)M(t_0)$.

IV.B.3) Déduire de la question précédente qu'il existe une unique matrice $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ indépendante de t telle que pour tout réel t, $E(t+T) = E(t)B$.
B s'appelle la *matrice de Floquet* du système (IV.1) et les valeurs propres complexes de B s'appellent les *multiplicateurs de Floquet* de (IV.1).

IV.C –

IV.C.1) Soit $\rho \in \mathbb{C}$ un multiplicateur de Floquet de (IV.1), c'est-à-dire une valeur propre de B, et $Z \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre de B associé à cette valeur propre. On note $Y : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \\ t \mapsto E(t)Z \end{array} \right.$.

a) Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t+T) = \rho Y(t)$.

b) Démontrer qu'il existe un nombre complexe μ et une fonction $S : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \\ t \mapsto S(t) \end{array} \right.$ non nulle et T-périodique telle $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = \mathrm{e}^{\mu t} S(t)$.

IV.C.2) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les multiplicateurs de Floquet pour que le système différentiel (IV.1) admette une solution non nulle périodique de période T.

IV.C.3) On suppose que la matrice B est diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les multiplicateurs de Floquet pour que le système différentiel (IV.1) admette une solution non bornée sur $\mathbb{R}$.

IV.D – On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $W(t) = \det(E(t))$ et on note ρ_1 et ρ_2 les multiplicateurs de Floquet de (IV.1).

IV.D.1) Montrer que pour tout réel t, $W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))W(t)$.

IV.D.2) En déduire que $\rho_1\rho_2 = \exp\left(\displaystyle\int_0^T \mathrm{tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right)$.

V Racines p-ièmes dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$

On se fixe un entier naturel p supérieur ou égal à 2. Pour toute matrice B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on appelle racine p-ième de B toute matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^p = B$. Le but de cette partie est de prouver l'existence d'une telle matrice.

On rappelle le résultat suivant relatif au produit de deux matrices triangulaires par blocs.
Pour toutes matrices A_1 et A_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toutes matrices X_1 et X_2 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et tous nombres complexes λ_1 et λ_2 :

$$\begin{pmatrix} A_1 & X_1 \\ 0_{1,n} & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & X_2 \\ 0_{1,n} & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 & A_1X_2 + \lambda_2 X_1 \\ 0_{1,n} & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

V.A – Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$ on a : $\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & X_k \\ 0_{1,n} & \lambda^k \end{pmatrix}$ où $X_k = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j}A^j\right) X$.

V.B – On notera dans toute cette sous-partie $\mathcal{V}_p = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{p}}; k \in [\![1, p-1]\!]\right\}$, l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité différentes de 1.

V.B.1) Soient a et λ des nombres complexes non nuls. On suppose que $\dfrac{a}{\lambda} \notin \mathcal{V}_p$, ce qui signifie que, soit $a = \lambda$, soit $\dfrac{a^p}{\lambda^p} \neq 1$. Démontrer que le nombre complexe $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}a^j$ est non nul.

V.B.2) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et inversible. Soit λ un nombre complexe non nul. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{a_{i,i}}{\lambda} \notin \mathcal{V}_p$. Démontrer que la matrice $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}A^j$ est inversible.

V.B.3) Montrer que toute matrice triangulaire supérieure et inversible admet au moins une racine p-ième triangulaire supérieure.

On pourra prouver par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété suivante :

$$\forall B \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad \exists A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} A^p = B \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \dfrac{a_{i,i}}{a_{j,j}} \notin \mathcal{V}_p \end{cases}$$

V.B.4) Démontrer que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une racine p-ième.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2017

4 heures Calculatrices autorisées

Soit E un ensemble non vide.

On appelle *partition* de E tout ensemble $\mathcal{U} = \{A_1, ..., A_k\}$ de parties de E tel que

- chaque A_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$ est une partie *non vide* de E ;
- les parties $A_1, ..., A_k$ sont *deux à deux disjointes*, c'est-à-dire que pour tous $i \neq j$ entre 1 et k, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- la réunion des A_i forme E tout entier : $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Si $\mathcal{U}$ une partition de E et si k est le nombre d'éléments de $\mathcal{U}$, on dit aussi que $\mathcal{U}$ une *partition de E en k parties*.

I Nombre de partitions en k parties

I.A – Soit k et n deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

Dans tout le problème, pour tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^{*2}$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.

I.B – Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k dans les cas suivants :

I.B.1) $k > n$;

I.B.2) $k = 1$.

I.C – Montrer que pour tous k et n entiers strictement positifs, on a

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

On pourra distinguer les partitions de $[\![1, n]\!]$ selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.

I.D –

I.D.1) Rédiger une fonction Python récursive permettant de calculer le nombre $S(n, k)$, par application directe de la formule établie à la question I.C.

I.D.2) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, le calcul de $S(n, k)$ par cette fonction récursive nécessite au moins $\binom{n}{k}$ opérations (sommes ou produits).

II Nombres de Bell

Dans toute la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$$

II.A – Montrer que pour $n \geqslant 1$, B_n est égal au nombre total de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

II.B – Démontrer la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

II.C – Montrer que la suite $\left(\frac{B_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

II.D – En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.

Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

II.E – Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.

II.F – En déduire une expression de la fonction f sur $]-R, R[$.

BY-NC-SA

III Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0(X)=1$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$H_k(X)=X(X-1)\cdots(X-k+1)$$

III.A – Montrer que la famille $(H_0,...,H_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

III.B –

III.B.1) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, établir une expression simplifiée de $H_{k+1}(X)+kH_k(X)$.

III.B.2) En déduire que, pour tout entier naturel n

$$X^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)H_k(X)$$

III.C – Soit $k\in\mathbb{N}$.

III.C.1) Montrer que la fonction $f_k : x\mapsto\sum_{n=k}^{+\infty}S(n,k)\frac{x^n}{n!}$ est définie sur $]-1,1[$.

III.C.2) Pour $k\in\mathbb{N}$, on considère la fonction $g_k : x\mapsto\frac{(\mathrm{e}^x-1)^k}{k!}$.
Montrer que la fonction g_k vérifie l'équation différentielle

$$y'=\frac{(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}+ky$$

III.C.3) En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\frac{(\mathrm{e}^x-1)^k}{k!}=\sum_{n=k}^{+\infty}S(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

III.D –

III.D.1) Pour $x\in]-1,1[$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, simplifier $\sum_{k=0}^{+\infty}H_k(\alpha)\frac{x^k}{k!}$.

III.D.2) Montrer que pour $u<\ln 2$

$$\mathrm{e}^{u\alpha}=\sum_{k=0}^{+\infty}H_k(\alpha)\frac{(\mathrm{e}^u-1)^k}{k!}$$

IV Fonctions génératrices

On se donne dans la suite un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.
Soit m un entier strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire $Y\colon\Omega\to\mathbb{N}$ admet un moment d'ordre m fini si Y admet une espérance finie, c'est-à-dire si la série $\sum n^mP(Y=n)$ converge. On appelle alors moment d'ordre m de Y le réel

$$\mathbb{E}(Y^m)=\sum_{n=0}^{\infty}n^m\mathbb{P}(Y=n)$$

IV.A – Montrer que si $Y:\Omega\to\mathbb{N}$ est une variable aléatoire associée à une fonction génératrice G_Y de rayon strictement supérieur à 1, alors Y admet à tout ordre un moment fini.

IV.B – Réciproquement, soit $Y:\Omega\to\mathbb{N}$ une variable aléatoire admettant à tout ordre un moment fini.

IV.B.1) Montrer que la fonction génératrice G_Y est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

IV.B.2) Exprimer $G_Y^{(k)}(1)$ à l'aide des polynômes $H_k(X)$ et de la variable Y.

IV.B.3) La fonction génératrice G_Y a-t-elle nécessairement un rayon de convergence strictement supérieur à 1 ?
On pourra utiliser la série entière $\sum\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}x^n$.

IV.C – On suppose dans cette question que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.

IV.C.1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $B_n=\mathbb{E}(Y^n)$.

IV.C.2) En déduire que pour tout polynôme $Q(X)$ à coefficients entiers, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Q(n)}{n!}$ est convergente et sa somme est de la forme Ne, où N est un entier.

BY-NC-SA

V Somme de puissances

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On pose l'application linéaire :

$$\begin{aligned}\Delta : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) - P(X)\end{aligned}$$

V.A – À l'aide d'un encadrement par des intégrales, déterminer un équivalent de $U_n(p) = \sum_{k=0}^{p} k^n$, à $n \geqslant 1$ fixé, lorsque p tend vers $+\infty$.

V.B – Soit Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur le sous-espace stable $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice A de Δ_n dans la base $(H_0, ..., H_n)$.

V.C – En déduire que $U_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} H_{k+1}(p+1)$.

V.D – On note $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$, puis $G = \mathrm{Vect}(X^{2k+1} \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Soit $Q(X)$ le polynôme tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $Q(p) = \sum_{k=0}^{p} k$.

V.D.1) Rappeler l'expression explicite du polynôme $Q(X)$.

V.D.2) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned}\Phi : F &\to G \\ P(X) &\mapsto \Delta\left(P(Q(X-1))\right)\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

V.D.3) En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P_r(X)$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = P_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$$

V.E –

V.E.1) Déterminer le terme dominant dans $P_r(X)$.

V.E.2) Montrer que pour $r \geqslant 1$, X^2 divise $P_r(X)$.

V.E.3) Expliciter les polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

4 heures Calculatrices autorisées

2017

L'objet du problème est une étude de la vitesse de convergence de suites réelles. Dans la partie I, on définit la vitesse de convergence d'une suite à valeurs réelles et on en étudie quelques propriétés. Le but de la partie II est d'obtenir, dans différents cas issus des probabilités, des majorations de suites convergentes vers 0.

Les parties I et II sont indépendantes.

I Vitesse de convergence d'une suite réelle

Dans cette partie, on utilisera les notations suivantes :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ;
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\ u_k \neq \lim_{n\to\infty} u_n$$

- à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ, on associe la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par

$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|$$

- E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ;
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
  - lente si $\ell^c = 1$,
  - géométrique de rapport ℓ^c si $\ell^c \in]0,1[$,
  - rapide si $\ell^c = 0$;
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ, et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{|u_n-\ell|^r}$ est bornée ;
- on rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0}$.

I.A – Des résultats généraux

I.A.1) Montrer que l'ensemble E^c est non vide.

I.A.2) L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

I.A.3) Montrer que E^c est strictement inclus dans E.

I.A.4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E^c. Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0,1]$.

I.B – Exemples de calcul de vitesse de convergence

I.B.1) Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\dfrac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

I.B.2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

b) Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

BY-NC-SA

I.B.3) On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et appartient à E.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite (I_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.B.4) Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.C – Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

I.C.1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r, où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

I.C.2)

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est un élément de E. On note s la limite de cette suite.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant s - S_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

c) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

d) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r.

I.C.3) On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ.

a) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire alors elle appartient à E^c. Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

c) Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

d) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in \{1, 2, ..., r-1\}$, $f^{(k)}(\ell) = 0$.

II Autour de la loi faible des grands nombres

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont réelles discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire X d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X.

Soit α un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment exponentiel d'ordre α si la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

On pourra utiliser les deux propriétés suivantes sans avoir besoin de les démontrer. Soit n un entier strictement positif et soit $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors :

- si f est une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_1), ..., f(X_n)$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes ;
- si les n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont d'espérance finie, alors la variable aléatoire $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$.

BY-NC-SA

II.A – Préliminaires

Les trois questions de ces préliminaires sont indépendantes.
On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique, que l'on note cosh, est définie, pour tout réel t, par

$$\cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

II.A.1)

a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2/2}$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.

II.A.2) Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$. Montrer que $\forall \lambda \in [0,1]$, $\mathrm{e}^{\lambda a + (1-\lambda)b} \leqslant \lambda \mathrm{e}^a + (1-\lambda)\mathrm{e}^b$.

II.A.3) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et admettant une limite finie en $+\infty$.

a) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = t\mathrm{e}^{\gamma t}$ où γ est un réel strictement négatif, est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

II.B – Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

II.B.1) Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α. Montrer que la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\alpha X}$ admet une espérance finie.

II.B.2) Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha X})$ dans ce cas.

a) X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

b) Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, où p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

c) Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p, où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

II.C – Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$

Dans les sous-parties II.C et II.D, on considère ε un réel strictement positif, X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{x_p,\, p \in \mathbb{N}\}$, et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X.

Pour tout entier n strictement positif, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Dans cette sous-partie II.C, on suppose que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α où α est un réel strictement positif.

II.C.1)

a) Montrer que la variable X admet une espérance finie. On notera m l'espérance de X.

b) Appliquer, avec les justifications utiles, la loi faible des grands nombres pour la suite de variables aléatoires (X_k).

II.C.2)

a) Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$ est définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$.

b) Montrer que la fonction Ψ est dérivable sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ et déterminer sa fonction dérivée.

II.C.3) On considère l'application f_ε définie par

$$f_\varepsilon : \begin{cases} [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-(m+\varepsilon)t}\Psi(t) \end{cases}$$

a) Donner les valeurs de $f_\varepsilon(0)$ et $f'_\varepsilon(0)$.

b) En déduire qu'il existe un réel t_0 appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $0 < f_\varepsilon(t_0) < 1$.

II.C.4) Montrer que pour tout réel t appartenant au segment $[-\alpha, \alpha]$ et tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire réelle e^{tS_n} admet une espérance égale à $\left(\Psi(t)\right)^n$.

BY-NC-SA

II.C.5)

a) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0, \alpha]$ et soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{tS_n} \geqslant \left(\mathrm{e}^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right)$, puis que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \leqslant \left(f_\varepsilon(t)\right)^n$.

b) En déduire qu'il existe un réel r appartenant à l'intervalle $]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \leqslant r^n$.

II.C.6) Montrer que la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$ est majorée par une suite de limite nulle et dont la vitesse de convergence est géométrique. Comparer ce résultat à la majoration obtenue avec la loi faible des grands nombres.

II.D – Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$

Dans cette sous-partie II.D, on suppose qu'il existe un réel c strictement positif tel que la variable aléatoire réelle discrète X vérifie $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leqslant c$.

II.D.1) Montrer que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif.

Les fonctions Ψ et f_ε des questions II.C.2 et II.C.3 sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$.

II.D.2) On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \frac{1}{2} - \frac{X}{2c}$.

a) Vérifier que $X = -cY + (1-Y)c$.

b) Montrer que $\mathrm{e}^X \leqslant Y\mathrm{e}^{-c} + (1-Y)\mathrm{e}^c$.

II.D.3)

a) Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^X) \leqslant \cosh(c)$.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\Psi(t) \leqslant \cosh(ct)$.

II.D.4) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_\varepsilon(t) \leqslant \exp(-t\varepsilon + \frac{1}{2}c^2t^2)$.

II.D.5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2})$.

II.D.6) Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0,1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n,p).

À l'aide de la question précédente, majorer $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$ en fonction de n, p et ε.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI 2017

4 heures Calculatrices autorisées

Objectif du problème

Ce problème aborde la question de la mesure quantitative de l'information.

La première partie étudie quelques propriétés de la fonction logarithme népérien utiles pour les autres parties du problème.

La deuxième partie vise à construire les fonctions permettant de modéliser l'information contenue dans les événements de probabilité non nulle d'un espace probabilisé. **L'information contenue dans un tel événement correspond intuitivement à l'effet de surprise provoqué par la réalisation de cet événement.**

La troisième partie aborde la notion d'entropie d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières.

La quatrième partie aborde l'entropie d'un couple de variables aléatoires et la notion d'entropie conditionnelle.

L'exemple traité dans la cinquième partie établit le lien entre la quantité d'information contenue dans un message aléatoire et le nombre minimal de questions que le récepteur du message doit poser à son émetteur pour pouvoir identifier sans ambiguïté l'une des réalisations de ce message.

Notations

– Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

– Pour $n \in \mathbb{N}$, $[\![0, n]\!]$ désigne les entiers naturels compris entre 0 et n.

I Questions préliminaires

I.A – Représenter graphiquement la fonction logarithme népérien.

I.B – Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \leqslant x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

I.C – Donner une interprétation graphique de ces deux résultats.

I.D – Montrer que la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1]$, $g(x) = x \ln(x)$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1]$. Représenter graphiquement la fonction g.

II Mathématisation de l'effet de surprise

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On convient de modéliser la quantité d'information contenue dans les événements de probabilité non nulle par une fonction S définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ tel que } P(A) \neq 0 \qquad S(A) = f(P(A))$$

où $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ vérifie les contraintes suivantes :

i. $f(1) = 0$

ii. f est décroissante sur $]0, 1]$

iii. $\forall (p, q) \in]0, 1]^2 \quad f(pq) = f(p) + f(q)$

iv. f est continue sur $]0, 1]$

II.A – Quelle est la quantité d'information de l'événement certain ? Interpréter en terme d'effet de surprise.

II.B – Que peut-on dire de la quantité d'information contenue dans l'événement $A \cap B$ lorsque A et B sont indépendants ? Interpréter en terme d'effet de surprise.

II.C – Donner un exemple de fonction f vérifiant les quatre contraintes i, ii, iii et iv.

II.D – On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant ces quatre contraintes.

Soit f une telle fonction.

II.D.1) Soit $p \in]0, 1]$. Établir, à l'aide d'un changement de variable, l'égalité

$$\frac{1}{p} \int_{p/2}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} f(p) + \int_{1/2}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u$$

II.D.2) En déduire que f est dérivable sur $]0, 1]$.

II.D.3) Dans cette question, on fixe $p \in]0, 1]$. En dérivant par rapport à q l'égalité iii, démontrer l'existence d'un réel a indépendant de p tel que $f'(p) = a/p$. Préciser la valeur de a.

BY-NC-SA

II.D.4) L'égalité $f'(p) = a/p$ étant vraie quel que soit p dans $]0,1]$, déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant les quatre contraintes i, ii, iii et iv.

II.D.5) Montrer que parmi ces fonctions, il en existe une et une seule vérifiant en plus l'égalité $f(1/\mathrm{e}) = 1$.

Cette fonction, notée h dans la suite du problème, correspond au choix d'une unité particulière (le logon) pour mesurer la quantité d'information.

Que vaut $\lim\limits_{p\to 0^+} h(p)$? Interpréter ce résultat.

II.D.6) On réalise l'expérience aléatoire consistant à effectuer deux lancers successifs d'un dé équilibré à six faces. On considère les évènements suivants

- E : « le numéro sorti lors du premier lancer est pair » ;
- M : « le maximum des deux numéros sortis est égal à 4 » ;
- N : « la somme des deux numéros sortis est égale à 7 ».

Ordonner les quantités d'information contenues dans chacun de ces trois événements. Interpréter en terme d'effet de surprise.

III Entropie d'une variable aléatoire

III.A – Dans cette sous-partie, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même univers fini Ω et prennent leurs valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

Si X est une telle variable, on note $p_k = P(X = k)$. On définit l'entropie de X par

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} p_k \ln(p_k)$$

en convenant que $p_k \ln(p_k)$ vaut 0 lorsque $p_k = 0$.

III.A.1) Interpréter $H(X)$ comme une espérance, puis en terme de quantité d'information.

III.A.2) Montrer que $H(X) \geqslant 0$ et que $H(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire certaine, c'est-à-dire

$$\exists i \in [\![0,n]\!] \qquad \text{tel que} \qquad p_i = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \neq i, \quad p_j = 0$$

III.A.3)

a) X_0 est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$. Calculer $H(X_0)$.

b) En appliquant l'inégalité de la question I.B à un nombre réel x bien choisi, démontrer que

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad -p_k \ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} - p_k$$

c) En déduire que $H(X) \leqslant H(X_0)$ avec égalité si et seulement si X suit la même loi que X_0 (pour le cas d'égalité on pourra utiliser le cas d'égalité de la question I.B). Interpréter ce résultat en terme de quantité moyenne d'information.

III.B – Dans cette sous-partie, on s'intéresse à des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé (Ω, P) et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Si X est une telle variable pour laquelle $P(X = k)$ est noté p_k, on dit qu'elle est d'entropie finie si la série $\sum p_k \ln(p_k)$ est absolument convergente et on définit alors son entropie par

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(p_k)$$

en convenant à nouveau que $p_k \ln(p_k)$ vaut 0 lorsque $p_k = 0$.

III.B.1) Pour $p \in]0,1[$, X_1 est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

Rappeler les valeurs de $P(X_1 = k)$ et de l'espérance de X_1 (aucune démonstration n'est demandée).

Démontrer que X_1 est d'entropie finie et que $H(X_1) = -\dfrac{1-p}{p}\ln(1-p) - \ln(p)$.

III.B.2) Dans cette question et la suivante, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ d'espérance finie.

On note $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k p_k$. On se propose de démontrer que X est d'entropie finie.

a) Quelle est la limite de p_k lorsque k tend vers $+\infty$?

b) En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt{p_k}\ln(p_k) = 0$, puis qu'il existe un entier k_0 tel que $\forall k \geqslant k_0 \quad 0 \leqslant -\sqrt{p_k}\ln(p_k) \leqslant 1$.

BY-NC-SA

c) Soit $k \geqslant k_0$. Montrer que

– si $p_k \leqslant \dfrac{1}{k^3}$, alors $0 \leqslant -p_k \ln(p_k) \leqslant \dfrac{1}{k^{3/2}}$;

– si $p_k \geqslant \dfrac{1}{k^3}$, alors $0 \leqslant -p_k \ln(p_k) \leqslant 3p_k \ln(k)$.

d) Soit $k \geqslant 1$. Justifier que $\ln(k) \leqslant k$, puis que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k^{3/2}} + 3p_k \ln(k)\right)$ converge.

e) Conclure.

III.B.3) Dans cette question, on suppose en plus que $E(X) \leqslant 1/p$, p étant un réel de l'intervalle $]0,1[$. On veut montrer que $H(X) \leqslant H(X_1)$ (entropie d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p dont la valeur a été calculée à la question III.B.1).

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_k = P(X = k)$ et $q_k = P(X_1 = k)$.

a) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p_k$ converge et exprimer sa somme en fonction de $E(X)$.

b) Justifier la convergence de la série $\sum p_k \ln(q_k)$ et démontrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(q_k) = \ln(p) + (E(X) - 1)\ln(1-p)$$

c) Démontrer que

$$-H(X_1) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(q_k)$$

d) En déduire que

$$H(X) - H(X_1) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$$

puis que

$$H(X) \leqslant H(X_1)$$

On pourra utiliser l'inégalité démontrée dans la question I.B.

Interpréter ce résultat en terme de quantité moyenne d'information.

IV Quatrième partie

Dans cette partie, m et n sont des entiers naturels non nuls. (X,Y) et (X',Y') sont deux couples de variables aléatoires discrètes. X et X' sont à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, Y et Y' sont à valeurs dans $[\![0,m]\!]$. Pour $i \in [\![0,n]\!]$ et $j \in [\![0,m]\!]$, on note $p_i = P(X=i)$, $q_j = P(Y=j)$, $\lambda_{ij} = P(X=i;Y=j)$ et $\lambda'_{ij} = P(X'=i;Y'=j)$.

On suppose que, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]$, $\lambda_{ij} \neq 0$ et $\lambda'_{ij} \neq 0$.

Notations

On définit l'entropie du couple (X,Y) par

$$H(X,Y) = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda_{ij}\ln(\lambda_{ij})$$

On définit l'information entre les couples (X,Y) et (X',Y') par

$$K(X,Y,X',Y') = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda_{ij}\ln\left(\frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right)$$

IV.A – Propriétés de l'information entre deux couples

IV.A.1) Rappeler les valeurs de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}$ et de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda'_{ij}$ et en déduire que

$$K(X,Y,X',Y') = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \lambda_{ij}\left(\ln\left(\frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}}\right) - \frac{\lambda'_{ij}}{\lambda_{ij}} + 1\right)$$

BY-NC-SA

IV.A.2) À l'aide de l'inégalité de la question I.B, établir que $K(X,Y,X',Y') \geqslant 0$, et que l'égalité a lieu si et seulement si les deux couples (X,Y) et (X',Y') ont la même loi conjointe.

IV.A.3) On suppose que les deux variables X' et Y' sont indépendantes, que X' suit la même loi que X et que Y' suit la même loi que Y.

Démontrer que $K(X,Y,X',Y') = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$. Déduire de ce qui précède que

$$H(X,Y) \leqslant H(X) + H(Y) \tag{IV.1}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.

Remarque — L'inégalité (IV.1) a été obtenue en supposant, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]$, $\lambda_{ij} \neq 0$ et $\lambda'_{ij} \neq 0$. On admet qu'elle reste vraie même en dehors de cette condition

IV.B – Entropie conditionnelle

On définit l'entropie conditionnelle de Y sachant X par $H_X(Y) = H(X,Y) - H(X)$.

Elle mesure l'incertitude restant sur la valeur de Y lorsque la valeur de X est connue.

IV.B.1) Montrer que $H_X(Y) \leqslant H(Y)$. Interpréter cette inégalité.

IV.B.2) On considère $m+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_m$ compris entre 0 et 1.

a) Dans cette question, on suppose $(a_0, a_1, ..., a_m) \in]0,1]^{m+1}$.

Démontrer que, pour tout $j \in [\![0,m]\!]$, $\ln(a_j) \leqslant \ln(a_0 + a_1 + \cdots + a_m)$.

En déduire l'inégalité

$$\sum_{j=0}^{m} g(a_j) \leqslant g\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\right) \tag{IV.2}$$

La fonction g a été définie dans la partie I.

b) L'inégalité (IV.2) reste-t-elle vraie si $(a_0, a_1, ..., a_m) \in [0,1]^{m+1}$?

c) Montrer que l'inégalité (IV.2) est une égalité si et seulement s'il existe au plus un indice $j \in [\![0,m]\!]$ pour lequel $a_j \neq 0$.

IV.B.3) Montrer que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\sum_{j=0}^{m} g(\lambda_{ij}) \leqslant g(p_i)$. En déduire que $H_X(Y) \geqslant 0$.

V Une application

Un jeu oppose deux joueurs A et B. Une urne contient 2016 boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à 2015. Le joueur A tire une boule au hasard dans l'urne. On note Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée par le joueur A. Le joueur B pose alors au joueur A une série de N questions amenant la réponse « oui » ou « non » lui permettant de déterminer sans ambiguïté la valeur prise par Y. Le but de cette partie est de trouver la valeur minimale de N si B procède par dichotomies successives.

V.A – Déterminer l'entropie de Y.

V.B – La première question posée par B est « Y est-il compris entre 1008 et 2015 ? » La réponse fournie par A lui permet de positionner Y par rapport 1008. Si la réponse de A est « oui », B posera $X_1 = 1$ et cherchera ensuite à positionner Y par rapport à 1512. Si la réponse à la première question est « non », B posera $X_1 = 0$ et cherchera à positionner Y par rapport à 504. Il continue selon le même procédé.

Expliquer pourquoi le joueur B finira par trouver la valeur de Y. Au bout de combien de questions ?

V.C – On se propose de donner une interprétation de ce résultat en terme d'entropie. Les variables aléatoires $(X_1, X_2, ..., X_N)$ sont renseignées par les réponses données par A à la première, la deuxième, ..., la N-ième question.

On pose $X = \sum_{i=1}^{N} X_{N+1-i} 2^{i-1}$. On admet que X est une variable aléatoire.

Montrer qu'elle prend ses valeurs dans $[\![0, 2^N - 1]\!]$. On ne cherchera pas la loi de X.

V.D – Démontrer que $H(X) \leqslant N\ln(2)$.

On pourra utiliser l'inégalité vue à la question III.A.3.

V.E – Expliquer en langage courant pourquoi $H_Y(X) = 0$. En déduire que $H(X,Y) = H(Y)$.

V.F – Montrer que $H_X(Y) \geqslant \ln(2016) - N\ln(2)$.

V.G – En combien de questions le joueur B est-il certain de pouvoir trouver à coup sûr la valeur de Y ? Comparer au résultat de la question V.B.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI 2017

4 heures Calculatrices autorisées

Ce sujet comporte deux parties indépendantes.

I Étude des torseurs

Les torseurs sont des outils mathématiques utilisés en mécanique du solide indéformable.

On considère un solide indéformable Σ. Si A est un point de ce solide et si $\vec{V}(A)_{\mathcal{R}}$ désigne la vitesse du point $A \in \Sigma$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, il est bien connu que, pour tous points A et B de Σ, on a

$$\vec{V}(B)_{\mathcal{R}} = \vec{V}(A)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

où $\vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$ est un vecteur (un pseudo-vecteur en réalité) appelé *vecteur instantané de rotation* du solide Σ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

L'application $A \mapsto \vec{V}(A)_{\mathcal{R}}$ est appelé *torseur cinématique*.

Cette partie se propose de dégager la théorie liée aux torseurs.

Notations

- $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace géométrique orienté usuel de dimension 3 et on considère O un point fixé de $\mathcal{E}$.
- On note $\vec{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ et on considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.
- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

On appelle *torseur* toute application $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$ pour laquelle il existe un vecteur $\vec{r}$ tel que que la relation $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AB}$ est vérifiée pour tous points A et B de $\mathcal{E}$.

I.A – L'espace $\mathcal{T}$ des torseurs

I.A.1) Soit $\vec{r}$ un vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$. Montrer que l'application $\mathcal{M} : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ est un torseur.

I.A.2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des torseurs est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}})$ des applications de $\mathcal{E}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$.

I.A.3)

a) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Rappeler, sans démonstration, une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

b) Soit $\mathcal{M}$ un torseur. Montrer que le vecteur $\vec{r}$ de la définition est unique.

Il s'appelle la *résultante* du torseur $\mathcal{M}$. On admet que l'application $\begin{cases} \mathcal{T} \to \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \vec{r} \end{cases}$ est linéaire.

I.A.4) Vérifier qu'une application constante de $\mathcal{E}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$ est un torseur et en donner la résultante. Un tel torseur s'appelle un *couple*. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$ et que l'application $\begin{cases} \mathcal{C} \to \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}(O) \end{cases}$ est un isomorphisme.

En déduire la dimension de $\mathcal{C}$.

I.A.5) On appelle *glisseur* tout torseur qui s'annule en au moins un point de $\mathcal{E}$.

a) Soit O_1 un point de $\mathcal{E}$ distinct de O et $\vec{r}$ un vecteur non nul et non colinéaire à $\overrightarrow{OO_1}$. On note $g_0 : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ et $g_1 : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{O_1A}$.

Montrer que g_0 et g_1 sont des glisseurs, mais que $g_0 - g_1$ n'en est pas un. Expliquer pourquoi l'ensemble $\mathcal{G}$ des glisseurs n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$.

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}_O$ des glisseurs s'annulant en O est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$ et que l'application $\begin{cases} \mathcal{G}_O \to \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \vec{r} \end{cases}$, où $\vec{r}$ est la résultante de $\mathcal{M}$, est un isomorphisme.

En déduire la dimension de $\mathcal{G}_O$.

c) Démontrer que $\mathcal{T} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{G}_O$. Quelle est la dimension de $\mathcal{T}$?

BY-NC-SA

I.B – Équiprojectivité

I.B.1) Démontrer que, si $\mathcal{M}$ est un torseur alors $\mathcal{M}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{M}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \mathcal{M}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Cette propriété est connue sous le nom de propriété d'équiprojectivité.

On se propose d'étudier la réciproque.

I.B.2) Question préparatoire

a) Rappeler la définition d'une matrice antisymétrique.

b) L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on identifie tout vecteur avec la matrice colonne 3×1 contenant ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{r}$, dont on donnera les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, tel que

$$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{E}}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{u}$$

I.B.3) Soit $f : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{E}}$ une application telle que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot f(\vec{v})$.

a) Montrer que f est linéaire.

> Pour λ et μ deux nombres réels, on pourra considérer le vecteur $\overrightarrow{w} = f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda f(\vec{u}) - \mu f(\vec{v})$ et montrer qu'il est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{E}$.

b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice antisymétrique.

c) Démontrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{r} \in \vec{\mathcal{E}}$ tel que pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, $f(\vec{u}) = \vec{r} \wedge \vec{u}$.

I.B.4) Soit $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$ une application vérifiant la propriété d'équiprojectivité. Montrer alors que $\mathcal{M}$ est un torseur.

> On pourra considérer l'application $f : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{E}}$ définie pour tout vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ par $f(\vec{u}) = \mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O)$ où O' désigne le translaté du point O par le vecteur $\vec{u}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.

II Produits infinis

II.A – Définitions et premières propriétés

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour $N \geqslant n_0$, on pose

$$P_N = u_{n_0}\, u_{n_0+1} \cdots u_N = \prod_{n=n_0}^{N} u_n$$

La suite $(P_N)_{N \geqslant n_0}$ est appelée *suite des produits partiels* associée à $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

On dit que *le produit infini* $\displaystyle\prod_{n \geqslant n_0} u_n$ *converge* si la suite $(P_N)_{N \geqslant n_0}$ admet une limite finie **non nulle**. Cette limite est notée $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et est appelée *valeur* du produit infini. Si $(P_N)_{N \geqslant n_0}$ est divergente ou de limite nulle, on dit que *le produit infini* $\displaystyle\prod_{n \geqslant n_0} u_n$ *diverge*.

II.A.1) Produits téléscopiques

a) Montrer que $\displaystyle\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N}$.

En déduire la divergence du produit infini $\displaystyle\prod_{n \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

b) Justifier que $\displaystyle\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n}\right) \left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n}\right)$.

En déduire la convergence et la valeur du produit infini $\displaystyle\prod_{n \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

II.A.2) Conditions nécessaires de convergence

a) Montrer que si $\displaystyle\prod_{n \geqslant n_0} u_n$ converge alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$.

BY-NC-SA

b) Montrer, en considérant le quotient $\dfrac{P_{N+1}}{P_N}$ que si $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

c) La condition $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ est-elle suffisante pour que le produit infini $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ converge ?

II.A.3) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels strictement positifs.

a) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant n_0} \ln(u_n)$ converge. Préciser alors la relation entre $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n)$.

b) Montrer que si, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < u_n < 1$ alors le produit infini $\prod_{n\geqslant n_0} (1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.

c) Soit q un nombre réel appartenant à $[0,1[$ quelle est la nature du produit infini $\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)$?

II.B – Développement en produit infini de $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

On se propose dans cette sous-partie de démontrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

II.B.1) Expliquer pourquoi il suffit de démontrer cette égalité pour tout $x \in]0,1[$.

Dans toute la suite de cette sous-partie II.B, x est un réel fixé appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

II.B.2) Prouver la convergence du produit infini $\prod_{n\geqslant 1} \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

II.B.3)

a) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

b) On définit la fonction f, 2π-périodique, par $\forall t \in]-\pi,\pi]$, $f(t) = \cos(xt)$.

Représenter graphiquement la fonction f dans le cas particulier où $x = 1/2$.

Dans le cas général où $x \in]-1,1[$, démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux.

Calculer les coefficients de Fourier de f.

c) En déduire, pour tout $t \in [-\pi,\pi]$, l'égalité

$$\cos(xt) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2-n^2}\cos(nt)\right)$$

d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\sin t \neq 0$ on pose $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$. Montrer que,

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

II.B.4)

a) À l'aide d'un développement limité en 0 de $u\cos u - \sin u$, calculer $\lim_{t\to 0}\left(\pi\cot(\pi t) - \dfrac{1}{t}\right)$. En déduire la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^x \left(\pi\cot(\pi t) - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$.

b) Prouver l'existence et calculer la limite de $\ln\left(\dfrac{\sin(\pi\epsilon)}{\pi\epsilon}\right)$ quand ϵ tend vers 0.

c) En déduire que $I = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

d) Expliquer pourquoi la quantité $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2-t^2}$ est définie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$.

e) Justifier que $\lim_{N\to+\infty} \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1} = 0$.

BY-NC-SA

f) Montrer que

$$\forall t \in [0,1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2-t^2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

g) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \sum_{n=1}^{N} \int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

h) En déduire le développement en produit infini de $\sin(\pi x)$.

II.B.5) Deux applications

a)

i. Justifier la convergence du produit infini $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.

ii. À l'aide du développement en produit infini de $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ appliqué à un réel x bien choisi, donner la valeur du produit infini $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.

b) On introduit la *fonction ζ de Riemann* donnée par $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

i. Prouver que ζ est définie sur $]1,+\infty[$.

ii. Écrire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$.

iii. On trouve dans les travaux d'Euler un « calcul formel » permettant d'obtenir la valeur de $\zeta(2)$. Il identifie les termes de degré 3 du développement limité de $x \mapsto \sin(\pi x)$ et de son développement en produit infini. Conjecturer la valeur de $\zeta(2)$ en utilisant cette méthode.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2018

Aplatissement aléatoire d'un ensemble de points en grande dimension

Notations

— Dans tout le problème N, k et d désignent des entiers supérieurs ou égaux à deux.

— Pour tous entiers naturels non nuls p et q, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels.

— On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.

— Pour tous entiers naturels p et q, avec $p \leqslant q$, la notation $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leqslant i \leqslant q\}$.

— Dans tout le problème on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω.

— Pour tout événement A de probabilité non nulle, et pour tout événement B, on note $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B \mid A)$ la probabilité conditionnelle de B sachant A.

— Étant donnée une variable aléatoire Z à valeurs réelles, on note $\mathbb{E}(Z)$ son espérance.

— On dit qu'une variable aléatoire Z est une variable de Rademacher lorsque $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$$

— De façon générale, si E est un espace euclidien, son produit scalaire et sa norme seront respectivement notés $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$. Ces notations seront utilisées notamment pour $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$, munis de leurs structures euclidiennes canoniques.

Problématique

On s'intéresse à la question suivante : étant donnés N points dans un espace euclidien de grande dimension, est-il possible de les envoyer linéairement dans un espace de petite dimension sans trop modifier les distances entre ces points ?

Pour préciser cette question, considérons N vecteurs distincts $v_1, ..., v_N$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est une ε-isométrie pour $v_1, ..., v_N$ lorsque :

$$\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad (1 - \varepsilon)\|v_i - v_j\| \leqslant \|f(v_i) - f(v_j)\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|v_i - v_j\|$$

La question peut se reformuler ainsi :

Objectif

Pour quelles valeurs de k existe-t-il $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ qui soit une ε-isométrie pour $v_1, ..., v_N$?

On se propose d'établir le théorème suivant, démontré par William B. Johnson et Joram Lindenstrauss en 1984 :

> Il existe une constante absolue c strictement positive telle que :
>
> quels que soient N et d, entier naturels supérieurs ou égaux à 2 et quels que soient $v_1, \dots, v_N$ distincts dans $\mathbb{R}^d$, il suffit que
>
> $$k \geqslant c\frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$$
>
> pour qu'il existe une ε-isométrie $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ pour $v_1, \dots, v_N$.

Les seules méthodes connues à ce jour pour démontrer ce théorème sont de nature probabiliste.

Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires portant sur la convexité et les probabilités. La partie II est consacrée à la démonstration d'une inégalité de concentration, qui est utilisée dans la partie III où le théorème de Johnson-Lindenstrauss est démontré.

BY-NC-SA

I Préliminaires

I.A – Projection sur un convexe fermé

Soit E un espace euclidien.

Q 1. Soient a et b dans E. Montrer la relation suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)$$

Q 2. En déduire que si u, v et v' dans E vérifient $v \neq v'$ et $\|u-v\| = \|u-v'\|$ alors $\|u - \dfrac{v+v'}{2}\| < \|u-v\|$.

Q 3. Soient F un fermé non vide de E et u dans E. Montrer qu'il existe v dans F tel que

$$\forall w \in F, \qquad \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$$

Q 4. En déduire que si C est un convexe fermé non vide de E et u est un vecteur de E alors il existe un unique v dans C tel que

$$\forall w \in F, \qquad \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$$

On dira que v est le projeté de u sur C et on notera $d(u,C) = \|u-v\|$.

I.B – Inégalité de Hölder pour l'espérance

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Q 5. Montrer que, pour tous réels positifs a et b,

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

On pourra utiliser la concavité du logarithme.

Q 6. En déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors

$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}\ \mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}$$

On pourra d'abord montrer ce résutat lorsque $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$.

I.C – Espérance conditionnelle

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles.

Pour tout événement $A \subset \Omega$ de probabilité non nulle, l'espérance conditionnelle de X sachant A, notée $\mathbb{E}(X \mid A)$, est par définition le réel

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_A(X = x) \cdot x$$

En d'autres termes, $\mathbb{E}(X \mid A)$ est l'espérance de X dans l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$.

Les propriétés usuelles de linéarité et de positivité de l'espérance, qu'on ne demande pas de redémontrer, sont ainsi valables pour l'espérance conditionnelle sachant A.

Q 7. Soit $(A_1, ..., A_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{E}(X \mid A_i)$$

I.D – Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que, pour tout réel positif t,

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant a \exp\left(-bt^2\right)$$

Q 8. Montrer que

$$\mathbb{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t$$

On pourra noter $X^2(\Omega) = \{y_1, ..., y_n\}$ avec $0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_n$.

BY-NC-SA

Q 9. Montrer que le moment d'ordre deux de X est inférieur ou égal à $\dfrac{a}{b}$.

Soit δ un réel tel que $0 \leqslant |\delta| \leqslant \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Q 10. Justifier que, pour tout réel t,

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|)$$

Q 11. Montrer que, pour tout réel t,

$$-b(t-|\delta|)^2 \leqslant a - \frac{1}{2}bt^2$$

Q 12. En déduire que pour tout réel t tel que $t \geqslant |\delta|$ on a

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant a\,\exp(a)\,\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right)$$

Q 13. Justifier que l'inégalité précédente reste valable si $0 \leqslant t < |\delta|$.

II L'inégalité de concentration de Talagrand

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni d'une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$.

Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n : \Omega \to \{-1, 1\}$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes dans leur ensemble.

On pose $X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$.

L'objectif de cette partie est de montrer, pour tout convexe fermé non vide C de E,

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1 \tag{II.1}$$

II.A – Étude de deux cas particuliers

Q 14. Traiter le cas où C est un convexe fermé de E ne rencontrant pas $X(\Omega)$.

On suppose, dans la suite de cette sous-partie II.A uniquement, que C est un convexe fermé de E qui rencontre $X(\Omega)$ en un seul vecteur u.

Q 15. Montrer que $\dfrac{1}{4}d(X,u)^2$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q 16. En déduire l'espérance de $\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X,u)^2\right)$ et montrer qu'elle est inférieure ou égale à 2^n.

Q 17. Justifier que $d(X,C) \leqslant d(X,u)$ et en déduire l'inégalité (II.1) dans ce cas.

II.B – Initialisation

On suppose désormais que C est un convexe fermé de E tel que $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments. Quitte à permuter les vecteurs de la base, on peut supposer que ces deux vecteurs diffèrent par leur dernière coordonnée.

On se propose de démontrer l'inégalité (II.1) par récurrence sur la dimension n de E.

Q 18. Traiter le cas $n = 1$.

II.C – Propriétés de C_{+1} et C_{-1}

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On suppose à présent que (II.1) est vérifiée au rang $n-1$.

On note $E' = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$ et π la projection orthogonale sur E'

$$\pi : \left| \begin{array}{c} E \to E' \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \end{array} \right.$$

On pose $X' = \pi \circ X = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$. C'est une variable aléatoire à valeurs dans E'.

Pour t dans $\{-1, 1\}$ on note

— H_t l'hyperplan affine $E' + te_n$;

— $C_t = \pi(C \cap H_t)$.

Q 19. Montrer, pour $x' \in E'$ et $t \in \{-1, 1\}$, que $x' \in C_t \iff x' + te_n \in C$.

Q 20. Montrer que C_{+1} et C_{-1} sont des convexes fermés non vides de E'.

BY-NC-SA

Pour t dans $\{-1,1\}$, on note Y_t le projeté de X' sur le convexe fermé non vide C_t. C'est une variable aléatoire à valeurs dans E'.

Q 21. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \in C) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{-1})$$

II.D – Une inégalité cruciale

Soit λ un réel tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Q 22. Montrer que

$$d(X,C) \leqslant \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|$$

Q 23. En déduire que

$$d(X,C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2$$

puis que

$$d(X,C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

Ainsi, on a montré l'inégalité

$$d(X,C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2$$

II.E – Espérances conditionnelles

On note

$$p_+ = \mathbb{P}(X' \in C_{+1}) \qquad \text{et} \qquad p_- = \mathbb{P}(X' \in C_{-1})$$

On va supposer, sans perte de généralité, que $p_+ \geqslant p_-$.

Q 24. Montrer que $p_- > 0$.

Q 25. Montrer que pour tout λ dans $[0,1]$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n = -1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}\right)$$

Q 26. En déduire que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n = -1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{+1})^2\right)\right)\right)^{\lambda}$$

Q 27. À l'aide de l'hypothèse de récurrence, justifier que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n = 1\right) \leqslant \frac{1}{p_+}$$

Q 28. Déduire de ce qui précède que pour tout λ dans $[0,1]$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right)$$

II.F – Optimisation

Q 29. On pose $\lambda = 1 - \dfrac{p_-}{p_+}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right)$$

Q 30. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$

$$\frac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leqslant \ln(2+x) - \ln(2-x)$$

On pourra faire une étude de fonction.

BY-NC-SA

Q 31. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$

$$1+\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{4}{2-x}$$

Q 32. Terminer la démonstration de l'inégalité (II.1).

II.G – Inégalité de Talagrand

Q 33. En déduire l'inégalité de Talagrand :

> Pour tout C convexe fermé non vide de E et pour tout réel t strictement positif
>
> $$\mathbb{P}(X \in C)\cdot \mathbb{P}\Big(d(X,C) \geqslant t\Big) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

III Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

Dans cette partie on considère l'espace $E = \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall (A,B)\in E^2, \qquad \langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top \cdot B)$$

On notera $\|\cdot\|_F$ la norme euclidienne associée.

On rappelle que $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$ sont munis de leurs normes euclidiennes canoniques, notées indistinctement $\|\cdot\|$.

On identifie $\mathbb{R}^d$ à $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, de sorte qu'un vecteur quelconque $x = (x_1,...,x_d)$ de $\mathbb{R}^d$ peut être identifié à la matrice colonne $(x_1\ ...\ x_d)^\top$.

On fixe un vecteur $(u_1,...,u_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, identifié comme ci-dessus à la matrice colonne $(u_1...u_d)^\top$ de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$), et tel que $\|u\| = 1$. On définit l'application

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \|M\cdot u\| \end{array} \right.$$

Soit $X = (\varepsilon_{ij})_{1\leqslant i\leqslant k,\, 1\leqslant j\leqslant d}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, dont les coefficients ε_{ij} sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes dans leur ensemble.

III.A – Une inégalité de concentration

Q 34. Montrer que $C = \{M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mid g(M) \leqslant r\}$ est une partie convexe et fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

Q 35. Montrer que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

$$\|M\cdot u\| \leqslant \|M\|_F$$

Soient r et t deux réels, avec $t>0$.

Q 36. Montrer que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

$$d(M,C) < t \quad \Longrightarrow \quad g(M) < r+t$$

Q 37. En déduire que

$$\mathbb{P}\Big(g(X)\leqslant r\Big)\cdot \mathbb{P}\Big(g(X)\geqslant r+t\Big) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right)$$

III.B – Médianes

On dit qu'un réel m est une médiane de $g(X)$ lorsque

$$\mathbb{P}\Big(g(X)\geqslant m\Big) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\Big(g(X)\leqslant m\Big) \geqslant \frac{1}{2}$$

Q 38. Justifier que $g(X)$ admet au moins une médiane.

On pourra considérer la fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel t, $G(t) = \mathbb{P}(g(X)\leqslant t)$, et examiner l'ensemble $G^{-1}([1/2,1])$.

Q 39. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel strictement positif t

$$\mathbb{P}\Big(|g(X)-m|\geqslant t\Big) \leqslant 4\exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right)$$

où m est une médiane de $g(X)$.

BY-NC-SA

Q 40. En déduire que $\mathbb{E}\left(\left(g(X)-m\right)^2\right) \leqslant 32$.

Q 41. Montrer que $\mathbb{E}\left(g(X)^2\right) = k$, et en déduire que $\mathbb{E}(g(X)) \leqslant \sqrt{k}$.

Q 42. En déduire que $(\sqrt{k}-m)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(\left(g(X)-m\right)^2\right)$.

III.C – Un lemme-clé

Q 43. Montrer que, pour tout réel strictement positif t

$$\mathbb{P}\Big(|g(X)-\sqrt{k}| \geqslant t\Big) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)$$

On pose $A_k = \dfrac{X}{\sqrt{k}}$. Soient ε dans $]0,1[$ et δ dans $]0,1/2[$. On suppose que $k \geqslant 160\dfrac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$.

Q 44. Montrer que, pour tout vecteur unitaire u dans $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}\Big(\big|\|A_k\cdot u\|-1\big| > \varepsilon\Big) < \delta$$

III.D – Conclusion

On conserve les notations et les hypothèses précédentes. Soient $v_1, ..., v_N$ des vecteurs distincts dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ tel que $i<j$ on note E_{ij} l'événement

$$(1-\varepsilon)\|v_i-v_j\| \leqslant \|A_k\cdot v_i - A_k\cdot v_j\| \leqslant (1+\varepsilon)\|v_i-v_j\|$$

Q 45. Montrer que $\mathbb{P}(\overline{E_{ij}}) < \delta$, où $\overline{E_{ij}}$ désigne l'événement contraire de E_{ij}.

Q 46. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}\right) \geqslant 1-\dfrac{N(N-1)}{2}\delta$.

Q 47. En déduire le théorème de Johnson et Lindenstrauss.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2018

Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet

Ce problème étudie quelques propriétés des fonctions harmoniques ainsi que quelques exemples de telles fonctions (parties I et II). Dans la partie III, largement indépendante du reste du problème, on montre le principe du maximum faible pour le laplacien. Dans la partie IV, on établit un lien entre les fonctions harmoniques de deux variables et les fonctions développables en série entière, et on propose la résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$ dans la partie V.

Notations

— Dans ce préambule et dans les parties I et III, n désigne un entier strictement positif.

— On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

— Si U est une partie de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et ∂U sa frontière.

— Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a,R)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit

$$D(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\| < R\}$$

La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{D(a,R)}$.

— L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U, \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

— Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si

$$\forall x \in U \quad \Delta f(x) = 0$$

L'ensemble des fonctions harmoniques sur U est noté $\mathcal{H}(U)$.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

Q 1. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

Q 2. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.

Q 3. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.

Q 4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A – On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est-à-dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$.

On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = u(x)v(y)$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations

$$z'' + \lambda z = 0 \qquad \text{et} \qquad z'' - \lambda z = 0$$

Q 6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

BY-NC-SA

II.B – Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Q 7. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

Q 8. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Q 9. Exprimer également $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

Q 10. Montrer que f appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

Q 11. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est-à-dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

Q 12. Soient a, b, r_1 et r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \quad \text{si } \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \quad \text{si } \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}$$

II.C – Dans cette sous-partie II.C, on considère deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $u : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \qquad f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r)v(\theta)$$

La fonction f est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

Q 13. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π-périodique.

Q 14. Montrer que, si f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel λ tel que u soit solution de l'équation différentielle (II.1)

$$r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0 \tag{II.1}$$

et v soit solution de l'équation différentielle (II.2)

$$z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \tag{II.2}$$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Quelles sont les solutions 2π-périodiques de (II.2) ?

Q 16. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 17. En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles. Donner ces solutions.

Q 19. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On pourra considérer, en justifiant son existence, une fonction Z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $r > 0$, $z(r) = Z(\ln(r))$.

Q 20. Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?

BY-NC-SA

III Principe du maximum faible

Soit U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant, connu sous le nom de principe du maximum faible.

Si f est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U, alors

$$\forall x \in U \qquad f(x) \leqslant \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

où ∂U désigne la frontière de U.

III.A – Soit f une fonction continue sur $\overline{U}$.

Q 21. Montrer que f admet un maximum en un point $x_0 \in \overline{U}$.

On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que, pour tout $x \in U$, $\Delta f(x) > 0$.

Q 22. Montrer que $x_0 \in \partial U$ et en déduire que $\forall x \in U$, $f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)$.

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in U$, justifier qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$, et considérer la fonction φ définie, pour t réel, par $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$, où e_i désigne le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

III.B – Soit f une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$.

Q 23. Montrer que g_ε est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et telle que $\forall x \in U$, $\Delta g_\varepsilon(x) > 0$.

Q 24. En déduire que $\forall x \in U$, $f(x) \leqslant \sup_{y \in \partial U} f(y)$.

Q 25. Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques sur U. Montrer que si les fonctions f_1 et f_2 sont égales sur ∂U, alors f_1 et f_2 sont égales sur U.

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

On dit qu'une fonction f, définie sur $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs complexes, se développe en série entière sur $D(0, R)$ s'il existe une suite complexe (a_n) telle que

$$\forall (x, y) \in D(0, R), \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + \mathrm{i}y)^n$$

Dans toute cette partie, f désigne une fonction se développant en série entière sur $D(0, R)$.

IV.A –

Q 26. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0, R)$ et que ses dérivées partielles se développent en série entière sur $D(0, R)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

On note u et v les parties réelle et imaginaire de f, de sorte que, quel que soit $(x, y) \in D(0, R)$,

$$u(x, y) \in \mathbb{R}, \quad v(x, y) \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Q 27. Montrer que u et v sont des fonctions harmoniques sur $D(0, R)$.

IV.B – On admet le résultat suivant : une fonction h de $D(0, R)$ dans $\mathbb{C}$ se développe en série entière sur $D(0, R)$ si et seulement si h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0, R)$ et pour tout $(x, y) \in D(0, R)$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \mathrm{i}\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y)$.

Q 28. Montrer que si f ne s'annule pas sur $D(0, R)$ alors $1/f$ se développe en série entière sur $D(0, R)$.

Q 29. Montrer que la fonction uv est harmonique sur $D(0, R)$.

IV.C – Soit g une fonction de $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est harmonique.

Q 30. Montrer que la fonction h définie sur $D(0, R)$ par

$$h \,:\, (x, y) \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

se développe en série entière sur $D(0, R)$.

BY-NC-SA

Q 31. Montrer que si g appartient à $\mathcal{H}(D(0,R))$ alors il existe une fonction H se développant en série entière sur $D(0,R)$ telle que g est la partie réelle de H.

On pourra considérer une série entière primitive de la série entière associée à la fonction h de la question précédente.

IV.D –

Q 32. Montrer que pour tout $r \in [0,R[$, on a $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

Q 33. Montrer un résultat analogue pour les fonctions harmoniques.

Q 34. Montrer que $\forall r \in [0,R[,\ |f(0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|$.

Q 35. Montrer un résultat analogue pour les fonctions harmoniques.

Q 36. Montrer que si $|f|$ admet un maximum en 0, alors f est constante sur $D(0,R)$.

Q 37. Montrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.

On pourra procéder par l'absurde, supposer qu'il existe un polynôme ne s'annulant pas et considérer son inverse.

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On cherche à résoudre le problème de Dirichlet sur le disque unité ; autrement dit, il s'agit de déterminer, s'il y en a, la ou les fonctions f définies et continues sur $\overline{D(0,1)}$ (disque fermé), de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D(0,1)$, et telles que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } D(0,1) \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(\cos(t), \sin(t)) = h(t) \end{cases}$$

Pour cela, on pose, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t \qquad \text{où} \qquad \mathcal{P}(t,z) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\right) \quad \text{(Re désigne la partie réelle)}$$

Q 38. Montrer que la fonction $z \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}$ est développable en série entière pour $|z| < 1$ et calculer son développement en série entière. En déduire que la fonction $(x,y) \mapsto g(x+\mathrm{i}y)$ est une fonction harmonique sur $D(0,1)$.

Q 39. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t = 1$.

Q 40. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, $g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t$.

Q 41. Montrer que, pour tout $r \in [0,1[$ et tous réels t et θ,

$$\mathcal{P}(t, r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}$$

Q 42. Montrer que, pour tout $\delta \in]0,\pi[$ et tout réel φ, $\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[z\,\to\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}]{} 0$.

Q 43. En utilisant le théorème de Heine, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout nombre réel φ et tout nombre complexe z vérifiant $|z| < 1$,

$$|g(z) - h(\varphi)| \leqslant \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t + \varepsilon$$

Q 44. Montrer l'existence et l'unicité de la solution au problème de Dirichlet étudié dans cette partie.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

2018

4 heures Calculatrices autorisées

Autour des matrices de Toeplitz

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble $\{a, a+1, ..., b-1, b\}$. $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n. On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},\ M = T(t_{-n+1}, ..., t_0, ..., t_{n-2}, t_{n-1})\}$$

Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. On admettra qu'une telle matrice vérifie $N^n = 0$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ $(p \in \mathbb{N})$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice

$$P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_p M^p$$

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz — les matrices circulantes — en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité. Enfin, la partie III, indépendante des précédentes, aborde l'étude des matrices cycliques et les relie aux matrices de Toeplitz.

I Généralités et quelques exemples

I.A – Généralités

Q 1. Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

Q 2. Montrer que si deux matrices A et B commutent $(AB = BA)$ et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.B – Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

Q 3. Donner le polynôme caractéristique de A.

Q 4. Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Q 5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

Q 6. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

BY-NC-SA

I.C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0,...,0,t_{-1},t_0,t_1,0,...,0)$, i.e. une matrice de la forme

$$A_n(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & & (0)\\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b\\ (0) & & c & a\end{pmatrix}$$

où (a,b,c) sont des complexes.

On fixe (a,b,c) trois nombres complexes tels que $bc\neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a,b,c)$.

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a,b,c)$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

Q 7. Montrer que si l'on pose $x_0=0$ et $x_{n+1}=0$, alors $(x_1,...,x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0=0$, $x_{n+1}=0$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad bx_{k+2}+(a-\lambda)x_{k+1}+cx_k=0$$

Q 8. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2+(a-\lambda)x+c=0 \tag{I.1}$$

Q 9. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (I.1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

Q 10. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

Q 11. En utilisant l'équation (I.1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et r_1+r_2. En déduire qu'il existe un entier $\ell\in[\![1,n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2=bc$ tels que

$$\lambda=a+2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

Q 12. En déduire qu'il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0,n+1]\!]$, $x_k=2\mathrm{i}\alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

Q 13. Conclure que $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II Matrices circulantes

Une matrice *circulante* est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1},...,t_0,...,t_{n-2},t_{n-1})$, pour laquelle

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\quad t_k=t_{-n+k}$$

Elle est donc de la forme

$$T(t_1,t_2,...,t_0,t_1,...,t_{n-2},t_{n-1})=\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1}\\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2}\\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1\\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0\end{pmatrix}$$

On pose $M_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\0&&&\ddots&1\\1&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$ et $\omega_n=\mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

Q 14. Calculer $M_n^2,...,M_n^n$. Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n.

Q 15. Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n.

Q 16. On pose $\Phi_n=(\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1\leqslant p,q\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n$.

Q 17. Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $A=P(M_n)$.

Q 18. Réciproquement, si $P\in\mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.

BY-NC-SA

Q 19. Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.

Q 20. Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

III Étude des matrices cycliques

III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

Q 21. Montrer que si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i. il existe x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $(x_0, f_M(x_0), ..., f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}^n$;

ii. M est semblable à la matrice $C(a_0, ..., a_{n-1})$ définie par

$$C(a_0, ..., a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $(a_0, ..., a_{n-1})$ sont des nombres complexes.

On dit alors que f_M est un endomorphisme cyclique, que M est une matrice cyclique et que x_0 est un vecteur cyclique de f_M.

III.A.1) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que f_M est diagonalisable. On note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs associée à ces valeurs propres. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ où $(u_1, ..., u_n)$ sont n nombres complexes.

Q 22. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1, ..., u_n, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ pour que $(u, f_M(u), ..., f_M^{n-1}(u))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

Q 23. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

III.A.2) Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On s'intéresse aux éléments propres de la matrice $C(a_0, ..., a_{n-1})$.

Q 24. Soit λ un nombre complexe. En discutant dans $\mathbb{C}^n$ du système $C(a_0, ..., a_{n-1})X = \lambda X$, montrer que λ est une valeur propre de $C(a_0, ..., a_{n-1})$ si et seulement si λ est racine d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à préciser.

Q 25. Si λ est racine de ce polynôme, déterminer le sous-espace propre de $C(a_0, ..., a_{n-1})$ associé à la valeur propre λ et préciser sa dimension.

Q 26. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice cyclique soit diagonalisable.

III.A.3) Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient M une matrice cyclique et x_0 un vecteur cyclique de f_M. On cherche à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}(f_M) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid f_M \circ g = g \circ f_M\}$$

est l'ensemble des polynômes en f_M.

Q 27. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$.

Q 28. Soit $g \in \mathcal{C}(f_M)$. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $g = \alpha_0 Id_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \cdots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$.
On pourra utiliser la base $(x_0, f_M(x_0), ..., f_M^{n-1}(x_0))$ et exprimer $g(x_0)$ dans cette base.

Q 29. Conclure.

III.A.4) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q 30. Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés. Est-elle diagonalisable ?

Q 31. La matrice N est-elle cyclique ?

Q 32. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

BY-NC-SA

III.B – Quelques résultats de calcul matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans toute la suite du problème, les matrices considérées sont à coefficients réels.

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice d'ordre n et k est un entier dans $[\![-n+1, n-1]\!]$, on dit que le coefficient a_{ij} de A est un coefficient diagonal d'ordre k si $j - i = k$.

On note $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice définie par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j-i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Tous les coefficients de cette matrice sont nuls sauf ses coefficients diagonaux d'ordre k qui sont égaux aux coefficients diagonaux d'ordre k de A.

Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

On note D_k la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux d'ordre k qui valent 1. Pour tout entier relatif k, on définit l'espace vectoriel Δ_k par

$$\Delta_k = \left\{M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{ij} = 0 \text{ si } j - i \neq k\right\} \qquad \text{si } k \in [\![-n+1, n-1]\!]$$

et $\Delta_k = \{0\}$ sinon. Ainsi, Δ_0 est l'ensemble des matrices diagonales, Δ_1 l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre 1, Δ_{-1} l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre -1.

Pour tout k dans $\mathbb{Z}$, on note H_k l'espace vectoriel $\bigoplus_{i=k}^{n-1} \Delta_i$.

Q 33. Montrer que si i et j sont dans $[\![-n+1, n-1]\!]$, si $A \in \Delta_i$ et $B \in \Delta_j$, alors $AB \in \Delta_{i+j}$.

Q 34. En déduire que si $A \in H_i$ et $B \in H_j$, alors $AB \in H_{i+j}$

III.B.1)

Q 35. Soit C une matrice nilpotente. Montrer que $I_n + C$ est inversible et que

$$(I_n + C)^{-1} = I_n - C + C^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C^{n-1}$$

On suppose que $k \geqslant 0$ et que C est une matrice de Δ_{k+1}. On pose $P = I_n + C$.

Q 36. Monter que P est inversible et que $P^{-1} \in \bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{p(k+1)}$.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi : M \mapsto P^{-1}MP$.

Q 37. Soient $i \in [\![0, k]\!]$ et $M \in \Delta_i$. Montrer qu'il existe M' dans H_{k+1} tel que $\varphi(M) = M + M'$.

Q 38. La matrice N étant la matrice définie en III.A.4, montrer qu'il existe N' dans H_{k+1} tel que

$$\varphi(N) = N + NC - CN + N'$$

Q 39. Soit T une matrice triangulaire supérieure. On pose $A = N + T$, $B = \varphi(A)$. Montrer que $B \in H_{-1}$ et que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![-1, k-1]\!], \quad B^{(i)} = A^{(i)} \\ B^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN \end{cases}$$

III.C – L'opérateur de Sylvester

On définit les opérateurs

$$\mathcal{S} : \left| \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X \mapsto NX - XN \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}^* : \left| \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X \mapsto {}^tNX - X{}^tN \end{array} \right.$$

Q 40. Montrer que le noyau de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures.

On admet que le noyau de $\mathcal{S}^*$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires supérieures.

Q 41. Montrer que $\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k$ et $\mathcal{S}^*(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel défini par : $\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M_1, M_2\rangle = \operatorname{tr}({}^tM_1M_2)$.

On note $\mathcal{S}_{k+1}$ la restriction de $\mathcal{S}$ à Δ_{k+1} et $\mathcal{S}_k^*$ la restriction de $\mathcal{S}^*$ à Δ_k.

Q 42. Vérifier que pour tous X dans Δ_{k+1} et Y dans Δ_k, $\langle \mathcal{S}_{k+1}X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{S}_k^*Y\rangle$. En déduire que $\ker(\mathcal{S}_k^*)$ et $\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ sont supplémentaires orthogonaux dans Δ_k, c'est-à-dire que

$$\Delta_k = \ker(\mathcal{S}_k^*) \oplus^{\perp} \operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$$

Q 43. Soient T une matrice triangulaire supérieure, $A = N + T$ et $k \geqslant 0$. Montrer que A est semblable à une matrice L dont tous les coefficients diagonaux d'ordre k sont égaux et vérifiant $\forall i \in [\![-1, k-1]\!]$, $L^{(i)} = A^{(i)}$.

Q 44. En déduire que toute matrice cyclique est semblable à une matrice de Toeplitz.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

4 heures Calculatrices autorisées

2018

Ce problème aborde la notion de moment dans différents contextes : moment d'une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives dans la partie I ; moment d'une suite numérique réelle dans la partie II ; moment d'une fonction dans la partie III.

Notations

Si f est une fonction de classe C^∞ et p un entier naturel, on note $f^{(p)}$ la dérivée p-ième de f.

On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Si a et b sont deux entiers naturels, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b.

Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ admettant une espérance, celle-ci est notée $\mathbb{E}(X)$.

Préambule

On admet le résultat suivant :

si $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que

i. pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geqslant 0}|u_{p,q}|$ converge,

ii. la série $\sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ converge,

alors, en notant $S_p=\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}$ et, pour tout n entier naturel, $W_n=\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}}u_{p,q}$,

- pour tout $q\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{p\geqslant 0}u_{p,q}$ converge ; on note S'_q sa somme ;
- les séries $\sum_{p\geqslant 0}S_p$, $\sum_{q\geqslant 0}S'_q$ et $\sum_{n\geqslant 0}W_n$ convergent ;
- $\sum_{p=0}^{+\infty}S_p=\sum_{q=0}^{+\infty}S'_q=\sum_{n=0}^{+\infty}W_n$, c'est-à-dire :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}}u_{p,q}\right)$$

I Moments d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On suppose que $X(\Omega)\subset\mathbb{R}^{+*}$.

Si $p\in\mathbb{N}$, on dit que X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire X^p admet une espérance. On note alors $m_p(X)$, appelé *moment d'ordre p de X*, l'espérance de X^p.

On remarque que $m_0(X)=1$.

Q 1. Justifier que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $0\leqslant X^k\leqslant 1+X^n$.

Q 2. En déduire que, si X admet un moment d'ordre n ($n\in\mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tous $k\in[\![1,n-1]\!]$.

I.A – Fonction génératrice des moments

On suppose que, pour tout entier naturel non nul n, X admet un moment d'ordre n et que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}m_n(X)\frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R_X>0$.

Pour tout $t\in\,]-R_X,R_X[$, on note $M_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}m_n(X)\frac{t^n}{n!}$. La fonction M_X s'appelle la *fonction génératrice* des moments de la variable aléatoire X.

BY-NC-SA

Q 3. Justifier que la connaissance de la fonction M_X permet de déterminer de manière unique la suite $(m_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 4. En utilisant les résultats du préambule, montrer que, pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance et que $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

Q 5. Montrer réciproquement que, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in]-R, R[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, alors l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $]-R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$, $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs strictement positives admettant des moments de tous ordres. On note R_X (respectivement R_Y) le rayon de convergence (supposé strictement positif) associé à la fonction M_X (respectivement M_Y).

Q 6. Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ admet des moments de tous ordres et que

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), \quad M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

I.B – Exemples

λ est un nombre réel fixé.

I.B.1) On suppose que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q 7. Montrer que Z admet des moments de tous ordres.

Q 8. Calculer la fonction génératrice des moments de Z. En déduire les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$.

I.B.2) Soit n un entier naturel non nul. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre λ/n. On suppose que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q 9. Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire S_n.

Q 10. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{S_n}(t)$.

Q 11. Comparer avec les résultats de la question 8.

I.B.3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y_n = \frac{1}{n} U_n$.

Q 12. Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n.

Q 13. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{Y_n}(t)$.

II Moments d'une suite numérique

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que, pour tout entier naturel p, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^p a_n$ converge absolument, on appelle moment d'ordre p de la suite (a_n) le nombre $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^p a_n$.

Le but de cette partie est de construire une suite non nulle dont tous les moments d'ordre p ($p \in \mathbb{N}$) sont nuls.

II.A – Étude d'une fonction

On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \exp\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x < 1 \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Q 14. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Q 15. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \varphi'(x)$ et démontrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 16. Montrer que, pour tout entier naturel non nul p, il existe deux polynômes P_p et Q_p à coefficients réels tels que, pour tout $x \in]-\infty, 1[$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right)$$

Q 17. En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \varphi^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Q 18. En déduire que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\varphi^{(p)}(1)$.

BY-NC-SA

II.B – Développements en série

Q 19. Démontrer, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2}$$

On considère les polynômes de Hilbert

$$\begin{cases} H_0(X) = 1 \\ H_n(X) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X-k) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Q 20. Démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2} + p - 1\right) x^p$$

Q 21. En déduire

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right)$$

où l'on a posé

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{i,j}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j\left(\frac{i-1}{2} + j\right) x^{i+j+1}$$

Q 22. Démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)| \right) = \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}} \right) - 1$.

Q 23. Utiliser les résultats admis dans le préambule pour établir l'égalité

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k\left(\frac{n+k}{2} - 1\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

II.C – Un prolongement dans $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{D}$ le disque ouvert unité de $\mathbb{C}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\}$.

Q 24. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge.

Pour $z \in \mathcal{D}$, on note $\Phi_0(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et, sous réserve de convergence,

$$\Phi_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} z^n$$

Q 25. Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1,1[$, $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{D}$, la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} z^n$ converge.

Q 26. Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi^{(p)}$ est bornée sur $]-1,1[$.

On admet que la fonction Φ_p est bornée sur $\mathcal{D}$.

Q 27. Soit r un réel de l'intervalle $]0,1[$. Démontrer pour, tous entiers $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, que

$$(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1) a_{n+p} r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_p(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

BY-NC-SA

Q 28. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un réel K_p et un entier naturel N_p tels que

$$\forall n \geqslant N_p, \quad |a_n| \leqslant \frac{K_p}{n^p}$$

Q 29. Démonter que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ et donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Q 30. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ et donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}$.

Q 31. Démontrer que tous les moments d'ordre p de la suite (a_n) sont nuls.

III Moments d'une fonction

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on appelle moment d'ordre p de f le nombre $\mu_p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$.

Le but de cette partie est de construire une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, non nulle, dont tous les moments d'ordre p ($p \in \mathbb{N}$) sont nuls.

III.A – Étude d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

On définit la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\begin{cases} \theta(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \theta(x) = \exp\left(-\dfrac{\ln^2 x}{4\pi^2} + \mathrm{i}\dfrac{\ln x}{2\pi}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Q 32. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |\theta(x)| = 0$.

Q 33. Justifier que θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad \theta^{(n)}(x) = \frac{P_n(\ln x)}{x^n}\theta(x)$$

Q 34. En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |\theta^{(n)}(x)| = 0$.

On pourra effectuer le changement de variable $y = -\ln x$.

Q 35. Démontrer que θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

III.B – Étude d'une intégrale

Q 36. Montrer que pour tout entier naturel p, l'intégrale

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} \sin t\,\mathrm{d}t$$

est absolument convergente et qu'elle vaut zéro.

Q 37. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{\ln x}{2\pi}$, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad I_p = \frac{e^{-p^2\pi^2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^{p-1} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right)\,\mathrm{d}x$$

Q 38. Conclure.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2018

4 heures — Calculatrices autorisées

Objectifs et notations

Ce problème étudie quelques aspects de l'équation de diffusion (1) : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$.

Cette équation modélise l'évolution au cours du temps de la température le long d'une barre métallique unidimensionnelle, ou encore l'évolution au cours du temps de la concentration d'une espèce chimique (par exemple un polluant dans une rivière assimilée à l'axe des x).

Le problème est constitué de quatre parties.

— La partie I permet de démontrer quelques résultats sur la transformée de Fourier d'une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Ces résultats sont utilisés dans la partie II.

— La partie II aboutit à la résolution de l'équation (1) lorsqu'on impose à la solution f d'être de classe $\mathcal{C}^2$ et de vérifier certaines conditions.

— La partie III étudie la stabilité du schéma numérique correspondant à la discrétisation de t et de x.

— La partie IV fournit une interprétation probabiliste du paramètre qui détermine la stabilité étudiée dans la partie III.

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II et largement indépendantes entre elles.

On désigne par $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour toute fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, pour tout réel $t_0 > 0$, on note $h(t_0, \cdot)$ la fonction partielle $x \mapsto h(t_0, x)$ définie sur $\mathbb{R}$; de même, pour tout réel x_0, on note $h(\cdot, x_0)$ la fonction partielle $t \mapsto h(t, x_0)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers k vérifiant $a \leqslant k \leqslant b$.

Pour tout réel $\sigma > 0$, g_σ désigne la fonction $g_\sigma : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{array} \right.$.

I Préliminaires

Dans cette partie, on fixe un réel strictement positif σ.

I.A – ***Quelques propriétés de*** g_σ

Q 1. Montrer que g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 2. En admettant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x$.

Q 3. Étudier les variations de g_σ. Montrer que la dérivée seconde de g_σ s'annule en changeant de signe en exactement deux points. Donner l'allure de la courbe représentative de g_σ et placer les deux points précédents.

I.B – Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Montrer que, pour tout réel ξ, la fonction $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x) \end{array} \right.$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\mathcal{F}(f) : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$.

On dit que $\mathcal{F}(f)$ est la transformée de Fourier de f.

Q 5. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.C – Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Q 6. Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q 7. Montrer que, pour tout réel ξ, $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\mathrm{i}\pi\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi)$.

I.D –

Q 8. Montrer que, pour tout entier naturel p, la fonction $x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

BY-NC-SA

On note $M_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

Q 9. Pour p entier naturel, donner une relation entre M_{p+1} et M_p et en déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$$

Q 10. Montrer que, pour tout réel ξ, il existe une suite réelle $(c_p(\xi))_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(-x^2)\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\exp(-x^2)x^{2p}$$

Q 11. En déduire que, pour tout réel ξ, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp(-\pi^2\xi^2)$.

Q 12. On pose $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}$. Montrer qu'il existe un réel μ tel que $\mathcal{F}(g_\sigma) = \mu g_{\sigma'}$.
La valeur de μ n'est pas à expliciter.

II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

Dans cette partie, σ désigne un réel strictement positif. On cherche les éléments f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

i. l'équation de diffusion : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$;

ii. les trois conditions de domination : pour tout réel $T > 0$, il existe des fonctions ϕ_T, χ_T et ψ_T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall t \in]0,T[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} |f(t,x)| \leqslant \phi_T(x) \\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \chi_T(x) \\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant \psi_T(x) \end{cases} ;$$

iii. la condition aux limites : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,x) = g_\sigma(x)$.

Q 13. Montrer que la fonction $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t,x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)\end{array}\right.$ vérifie les conditions i et iii.

On admet que cette fonction vérifie également les trois conditions de domination ii. L'objectif est de démontrer que c'est la seule fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant i, ii et iii.
Pour cela, on note f une fonction qui vérifie i, ii et iii.

II.A –

Q 14. Justifier que, pour tout réel $t > 0$ et tout réel ξ, la fonction $x \mapsto f(t,x)\exp(-2\mathrm{i}\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par : $\forall (t,\xi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\hat{f}(t,\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$.

Avec les notations de la partie I, on a ainsi, pour tout réel $t > 0$, $\hat{f}(t,\cdot) = \mathcal{F}\big(f(t,\cdot)\big)$.

Q 15. Montrer que, pour tout nombre réel ξ, $\lim\limits_{t\to 0^+} \hat{f}(t,\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.

On pourra utiliser une suite quelconque $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergeant vers zéro.

Q 16. Montrer que, pour tout réel ξ et tout réel $t > 0$, $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$.

Q 17. En remarquant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\xi)$ et en utilisant la question 7, montrer que, pour tout réel ξ et tout réel $t > 0$, $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2\hat{f}(t,\xi)$.

BY-NC-SA

II.B –

Q 18. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe un réel $K(\xi)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{f}(t,\xi) = K(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t)$.

Q 19. En utilisant la question 15, déterminer, pour tout réel ξ, la valeur de $K(\xi)$.

II.C –

Q 20. En déduire l'existence d'un réel ν_σ tel que, pour tout réel ξ et tout réel $t > 0$,

$$\hat{f}(t,\xi) = \nu_\sigma \exp(-2\pi^2(\sigma^2 + 2t)\xi^2)$$

Q 21. Donner la valeur de ν_σ.

On admet le résultat suivant :

si u et v sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$, alors $u = v$.

Q 22. Soit t un réel strictement positif. Déduire des questions 20 et 12 l'existence d'un réel $\lambda_{t,\sigma}$ tel que

$$f(t,\cdot) = \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$$

Q 23. Montrer que la fonction $I : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$ est constante.

On pourra utiliser le résultat de la question 17.

Q 24. En déduire que, pour tout réel t strictement positif, $f(t,\cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$.

III Étude numérique

Dans cette partie, on étudie, du point de vue numérique, un certain problème de diffusion.

On fixe une fonction f, continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]0,1[$, vérifiant l'équation de diffusion

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

ainsi que les conditions aux limites

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad f(t,0) = f(t,1) = 0$$

On suppose connue la fonction $f(0,\cdot)$ et on se propose d'étudier une méthode de calcul numérique de f.

III.A –

Q 25. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]0,1[$. Donner la limite, quand θ tend vers zéro, de $\dfrac{f(t+\theta,x) - f(t,x)}{\theta}$.

Q 26. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(t,x+h) - 2f(t,x) + f(t,x-h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$.

III.B – Soit τ un réel strictement positif et q un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose $\delta = \dfrac{1}{q+1}$ et $r = \dfrac{\tau}{\delta^2}$.

La méthode numérique retenue consiste à discrétiser t selon le pas τ et x selon le pas δ, ce qui amène à chercher une valeur approchée de $f(n\tau, k\delta)$, notée $f_n(k)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, q+1]\!]$.

Compte tenu des questions 25 et 26, l'équation de diffusion et les conditions aux limites conduisent à imposer, pour tout entier naturel n et tout $k \in [\![1,q]\!]$, $\dfrac{f_{n+1}(k) - f_n(k)}{\tau} = \dfrac{f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1)}{\delta^2}$ ainsi que $f_n(0) = f_n(q+1) = 0$ et $f_0(k) = f(0,k\delta)$ (on rappelle que la fonction $f(0,\cdot)$ est supposée connue).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix}$.

On note I_q la matrice identité d'ordre q, et on définit la matrice B carrée d'ordre q par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BY-NC-SA

Ainsi, pour tous i, j dans $[\![1,q]\!]$, le coefficient de place (i,j) de B est égal à 1 si $|i-j|=1$ et à 0 sinon.

Enfin, on pose $A=(1-2r)I_q+rB$.

Q 27. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+1}=AF_n$.

Q 28. Justifier que les matrices A et B sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_n=A^nF_0$.

Q 29. Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée quel que soit le choix de F_0 si et seulement si les valeurs propres de A appartiennent à $[-1,1]$.

Soit λ une valeur propre de B et soit $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_q\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Q 30. En considérant un coefficient de Y dont la valeur absolue est maximale, montrer que $\lambda\in[-2,2]$ et justifier l'existence d'un élément θ de $[0,\pi]$, tel que $\lambda=2\cos\theta$.

Q 31. Montrer que, si on impose $y_0=y_{q+1}=0$, alors, pour tout $k\in[\![1,q]\!]$, $y_{k-1}-\lambda y_k+y_{k+1}=0$.

Q 32. En déduire qu'il existe $j\in[\![1,q]\!]$ tel que $\lambda=2\cos\dfrac{j\pi}{q+1}$.

Q 33. Déterminer le spectre de B et une base de vecteurs propres de B.

Q 34. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur r pour que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée quels que soient les choix de q et de F_0.

On dit alors que le schéma numérique retenu est stable.

IV Équation de diffusion et marche aléatoire

Le déplacement d'une particule dans une direction donnée sous l'action des chocs avec les particules voisines peut se modéliser par des déplacements successifs à droite ou à gauche équiprobables, d'une quantité strictement positive δ, qui interviennent à intervalles de temps réguliers, le temps entre deux chocs étant égal à $\tau>0$.

Une variable aléatoire est dite de Rademacher si elle est à valeurs dans $\{1,-1\}$ et si elle prend les valeurs 1 et -1 avec la même probabilité 1/2.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables de Rademacher mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

On note, pour tout entier $n\geqslant 1$, $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

Ainsi, la variable aléatoire δS_n modélise la position de la particule au temps $n\tau$.

IV.A – Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=\dfrac{1}{2}(X_n+1)$ et $Z_n=\sum_{j=1}^{n}Y_j$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Q 35. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_n et celle de la variable aléatoire Z_n.

Soit k un entier tel que $-n\leqslant k\leqslant n$.

Q 36. Montrer que, si n et k ne sont pas de même parité, alors $\mathbb{P}(S_n=k)=0$.

On rappelle que $\binom{n}{j}$ désigne le coefficient binomial « j parmi n ».

Q 37. Montrer que, si n et k sont de même parité, $\mathbb{P}(S_n=k)=\binom{n}{(k+n)/2}\dfrac{1}{2^n}$.

IV.B – Pour x réel, on note $\lfloor x\rfloor$ la partie entière de x.

Q 38. Pour tous réels $\delta>0$ et $\tau>0$, calculer $\mathbb{V}\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau\rfloor}\right)$, variance de la variable aléatoire $\delta S_{\lfloor 1/\tau\rfloor}$.

Q 39. Montrer que, pour tout réel δ, $\mathbb{V}\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau\rfloor}\right)$ est équivalent à $\dfrac{\delta^2}{\tau}$, lorsque τ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Q 40. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in\mathbb{Z}$, en posant $p_n(k)=\mathbb{P}(S_n=k)$, montrer que

$$\frac{p_{n+1}(k)-p_n(k)}{\tau}=\frac{\delta^2}{2\tau}\frac{p_n(k+1)-2p_n(k)+p_n(k-1)}{\delta^2}$$

Q 41. En déduire une interprétation probabiliste de la condition de stabilité étudiée à la partie III.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

4 heures

Calculatrices autorisées

2018

Objectifs et notations

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines questions liées à la fonction zêta, notée ζ, définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

— Dans la partie I, on introduit la fonction ζ et on étudie son allure (variations, limites, courbe représentative).
— La partie II étudie une fonction f définie comme la somme d'une série de fonctions. Le développement en série entière de la fonction f fait intervenir la fonction ζ.
— La partie III utilise la fonction ζ pour construire une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et montrer des résultats liant les probabilités et l'arithmétique.

I Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

On note $\mathcal{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

Q 1. Déterminer $\mathcal{D}_\zeta$.

Q 2. Montrer que ζ est continue sur $\mathcal{D}_\zeta$.

Q 3. Étudier le sens de variation de ζ.

Q 4. Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

Q 5. Soit $x \in \mathcal{D}_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

Q 6. En déduire, que pour tout $x \in \mathcal{D}_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

Q 7. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Q 8. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q 9. Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

II Étude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, f désigne la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right)$$

On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

II.A – Ensemble de définition et variations

Q 10. Déterminer $\mathcal{D}_f$.

Q 11. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$ et étudier ses variations.

BY-NC-SA

II.B – Équivalents

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 12. Calculer $f(k)$.

Q 13. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Q 14. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, vérifier que $x+k \in \mathcal{D}_f$, puis calculer $f(x+k)-f(x)$.

Q 15. En déduire un équivalent de f en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

II.C – Série entière

On considère la série entière de la variable réelle x donnée par $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$.

Q 16. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Y a-t-il convergence en $x=\pm R$?

Q 17. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 18. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,1[, \quad |f^{(k)}(x)| \leqslant k!\left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right)$$

Q 19. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$$

II.D – Intégrales

Q 20. Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale ci-dessous est convergente

$$\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Q 21. En remarquant que, pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, montrer que

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Q 22. Déduire des questions précédentes une expression intégrale de $\zeta(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 23. Montrer enfin que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(k+1) = \frac{1}{k!}\int_0^{+\infty} \frac{u^k}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u$$

III Probabilités

Rappels d'arithmétique

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

— Pour tout $(a,b) \in {\mathbb{N}^*}^2$, on dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b=ka$. On dit aussi que a est un diviseur de b, ou encore que b est multiple de a.

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi, a divise b si et seulement si $b \in a\mathbb{N}^*$.

— Pour tout $(a,b) \in {\mathbb{N}^*}^2$, le plus grand commun diviseur (PGCD) de a et b est l'entier naturel noté $a \wedge b$ tel que

$$a \wedge b = \max\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b\}$$

BY-NC-SA

— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$n \text{ divise } a \wedge b \iff n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b$$

— On dit qu'un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p.
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.
On note $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $q_1, ..., q_n$ sont des nombres premiers distincts et, alors pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$(\forall i \in [\![1,n]\!], \quad q_i \text{ divise } a) \iff \prod_{i=1}^{n} q_i \text{ divise } a$$

— Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \geqslant 2$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que p divise a.

III.A – Loi zêta

Q 24. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x.

Dans les questions suivantes de cette sous-partie III.A, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

Q 25. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.

Q 26. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.

Q 27. En déduire la variance de X.

Q 28. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

III.B – Mutuelle indépendance

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x.

Soit enfin $(q_1, ..., q_n) \in \mathcal{P}^n$, un n-uplet de nombres premiers distincts.

Q 29. Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), ..., (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Cela entraine, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

Q 30. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

III.C – Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x. Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*))$$

Q 31. Exprimer l'événement A à l'aide des événements C_n. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}$$

BY-NC-SA

III.D – Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On note $W_n = U_n \wedge V_n$.

Q 32. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\mathbb{P}(W_n = k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k.

Q 33. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \implies 1-\varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1$$

Q 34. En déduire que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode de la question 33, on peut établir que, pour tout partie B de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(W \in B) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y ont la même loi de probabilité.

Q 35. Préciser la loi de W. En considérant ℓ_1, que peut-on alors en conclure ?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI 2018

4 heures Calculatrices autorisées

Mécanique du solide indéformable

Ce sujet aborde l'étude de quelques outils mathématiques utilisés en dynamique pour modéliser l'ensemble des caractéristiques inertielles d'un solide indéformable constitué d'un nombre fini de points matériels.

Rappels et notations

On note $\mathcal{E} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{R}_0$ le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Ainsi $\mathbb{R}^3$ est muni d'une structure d'espace euclidien orienté par la base $\mathcal{E}$.

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à tous les vecteurs de F, à savoir

$$F^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \vec{y} \in F,\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\}$$

On dit que deux plans vectoriels $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont *perpendiculaires* si et seulement si $\mathcal{P}_1^\perp \subset \mathcal{P}_0$.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est *stable par un endomorphisme* f de $\mathbb{R}^3$ si pour tout $\vec{x}$ de F, son image $f(\vec{x})$ appartient à F.

I Préliminaires

Soit $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur *non nul*. On note Δ_0 la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$ et $\mathcal{P}_0$ le plan vectoriel orthogonal à Δ_0.

I.A – Endomorphisme associé à un produit vectoriel

Q 1. Montrer que l'application $g_{\vec{u}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g_{\vec{u}}(\vec{x}) = \vec{u} \wedge \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ est un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$.

Q 2. Déterminer le noyau et l'image de $g_{\vec{u}}$.

Q 3. Soit λ un réel donné non nul, résoudre l'équation $g_{\vec{u}}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ d'inconnue $\vec{x}$.

Q 4. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $g_{\vec{u}}$. L'endomorphisme $g_{\vec{u}}$ est-il diagonalisable ?

Q 5. Calculer la matrice $G_{\vec{u}}$ de $g_{\vec{u}}$ dans la base $\mathcal{E}$.

Q 6. Montrer que $\mathcal{P}_0$ est stable par $g_{\vec{u}}$.

Q 7. On note $\tilde{g}_{\vec{u}}$ l'endomorphisme induit par $g_{\vec{u}}$ sur $\mathcal{P}_0$. Montrer que l'endomorphisme $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\tilde{g}_{\vec{u}}$ est une isométrie vectorielle du plan $\mathcal{P}_0$ dont on donnera les caractéristiques géométriques. On pourra orienter le plan $\mathcal{P}_0$ par le choix d'une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ telle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Q 8. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P}_0 \oplus \Delta_0$ et donner la matrice de $g_{\vec{u}}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$.

I.B – Cas particulier d'opérateur d'inertie pour un solide ponctuel

On définit la matrice $F_{\vec{u}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par la relation $F_{\vec{u}} = -(G_{\vec{u}})^2$. Soit $f_{\vec{u}}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $F_{\vec{u}}$.

Q 9. En examinant la matrice $F_{\vec{u}}$, justifier sans calcul qu'il existe une base orthonormée constituée de vecteurs propres de $f_{\vec{u}}$.

Q 10. Montrer que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, on a la relation : $f_{\vec{u}}(\vec{x}) = \|\vec{u}\|^2 \vec{x} - \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \vec{u}$.

Q 11. En déduire que, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $f_{\vec{u}}(\vec{x}) = \|\vec{u}\|^2 \mathrm{P}_{\mathcal{P}_0}(\vec{x})$, où $\mathrm{P}_{\mathcal{P}_0}$ est la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}_0$.

Q 12. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f_{\vec{u}}$.

BY-NC-SA

I.C – Distance d'un point à un axe

Dans cette sous-partie I.C, on suppose que $\|\vec{u}\| = 1$; on rappelle que $\Delta_0 = \text{Vect}(\vec{u})$.

On considère l'application $q_{\vec{u}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q_{\vec{u}}(\vec{x}) = \langle f_{\vec{u}}(\vec{x}), \vec{x}\rangle$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Q 13. Démontrer que, pour tout $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$, $q_{\vec{u}}(\vec{x}) \geqslant 0$ puis déterminer les vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tels que $q_{\vec{u}}(\vec{x}) = 0$.

Q 14. Montrer que pour tout point $M \in \mathbb{R}^3$, $q_{\vec{u}}(\overrightarrow{OM}) = d(M, \Delta_0)^2$.

I.D – Distance d'une surface à une droite

Dans cette sous-partie I.D, on suppose que $\vec{u} = \vec{k}$ et on considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne, dans le repère $\mathcal{R}_0$, $4(y-2)^2 + z^2 = 4$.

Q 15. Si $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$, montrer que tous les points $M(x, \theta)$ de coordonnées $(x, 2 + \cos\theta, 2\sin\theta)$ dans le repère $\mathcal{R}_0$ appartiennent à $\mathcal{S}$. Réciproquement, vérifier que, si un point appartient à $\mathcal{S}$, alors ses coordonnées dans $\mathcal{R}_0$ peuvent s'écrire sous cette forme.

On pose $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, \theta) = q_{\vec{u}}\left(\overrightarrow{OM}(x, \theta)\right)$.

Q 16. Montrer que la fonction h est minorée sur $\mathbb{R}^2$.

Q 17. Montrer qu'il existe un unique point $M_0 \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $M \in \mathcal{S}$, $q_{\vec{u}}(M) \geqslant q_{\vec{u}}(M_0)$. Déterminer les coordonnées de M_0 dans $\mathcal{R}_0$.

Q 18. Montrer que le point M_0 est un point régulier de la surface $\mathcal{S}$ et donner l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en M_0. Démontrer que $\mathcal{S}$ est contenu dans la portion d'espace définie par $\{1 \leqslant y \leqslant 3\}$.

II Droites et plans stables par un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

II.A – Une remarque sur le polynôme caractéristique

Q 19. En s'appuyant sur le théorème des valeurs intermédiaires, démontrer qu'un polynôme de degré 3 à coefficients réels admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

II.B – Cas d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans cette sous-partie II.B, f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q 20. Montrer que f admet au moins une valeur propre réelle.

Q 21. Démontrer qu'une droite vectorielle est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f. En déduire que f admet au moins une droite stable.

Q 22. Démontrer que l'intersection de deux plans vectoriels distincts, stables par f, est une droite engendrée par un vecteur propre de f.

II.C – Cas d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$

Dans cette sous-partie II.C, f désigne une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Q 23. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f.

Q 24. Démontrer que si $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel stable par f, alors la droite vectorielle orthogonale à $\mathcal{P}$ est engendrée par un vecteur propre de f.

Q 25. Donner la liste des sous-espaces propres de f dans les cas suivants :

i. f est une réflexion par rapport à un plan vectoriel $\mathcal{P}_0$;

ii. f est une rotation d'axe $\Delta_0 = \text{Vect}(\vec{n})$ et d'angle orienté par $\vec{n}$ valant $\theta \in \mathbb{R}$. On prendra soin de considérer à part le cas où $\theta = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

II.D – Endomorphismes qui commutent et stabilisation de sous-espaces

Q 26. On considère deux endomorphismes f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Démontrer que tout sous-espace propre de f_1 est stable par f_2.

Q 27. Soient deux rotations vectorielles distinctes de l'identité. Montrer que si elles commutent, alors leurs axes sont confondus ou orthogonaux.

BY-NC-SA

III Matrice d'inertie d'un solide indéformable

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère un système constitué d'objets ponctuels $\{M_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ placés dans $\mathbb{R}^3$ et munis de masses respectives $\{m_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ toutes strictement positives. Ces objets sont reliés entre eux par des tiges rigides de masses négligeables.

Le système mécanique $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ modélise un solide indéformable discret.

III.A – Définitions

On considère un système mécanique $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Soit Q un point de $\mathbb{R}^3$. On appelle *opérateur d'inertie* de $\mathcal{S}$ au point Q l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{QM_i} \wedge \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{QM_i}\right)$$

On appelle *centre d'inertie* de $\mathcal{S}$, noté $G_\mathcal{S}$, l'unique point de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \overrightarrow{OG_\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}$.

Si Δ est une droite affine, on appelle *moment d'inertie* de $\mathcal{S}$ par rapport à Δ le réel $I_\Delta(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} m_i d(M_i, \Delta)^2$.

On appelle *moment principal d'inertie* de $\mathcal{S}$, toute valeur propre de l'opérateur $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$ et *droite principale d'inertie* de $\mathcal{S}$, toute droite vectorielle engendrée par un vecteur propre de $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$.

III.B – Un exemple de système mécanique

On se place dans le repère $\mathcal{R}_0$. On prend $M_1 = (0,0,0)$, $M_2 = (1,0,0)$, $M_3 = (0,1,0)$, $M_4 = (0,0,1)$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $m_4 = 2$.

Q 28. Représenter le système $\mathcal{S} = \{(M_1, m_1), (M_2, m_2), (M_3, m_3), (M_4, m_4)\}$ à l'aide d'un schéma.

Q 29. Calculer le centre d'inertie de $\mathcal{S}$ et le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{v} = \sqrt{3}/3\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right)$.

III.C – Cas général : matrice d'inertie d'un système mécanique

Considérons un système mécanique $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et Q un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Q 30. Montrer que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i f_{\overrightarrow{QM_i}}(\vec{x})$.

Q 31. Soit Δ une droite affine passant par le point $Q \in \mathbb{R}^3$ et dirigée par le vecteur $\vec{v} \neq 0$. Montrer que

$$I_\Delta(\mathcal{S}) = \frac{\left\langle \overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle}{\|\vec{v}\|^2}$$

Q 32. Montrer que la matrice de $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est symétrique et réelle, puis exprimer ses termes diagonaux en termes de moments d'inertie par rapport à des axes à préciser.

Q 33. Montrer que $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}$ admet exactement trois droites stables si et seulement si ses trois valeurs propres sont distinctes.

IV Symétries mécaniques et directions principales d'inertie

IV.A – Définitions

Soit un système mécanique désigné par $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ dont le centre d'inertie est noté $G_\mathcal{S}$.

Dans toute la suite du problème, on effectue un changement d'origine et on se place dans le repère $\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}(G_\mathcal{S}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'origine $G_\mathcal{S}$.

On appelle *symétrie mécanique* de $\mathcal{S}$, toute isométrie vectorielle ϕ de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ vérifiant, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\phi(\overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}) = \overrightarrow{G_\mathcal{S}M_{\sigma(i)}}$ et $m_{\sigma(i)} = m_i$.

Ceci signifie que, par l'isométrie vectorielle ϕ, chaque point de $\mathcal{S}$ est transformé en un point appartenant également à $\mathcal{S}$ et ayant la même masse que lui.

BY-NC-SA

IV.B – Mise en évidence d'une symétrie mécanique sur le système du III.B

Soit Ψ la réflexion dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q 34. Montrer que Ψ est une symétrie mécanique du système décrit au III.B.

IV.C – Cas général : recherche des moments principaux et des directions principales en utilisant les symétries mécaniques du système

Q 35. Montrer que si ϕ est une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$ alors, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\left(\phi \circ \overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}\right)(\vec{x}) = \left(\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}} \circ \phi\right)(\vec{x})$$

Q 36. En déduire que, si ϕ est une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$, alors tout sous-espace propre de ϕ est stable par l'opérateur $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$.

On dit qu'un plan vectoriel P est un *plan de symétrie* de $\mathcal{S}$ si la réflexion vectorielle par rapport à P est une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$.

Q 37. Montrer que tout plan de symétrie de $\mathcal{S}$ est stable par $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$ et que toute droite vectorielle orthogonale à un plan de symétrie de $\mathcal{S}$ est une droite principale d'inertie de $\mathcal{S}$.

Q 38. On suppose que $\mathcal{S}$ possède deux plans de symétrie P_1 et P_2 qui sont perpendiculaires. Identifier un repère orthonormé dont les axes sont des droites principales d'inertie.

Q 39. On suppose que $\mathcal{S}$ présente deux plans de symétrie non perpendiculaires. Montrer qu'au moins deux moments principaux d'inertie de $\mathcal{S}$ sont égaux. On pourra utiliser le résultat de la question 33.

V Recherche du maximum d'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans la suite, on identifie $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On suppose que le système mécanique $\mathcal{S}$ peut être mis en rotation autour d'un axe fixe noté $\mathcal{D}$ passant par son centre d'inertie $G_\mathcal{S}$ et dirigé par un vecteur *unitaire* $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Cette révolution autour de $\mathcal{D}$ est faite à la vitesse angulaire constante notée $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$.

À chaque instant, on pose $\overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}(t) = R_{\omega t}\left(\overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}\right)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, où $R_{\omega t}$ désigne la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe $\mathcal{D}$ dirigé par $\vec{n}$ et d'angle ωt. On admet que si les colonnes de $R_{\omega t}$ sont désignées par $(U(t), V(t), W(t))$, on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{\omega t} = \omega(\vec{n} \wedge U(t), \vec{n} \wedge V(t), \vec{n} \wedge W(t))$.

Définition. Soit un système mécanique $\mathcal{S}_t = \{(M_i(t), m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ dont le centre d'inertie est noté $G_\mathcal{S}$. On appelle *énergie cinétique propre* de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}$ $(G_\mathcal{S}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le réel

$$E_{\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}(t)\right\|^2\right)$$

Q 40. Montrer que $E_{\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}} = \dfrac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \left\|\vec{n} \wedge \overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}(t)\right\|^2\right)$ puis que $E_{\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}} = \dfrac{1}{2}\omega^2\langle\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}(\vec{n}), \vec{n}\rangle$.

On suppose que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$ et on désigne par Δ_i la droite affine passant par $G_\mathcal{S}$ dirigée par $\vec{e}_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Q 41. Montrer que si $\vec{n} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$, alors $E_{\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}} = \dfrac{1}{2}\omega^2\left(\alpha^2 I_{\Delta_1}(\mathcal{S}) + \beta^2 I_{\Delta_2}(\mathcal{S}) + \gamma^2 I_{\Delta_3}(\mathcal{S})\right)$.

Q 42. Dans quelles situations l'énergie cinétique est-elle maximale pour une vitesse angulaire ω donnée ?

• • • FIN • • •

CC BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI 2018

4 heures Calculatrices autorisées

Ce problème aborde l'étude de solutions exactes ou approchées d'équations et systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ainsi que des méthodes de calcul numérique de solutions approchées de ces équations.

La première partie s'intéresse à la résolution exacte des équations différentielles qui modélisent la charge et la décharge d'un condensateur. La deuxième partie présente la méthode d'Euler pour approcher la solution d'une équation différentielle correspondant à la décharge d'un condensateur ; les notions de convergence, de consistance et de stabilité de cette méthode y sont abordées. La troisième partie aborde la résolution exacte et approchée d'un système différentiel linaire d'ordre 2 à coefficients constants. Les trois parties sont largement indépendantes les unes des autres.

On note $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des vecteurs colonnes à coefficients réels comprenant 2 lignes. On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est représenté par une matrice colonne à deux lignes. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. L'ensemble $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales.

On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et si on note $u_{1,n}$ et $u_{2,n}$ les coordonnées du terme général U_n dans une base donnée de $\mathbb{R}^2$, on dit que la suite (U_n) est bornée dans $\mathbb{R}^2$ si les suites $(u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}$. On admet que le caractère borné d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ne dépend pas du choix de la base.

Avec les mêmes notations, on dit que la suite (U_n) est convergente dans $\mathbb{R}^2$ si les suites $(u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$. On admet que le caractère convergent d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ne dépend pas du choix de la base.

I Décharge et charge d'un condensateur

On considère un condensateur de capacité C, deux résistances R identiques et une force électromotrice qui délivre une tension constante U, connectés suivant le schéma de la figure 1. On suppose que le condensateur est chargé sous la différence de potentiel $u_0 > 0$ et que les deux interrupteurs K_1 et K_2 sont ouverts. À l'instant $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur K_2. La tension u aux bornes du condensateur au cours du processus de décharge vérifie l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u'(t) = -\frac{1}{\tau}u(t) \tag{I.1}$$

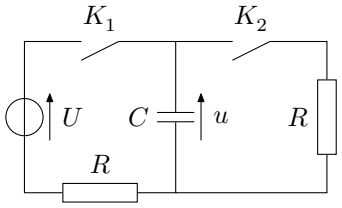


Figure 1

Le réel $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit.

I.A –

Q 1. Rappeler la forme des solutions de l'équation (I.1).

La fonction u est désormais l'unique solution de l'équation (I.1) telle que $u(0) = u_0$.

Q 2. Exprimer en fonction de τ l'instant t_1 à partir duquel la tension $u(t)$ devient inférieure à 10% de sa valeur initiale u_0.

I.B – À l'instant t_1, on ouvre l'interrupteur K_2 et on ferme l'interrupteur K_1 simultanément. La tension u aux bornes du condensateur vérifie alors :

$$\forall t \geqslant t_1, \quad u'(t) = -\frac{1}{\tau}u(t) + \frac{U}{\tau} \tag{I.2}$$

Q 3. Exprimer la valeur de $u(t)$ pour $t \geqslant t_1$. (On rappelle que $u(t_1) = u_0/10$.)

Q 4. Étudier les variations de la fonction $t \mapsto u(t)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. On distinguera les cas $U < u_0/10$, $U = u_0/10$ et $U > u_0/10$ et on précisera les dérivées à droite et à gauche de u en t_1, ainsi que la limite de la fonction u en $+\infty$.

Q 5. Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction $t \mapsto u(t)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ dans chacun des trois cas distingués à la question précédente.

BY-NC-SA

I.C – On suppose toujours qu'à l'instant t_1 on ouvre l'interrupteur K_2 et on ferme l'interrupteur K_1 simultanément. L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur à l'instant $t_0 = 0$ vaut $E(t_0) = \frac{1}{2}Cu_0^2$. À tout instant $t \in [0, t_1]$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur vaut $E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} Cu(s)u'(s)\,\mathrm{d}s$; à tout instant $t \geqslant t_1$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur vaut $E(t) = E(t_1) + \int_{t_1}^{t} Cu(s)u'(s)\,\mathrm{d}s$.

Q 6. Déterminer $E(t_1)$ en fonction de u_0 et C.

Q 7. Exprimer la valeur de l'énergie $E(t)$ à tout instant $t \geqslant t_1$, en fonction de C et $u(t)$.

Q 8. L'énergie $E(t)$ possède-t-elle une limite finie quand $t \to +\infty$? Si oui, donner la valeur de cette limite.

II La méthode d'Euler

II.A – Résultats préliminaires

II.A.1)

Q 9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.

Q 10. Donner une représentation graphique de cette inégalité.

II.A.2)

Q 11. Montrer que $\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$.

Q 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Q 13. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\ln(1+x/n)}{1/n}$ est bien définie pour tout $n \geqslant N$, montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Q 14. En déduire que $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^x$.

II.A.3)

Q 15. Montrer l'existence de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1 + x}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$ et déterminer sa valeur.

II.B – Schéma d'approximation par la méthode d'Euler

Fixons des réels $\lambda > 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Considérons l'équation différentielle suivante où l'inconnue est la fonction y :

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = -\lambda y(t) \tag{II.1}$$

On note f l'unique solution de l'équation (II.1) vérifiant la condition initiale $y(0) = c$. On se propose de calculer de manière approchée la fonction f à l'aide de la méthode d'Euler.

Pour cela, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

— on partage le segment $[0, T]$ en N segments $[t_n, t_{n+1}]$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ de même longueur $h > 0$, on a donc $h = T/N$ et $\forall n \in [\![0, N]\!]$, $t_n = nh$;

— on définit la suite (y_n) par récurrence de la manière suivante

- $y_0 = f(0)$;
- pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, si D_n est la droite passant par le point de coordonnées (t_n, y_n) de coefficient directeur $-\lambda y_n$, alors y_{n+1} est l'ordonnée du point de D_n d'abscisse t_{n+1}.

Q 16. Donner la valeur de $f(t)$, pour tout $t \in [0, T]$.

Q 17. Pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, déterminer une équation cartésienne de la droite D_n.

Q 18. Montrer que, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $y_{n+1} = (1 - \lambda h)y_n$.

Q 19. On suppose dans cette question seulement que $c = 1$, $\lambda = 1$, $T = 1$ et $h = 1/10$. Représenter sur un même graphique la courbe représentative de la solution f de l'équation (II.1) correspondant à ces valeurs numériques, les droites D_0, D_1 et D_2 ainsi que les points de coordonnées (t_n, y_n) et $(t_n, f(t_n))$ pour $n \in [\![0, 3]\!]$, en précisant les valeurs de ces coordonnées (on donnera une approximation de ces valeurs à 10^{-3} près).

Q 20. Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, exprimer le terme général y_n en fonction de n, c, λ et h.

Q 21. En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim\limits_{N \to +\infty} y_N$. (*On rappelle que $h = T/N$.*)

CC BY-NC-SA

II.C – Étude de l'erreur de consistance du schéma d'approximation

On pose, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $\varepsilon_n(h) = f(t_n) - (1-\lambda h) f(t_{n-1})$ et $\varepsilon(h) = \sum_{n=1}^{N} |\varepsilon_n(h)|$. Le réel $\varepsilon(h)$ est l'*erreur de consistance du schéma* : cette erreur résulte directement du schéma d'approximation, indépendamment des erreurs dues aux arrondis dans les calculs.

Q 22. Montrer que, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $\varepsilon_n(h) = c\mathrm{e}^{-\lambda t_{n-1}}(\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)$.

Q 23. Soit $n \in [\![1, N]\!]$. Déterminer le signe du réel $\mathrm{e}^{-\lambda t_{n-1}}(\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)$.

Q 24. Montrer l'égalité $\varepsilon(h) = |c|(\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda T}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}}$.

Q 25. En déduire que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

On dit dans ce cas que le schéma d'approximation est consistant.

II.D – Étude de la stabilité du schéma d'approximation

On considère, dans cette sous-partie II.D uniquement, que la suite (y_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (*i.e.* que l'on approxime les solutions de l'équation (II.1) sur $[0, +\infty[$). $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite définie par $y_0 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = (1-\lambda h) y_n$. De même, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = nh$.

En pratique, le calcul numérique des termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soumis à des erreurs d'arrondis : par exemple, chaque nombre est calculé avec une précision limitée par le codage des nombres flottants. Pour simplifier, on suppose que l'erreur d'arrondi $\eta \neq 0$ est constante à chaque itération. Lorsqu'on souhaite calculer les termes y_n comme dans la sous-partie II.B, à cause des erreurs d'arrondi, on calcule en fait les termes de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où z_0 est une valeur approchée de y_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = (1-\lambda h) z_n + \eta$$

On cherche à savoir si le schéma d'approximation tend à amplifier ou à réduire les erreurs d'arrondis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = z_n - y_n$. On note $a = 1 - \lambda h$ et $r = \dfrac{\eta}{1-a}$. On pose enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - r$.

II.D.1)

Q 26. Vérifier que r est bien défini.

Q 27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + \eta$.

Q 28. Établir que la suite de terme général v_n est géométrique. En déduire une expression du terme général v_n, puis du terme général u_n, en fonction de n, a, y_0, z_0 et η.

II.D.2)

Q 29. On suppose $u_0 \neq r$. Montrer que la suite (u_n) est bornée si et seulement si $|a| \leqslant 1$.

Q 30. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur h et λ pour que la suite (u_n) soit bornée quelle que soit la valeur de η.

On dit que le schéma d'approximation est conditionnellement stable.

II.D.3) Exemple

Q 31. On suppose dans cette question que $\lambda = 100$, $c = 1$ et $z_0 = y_0$. Donner une valeur de h pour laquelle la suite $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée tandis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

III Étude de la stabilité d'un schéma numérique dans le cas d'un système différentiel

III.A – Étude d'un système différentiel

III.A.1) On considère le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1'(t) &= -\dfrac{3}{2} y_1(t) &+ \dfrac{1}{2} y_2(t) \\ y_2'(t) &= \dfrac{1}{2} y_1(t) &- \dfrac{3}{2} y_2(t) \end{cases}$$

Q 32. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que ce système puisse s'écrire sous la forme de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = AY(t) \tag{III.1}$$

où l'inconnue est la fonction $Y : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

Q 33. Justifier, sans aucun calcul, que la matrice A est diagonalisable.

CC BY-NC-SA

Q 34. On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité : $D = P^{-1}AP$.
On ne demande pas de calculer la matrice P.

Q 35. Résoudre le système différentiel $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = DX(t)$, où l'inconnue est la fonction $X : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

III.A.2)

Q 36. Montrer que, pour tout $h > 0$, la matrice $I_2 - hA$ est inversible.

Q 37. Soit $h > 0$. On pose $B_h = (I_2 - hA)^{-1}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B_h^n est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1+h)^n} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(1+2h)^n} \end{pmatrix}$.

Q 38. En déduire que pour tout $U \in \mathbb{R}^2$, la suite de terme général $B_h^n U$ converge vers le vecteur $0_{\mathbb{R}^2}$.

III.B – Méthode d'Euler

On considère un vecteur $C \in \mathbb{R}^2$ et le système différentiel suivant

$$\forall t \in [0,T], \quad Y'(t) = AY(t) \tag{III.2}$$

On note $F : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ l'unique solution du système (III.2) vérifiant la condition initiale $Y(0) = C$.

Q 39. Montrer, pour tout $t \in]0,T]$, l'existence dans $\mathbb{R}^2$ de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}(F(t) - F(t-h))$ et préciser sa valeur.

Soit $h > 0$. Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, on note $Y_n \in \mathbb{R}^2$ une valeur approchée de $F(t_n)$. En tout point t_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, on approche le vecteur dérivé $F'(t_n)$ par le taux d'accroissement $\dfrac{1}{h}(Y_n - Y_{n-1})$. On calcule les termes de la suite (Y_n) en posant :

$$\forall n \in [\![1, N]\!], \quad \frac{1}{h}(Y_n - Y_{n-1}) = AY_n$$

Q 40. Montrer que pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $Y_{n+1} = B_h Y_n$.

Q 41. En déduire Y_N en fonction de B_h, Y_0 et N.

On considère qu'à chaque itération on effectue le calcul avec une erreur d'arrondi constante égale à $V \in \mathbb{R}^2$. On définit les suites (Y_n) et (Z_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par leurs premiers termes Y_0 et Z_0 et les relations de récurrence, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_{n+1} = B_h Y_n$ et $Z_{n+1} = B_h Z_n + V$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = Z_n - Y_n$.

Q 42. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = B_h U_n + V$.

Q 43. Démontrer que la matrice $I_2 - B_h$ est inversible.

Q 44. On note $U_\infty = (I_2 - B_h)^{-1} V$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_\infty = B_h(U_n - U_\infty)$.

Q 45. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (I_2 - B_h^n)U_\infty + B_h^n U_0$.

Q 46. En déduire que la suite (U_n) est bornée dans $\mathbb{R}^2$ quelle que soit la valeur de l'erreur V et quel que soit le nombre $h > 0$.

On dit dans ce cas que la méthode d'approximation est stable.

• • • FIN • • •

CC BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures

Calculatrice autorisée

2019

Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \cdots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$, χ_f, π_f et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A – Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q 1. Montrer que M et $M^\top$ ont même spectre.

Q 2. Montrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B – ***Matrices compagnons***

Q 3. Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.

Q 4. Soit λ une valeur propre de $C_Q^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C – ***Endomorphismes cycliques***

Q 5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.

BY-NC-SA

Q 6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Q 7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D – Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Q 8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0.$$

Q 9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est stable par f.

Q 10. Montrer que : $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.

Q 11. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II Étude des endomorphismes cycliques

II.A – Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

Q 12. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

II.B – Dans cette sous-partie II.B, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \ker((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

Q 13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables par f et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k : \left| \begin{array}{l} F_k \to F_k, \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x. \end{array} \right.$$

Q 14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

Q 15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leqslant \dim(F_k)$?

Q 16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.

BY-NC-SA

Q 17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

Q 18. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.

Q 19. Justifier que f est cyclique.

III Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

Q 20. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

III.A – Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Soit $g \in \mathcal{C}(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

Q 21. Justifier l'existence de λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1} de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0).$$

Q 22. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.

Q 23. Établir que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

III.B – Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

Q 24. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces vectoriels F_i contient tous les autres.

On note d le degré de π_f.

Q 25. Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1))$ est libre.

> Pour tout x non nul de E, on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\ker(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, ..., $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_d)$.

Q 26. Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1,

$$\psi_1 : \left| \begin{array}{l} E_1 \to E_1, \\ x \mapsto f(x). \end{array} \right.$$

BY-NC-SA

Q 27. Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, ..., e_d)$ en une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E. Soit Φ la d-ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d. On note $F = \{x \in E \mid \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

Q 28. Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = \left(\Phi(f^i(x))\right)_{0 \leqslant i \leqslant d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x))..., \Phi(f^{d-1}(x))).$$

Q 29. Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.

Q 30. Montrer que $E = E_1 \oplus F$.

Q 31. En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, ..., E_r$, tous stables par f tels que :

— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;

— pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;

— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

III.C – Commutant d'un endomorphisme quelconque

Q 32. Montrer que la dimension de $\mathcal{C}(f)$ est supérieure ou égale à n.

Q 33. On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $\mathcal{C}(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.

IV Endomorphismes orthocycliques

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que E est un espace euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs x, y de E est noté $(x \mid y)$ et on désigne par $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E.

On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthocyclique* s'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q (matrice compagnon).

IV.A – Isométries vectorielles orthocycliques

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Q 34. Soit $f' \in \mathrm{O}(E)$ ayant même polynôme caractéristique que f. Montrer qu'il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E pour lesquelles la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à la matrice de f' dans $\mathcal{B}'$.

Q 35. En déduire que f est orthocyclique si et seulement si $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.

IV.B – Endomorphismes nilpotents orthocycliques

Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

Q 36. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure.

Q 37. En déduire que f est orthocyclique si et seulement si

$$f \text{ est de rang } n-1 \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in (\ker f)^\perp, \quad (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y).$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures

Calculatrice autorisée

2019

Notations

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad A_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j},\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad D_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j},\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n \right\} \qquad \text{et} \qquad D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} D_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \pi_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$$

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N} \qquad d_{n+1}(x) = 2^{n+1}(\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x))$$

Soit Z une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs complexes et telle que $Z(\Omega)$ soit fini. En notant $\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ les parties réelle et imaginaire de Z, on définit l'espérance de Z par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\Re(Z)) + \mathrm{i}\,\mathbb{E}(\Im(Z)).$$

Si $Z_1, ..., Z_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs complexes, mutuellement indépendantes, et telles que $Z_j(\Omega)$ soit fini pour tout j, on admet que

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} Z_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(Z_j).$$

I Fonction caractéristique

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ avec $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

Pour X variable aléatoire réelle avec $X(\Omega)$ fini, on note

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right).$$

On définit également

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul et t un réel.

Q 1. Montrer

$$\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Q 2. En déduire

$$\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}.$$

BY-NC-SA

Q 3. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $\left(\Phi_{X_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Q 4. Étudier la continuité de $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{X_n}$.

Q 5. Montrer que X_n et $-X_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Q 6. En déduire la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \varphi_n : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathbb{E}(\cos(tX_n)) \end{array} \right.$$

Q 7. La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

II Écriture binaire

Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$\Phi_n : \left| \begin{array}{c} \{0,1\}^n \to [\![0, 2^n - 1]\!] \\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \end{array} \right.$$

Q 8. Montrer que Φ_n est bien définie en vérifiant $\operatorname{Im}\Phi_n \subset [\![0, 2^n - 1]\!]$.

Q 9. Préciser $\operatorname{Im}\Phi_n$ en fonction de A_n.

Q 10. Montrer par récurrence

$$\forall k \in [\![0, 2^n - 1]\!], \qquad k \in \operatorname{Im}\Phi_n.$$

Q 11. En déduire que Φ_n est bijective.

Q 12. Établir la monotonie au sens de l'inclusion de la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ puis vérifier $D \subset [0, 1[$.

Q 13. Établir

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \qquad \pi_n(x) \leqslant x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

Q 14. Justifier

$$\forall x \in [0, 1[, \ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}.$$

Q 15. Établir

$$\forall (x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^\star, \qquad d_j(x) \in \{0, 1\}.$$

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Justifier $x \in D_n \iff 2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.

Q 17. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'application

$$\Psi_n : \left| \begin{array}{c} \{0,1\}^n \to D_n \\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \end{array} \right.$$

est bijective.

Q 18. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}.$$

BY-NC-SA

III Développement dyadique, loi et décomposition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{2^k}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) \qquad G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n < x)$$

Q 19. Justifier

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \mathbb{P}(Y_n \in [0,1[) = 1.$$

Q 20. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in D_n, \qquad F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}.$$

Q 21. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in D_n, \qquad G_n(x) = x.$$

Q 22. Établir, pour tout entier naturel non nul n, que Y_n suit une loi uniforme sur D_n.

Q 23. Réciproquement, soit n un entier naturel non nul et soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur D_n. Montrer qu'il existe des variables aléatoires $V_1, ..., V_n$ mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et telles que

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{2^k}.$$

IV Développement dyadique, étude asymptotique

On conserve les notations introduites dans la partie III.

Q 24. Soit x réel. Établir la monotonie des suites $\left(F_n(x)\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(G_n(x)\right)_{n\geqslant 1}$.

Q 25. En déduire la convergence simple des suites de fonctions $(F_n)_{n\geqslant 1}$ et $(G_n)_{n\geqslant 1}$.

Q 26. Montrer

$$\forall x \in D \cup \{1\}, \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = x \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} G_n(x) = x.$$

Q 27. Généraliser les résultats obtenus à la question précédente pour tout $x \in [0,1]$.

Q 28. Montrer que pour tout intervalle non vide $I \subset [0,1]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \in I) = \ell(I) \qquad \text{avec} \qquad \ell(I) = \sup I - \inf I.$$

Q 29. En déduire que, pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, la suite $\left(\mathbb{E}(f(Y_n))\right)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

Q 30. À l'aide du résultat précédent, proposer une autre démonstration du résultat obtenu à la question 6.

Q 31. *Une application.* Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ puis déterminer sa valeur.

On pourra considérer $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right)\,\mathrm{d}t$.

BY-NC-SA

V Dénombrabilité

Q 32. L'ensemble D est-il dénombrable ?

Q 33. On suppose qu'il existe $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective. En considérant $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin f(x)\}$, établir une contradiction.

Q 34. Montrer que l'application $\Phi : \left| \begin{array}{c} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A \mapsto \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est bijective.

Q 35. Montrer que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{c} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1] \\ (x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{array} \right.$$

est bien définie et surjective. Est-elle injective ?

On note $D^\star = D \setminus \{0\}$. On pose pour tout $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$\Lambda((x_n)) = \begin{cases} \Psi((x_n)) & \text{si } \Psi((x_n)) \in [0,1[\setminus D^\star \\ \dfrac{\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D \cup \{1\} \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 1 \\ \dfrac{1+\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D^\star \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 0 \end{cases}$$

Q 36. Montrer que Λ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$.

Q 37. Conclure que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrices autorisées

2019

Analyse combinatoire de différents modèles d'urne

En 1923, le mathématicien George Pólya introduit une expérience d'urne aléatoire pour modéliser la propagation d'épidémies. Ce modèle, à base de tirages de boules colorées dans une urne, et ses généralisations ont donné naissance à un grand nombre d'études qui ont conduit à des applications variées, notamment en économie et en finance.

Au milieu des années 2000, le chercheur français Philippe Flajolet propose une nouvelle approche de ces modèles, à base de combinatoire et de séries génératrices. Sa méthode s'applique à la totalité des modèles d'urne dite « équilibrée », là où les techniques de résolution antérieures étaient spécifiques de chaque protocole de tirage.

Cette épreuve est organisée en cinq parties dans une large mesure indépendantes :

— dans la partie I, il est demandé de démontrer un résultat du cours qui est utilisé dans la partie IV ; le résultat de la question 6 sert dans la partie V ;

— la partie II traite un cas particulier qui est généralisé dans la partie IV ;

— la partie III introduit la méthode de Philippe Flajolet ;

— les parties IV et V étudient deux protocoles différents de tirage ; la partie V permet également d'établir un lien avec certaines permutations d'un ensemble fini.

Notations

Dans tout le problème, on définit la famille de polynômes $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_k = X(X+1)\cdots(X+k-1) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On appelle fonction polynomiale de deux variables réelles u et v, toute combinaison linéaire d'applications de la forme $(u,v) \to u^i v^j$ où $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

I Résultats préliminaires

I.A – Soit α un réel. On note $f_\alpha : x \longmapsto (1-x)^{-\alpha}$.

Q 1. Préciser le domaine de définition D de f_α. Justifier que f_α est de classe C^1 sur D et donner une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f_α sur D.

Q 2. Énoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre et démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\,\frac{x^n}{n!}.$$

Q 3. Rappeler la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et énoncer le théorème qui s'y rapporte.

Q 4. En déduire que, pour tout entier n et tous réels α et β,

$$L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta).$$

I.B –

Q 5. Pour $x \in]-1,1[$, donner la valeur de la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} x^p$ ainsi que celle de sa dérivée.

Q 6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme $R_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

BY-NC-SA

II Un modèle particulier d'urne de Pólya

On dispose d'un stock infini de boules noires et blanches. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

— on tire au hasard une boule de l'urne ;

— on replace dans l'urne la boule tirée ;

— on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires par $X_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n donne le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages. On note g_n la fonction génératrice de la variable X_n. On rappelle que $g_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = k)\, t^k$.

Q 7. Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3 puis les fonctions g_1, g_2 et g_3.

Q 8. Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Établir que

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1}\, P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1}\, P(X_{n-1} = k).$$

Q 9. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout réel t,

$$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1}\, g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t).$$

Q 10. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t,

$$g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k.$$

Q 11. Identifier la loi de X_n et donner son espérance.

III Modèle général d'urne équilibrée

Dans cette partie, on généralise le modèle de la partie précédente.

Soient a_0, b_0, a, b, c et d six entiers naturels. On dispose à nouveau d'un stock infini de boules noires et blanches, mais celles-ci sont cette fois numérotées, à partir de zéro, de manière à pouvoir les différencier. L'urne contient initialement a_0 boules blanches et b_0 boules noires. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

— on tire au hasard une boule dans l'urne ;

— on replace cette boule dans l'urne ;

— si la boule tirée est blanche, on ajoute dans l'urne a boules blanches et b boules noires ;

— si la boule tirée est noire, on ajoute dans l'urne c boules blanches et d boules noires.

On suppose que $a + b = c + d$, on dit alors que l'urne est équilibrée et on note $s = a + b = c + d$.

Pour $n \geqslant 1$, une issue résultant de n tirages successifs est modélisée par le n-uple indiquant la couleur et le numéro des boules successivement obtenues. On note Ω_n l'ensemble des issues possibles de ces n tirages.

La figure 1 donne deux exemples de 3 tirages ($n = 3$), pour $a_0 = b_0 = 1$, $a = d = 1$ et $b = c = 0$ (modèle de la partie précédente). La boule au dessus de chaque flèche représente celle qui a été tirée.

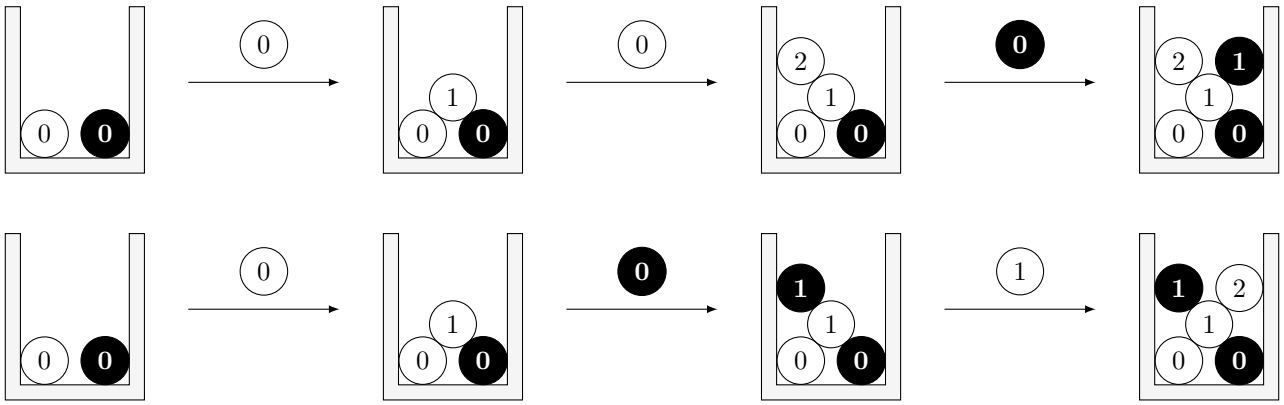


Figure 1 Deux exemples de 3 tirages

La première suite de trois tirages est modélisée par l'issue $\omega_1 = (B_0, B_0, N_0) \in \Omega_3$; la deuxième suite est modélisée par l'issue $\omega_2 = (B_0, N_0, B_1) \in \Omega_3$. On note que ces deux issues différentes aboutissent à la même composition de l'urne.

BY-NC-SA

Pour $\omega \in \Omega_n$ on note $b(\omega)$ (respectivement $n(\omega)$), le nombre de boules blanches (respectivement noires) présentes dans l'urne à la fin des n tirages modélisés par ω.
Pour tous réels u et v, on pose $P_0(u,v) = u^{a_0}\, v^{b_0}$ et $P_n(u,v) = \sum_{\omega\in\Omega_n} u^{b(\omega)}\, v^{n(\omega)}$.

Pour $n \geqslant 1$, on note à nouveau X_n le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après n tirages et g_n sa fonction génératrice.

Dans les deux questions suivantes, on suppose $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a = d = 0$ et $b = c = 1$. En d'autres termes, l'urne contient, au départ, une boule blanche et, à chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur opposée à celle qui a été tirée.

Q 12. En dressant la liste de toutes les issues possibles, donner la loi de X_3.

Q 13. Vérifier que $P_3(u,v) = uv^3 + 4u^2v^2 + u^3v$.

On revient désormais au cas général d'une urne équilibrée.

Q 14. En examinant le nombre de boules dans l'urne juste avant chaque tirage, justifier que, pour $n \geqslant 1$,

$$\operatorname{card}(\Omega_n) = (a_0+b_0)\times\cdots\times\big((a_0+b_0+s(n-1)\big) = s^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right).$$

Q 15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = k) = \frac{\operatorname{card}(\{\omega\in\Omega_n ; b(\omega) = k\})}{\operatorname{card}\,\Omega_n}.$$

Q 16. Justifier les égalités

$$g_n(t) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)}\, P_n(t,1)\ ;$$

$$E(X_n) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)}\, \frac{\partial P_n}{\partial u}(1,1).$$

Q 17. Démontrer que, pour tout entier n,

$$P_{n+1}(u,v) = u^{a+1}v^b \frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + u^c v^{d+1}\frac{\partial P_n}{\partial v}(u,v). \tag{III.1}$$

Pour tous réel x, u et v, on pose, sous réserve d'existence,

$$H(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(u,v)\,\frac{x^n}{n!}.$$

Soit $\rho > 0$. On pose $D_\rho =]-\rho,\rho[\times]0,2[^2 = \big\{(x,u,v)\in\mathbb{R}^3\ ;\ |x|<\rho,\ 0<u<2,\ 0<v<2\big\}$.

Q 18. Justifier que, pour ρ assez petit, la fonction H est bien définie sur D_ρ.

On fixe un tel ρ dans toute la suite de cette partie.

Q 19. Justifier que H admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x sur le domaine D_ρ, obtenue par dérivation terme à terme par rapport à x de l'expression de H.

Q 20. Démontrer que H admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à u sur le domaine D_ρ, obtenue par dérivation terme à terme par rapport à u de l'expression de H.

On admet qu'il en est de même pour la variable v.

Q 21. Vérifier que $H(0,u,v) = u^{a_0}\, v^{b_0}$ puis que H est solution sur D_ρ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,v) = u^{a+1}v^b\,\frac{\partial H}{\partial u}(x,u,v) + u^c v^{d+1}\,\frac{\partial H}{\partial v}(x,u,v).$$

IV Modèle général d'une urne de Pólya

Dans cette partie, on considère le modèle d'urne équilibrée pour lequel $b = c = 0$. On a donc nécessairement $a = d$. En d'autres termes, à chaque fois qu'on tire une boule, on ajoute a boules de sa couleur dans l'urne. La composition initiale de l'urne est de a_0 boules blanches et b_0 boules noires. Compte tenu des résultats de la partie III, on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial Y}{\partial x}(x,u,v) = u^{a+1}\frac{\partial Y}{\partial u}(x,u,v) + v^{a+1}\frac{\partial Y}{\partial v}(x,u,v) \tag{IV.1}$$

d'inconnue Y définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ avec la condition $Y(0,u,v) = u^{a_0}\, v^{b_0}$.

BY-NC-SA

On admet que la fonction G définie sur $U = \{(x,u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \ ; \ axu^a < 1, \ axv^a < 1\}$ par

$$G(x,u,v) = u^{a_0}\, v^{b_0} (1 - axu^a)^{-a_0/a} (1 - axv^a)^{-b_0/a}$$

est solution de l'équation (IV.1).

On reprend la notation de la partie précédente : $D_\rho =]-\rho, \rho[\times]0,2[^2$.

Q 22. À l'aide des résultats préliminaires, démontrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $D_\rho \subset U$ et, pour tout $(x,u,v) \in D_\rho$,

$$G(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(u,v)\, \frac{x^n}{n!}$$

où Q_n est une fonction polynomiale de deux variables à préciser.

Q 23. Justifier que G admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x sur le domaine D_ρ, obtenue par dérivation terme à terme par rapport à x de l'expression de H.

Q 24. Démontrer que G admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à u sur le domaine D_ρ, obtenue par dérivation terme à terme par rapport à u de l'expression de H.

On admet qu'il en est de même pour la variable v.

Q 25. En déduire que, pour tout entier n, $P_n = Q_n$, puis que H et G coïncident sur D_ρ, où H et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont été définis dans la partie III.

Q 26. Conclure que, pour tout entier n et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P(X_n = a_0 + ka) = \binom{n}{k} \frac{L_k(a_0/a)\, L_{n-k}(b_0/a)}{L_n(a_0/a + b_0/a)}.$$

Q 27. À l'aide du résultat précédent, retrouver celui de la question 10.

Q 28. À l'aide des résultats des questions 16 et 19, déterminer l'espérance de X_n.

V Urne de Friedman et montées de permutations

Dans cette partie, on suppose que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a = d = 0$, $b = c = 1$, ce qui correspond au protocole utilisé dans les questions 12 et 13 (modèle introduit par Friedman en 1945).

V.A –

On conserve toutes les notations de la partie III (tous les résultats de cette partie peuvent être admis). On a donc en particulier $\mathrm{card}(\Omega_n) = n!$. On admet, pour $0 < u < v$ et $|x|$ assez petit, l'égalité

$$H(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} p^n (v-u)^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^p \right).$$

Q 29. À l'aide de la question 6, justifier que, pour tout entier n et tous u et v tels que $0 < u < v$, la somme

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n (v-u)^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^p$$

est une fonction polynomiale de u et v.

On a donc, d'après la question 16, pour tout entier n et tout $t \in]0,1[$, $g_n(t) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1}$.

Dans toute la suite, on fixe un entier $n \geqslant 2$.

Q 30. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1} \underset{t\to 0^+}{=} O(t^{n+1})$.

Q 31. En utilisant ce qui précède et en développant $(1-t)^{n+1}$, déterminer le développement limité de g_n à l'ordre n en 0.

Q 32. En déduire que, pour tout m dans $[\![1,n]\!]$,

$$P(X_n = m) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m-k)^n.$$

BY-NC-SA

V.B – Montées d'une permutation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = (u_0, ..., u_n)$ une suite finie d'entiers, deux à deux distincts. Une montée (respectivement descente) de u est un indice $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $u_i < u_{i+1}$ (respectivement $u_i > u_{i+1}$).

Q 33. Soit k un entier supérieur ou égal à 1, $(u_0, ..., u_k)$ une suite finie d'entiers, et a un entier tel que $a > u_p$ pour tout $p \in [\![0, k]\!]$. On insère la valeur a dans cette suite juste après u_i, avec $i \in [\![0, k-1]\!]$, de manière à obtenir la suite $(u_0, ..., u_i, a, u_{i+1}, ..., u_k)$. Comparer le nombre de montées et de descentes de la nouvelle suite par rapport à l'ancienne. On distinguera deux cas.

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire des fonctions bijectives de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. On représente un élément σ de S_n par la suite finie $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ et on appelle montée (respectivement descente) de σ une montée de cette suite. Par exemple, avec $n = 4$, la permutation σ représentée par la liste $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)) = (4, 1, 3, 2)$ admet une montée et deux descentes. Pour tout entier m, on note $A_{n,m}$ le nombre d'éléments de S_n avec m montées.

Q 34. Déterminer les éléments de S_3 et calculer parmi eux le nombre de permutations avec m montées pour tout entier m. Comparer les valeurs obtenues avec les coefficients de $P_3(X, 1)$ où P_3 a été exprimé à la question 13.

Q 35. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer $A_{n,0}$, $A_{n,n-1}$ et $A_{n,m}$ pour $m \geqslant n$.

L'objectif de ces dernières questions est de déterminer $A_{n,m}$ pour tous entiers $n \geqslant 2$ et $m \leqslant n-1$ en établissant un lien entre ces valeurs et le modèle d'urne étudié dans cette partie.

On étudie un algorithme permettant de construire une permutation de S_n à partir d'une issue correspondant à n tirages.

— On démarre la construction à la suite du premier tirage : on a nécessairement tiré la boule blanche et l'urne contient maintenant une boule de chaque couleur. On considère la suite $(0, 1, 0)$ qui comporte exactement une montée et une descente.

— Si on tire la boule blanche (respectivement noire) lors du deuxième tirage, on insère la valeur 2 au milieu de la première et unique montée (respectivement descente) de la suite pour obtenir la suite $(0, 2, 1, 0)$ (respectivement $(0, 1, 2, 0)$).

— Plus généralement, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, si au k-ième tirage on tire une boule blanche (respectivement noire) numérotée p, on insère la valeur k dans la suite au milieu de la $(p+1)$-ième montée (respectivement descente).

— À la fin de la construction, on supprime les deux 0 de la liste (qui sont nécessairement restés en début et fin de liste). La liste obtenue contient les entiers de 1 à n et représente un élément σ de S_n. Si ω désigne la suite des tirages, on note $\sigma(\omega)$ la permutation obtenue.

À titre d'exemple, construisons $\sigma((B_0, N_0, B_1))$.

— Tirage 1 : B_0

On démarre avec la suite $(0, 1, 0)$.

— Tirage 2 : N_0

L'entier 2 ($k = 2$) s'insère au milieu de la première ($p = 0$) descente (la boule est noire) pour donner la nouvelle suite $(0, 1, 2, 0)$

— Tirage 3 : B_1

L'entier 3 s'insère au milieu de la deuxième montée pour donner $(0, 1, 3, 2, 0)$.

On obtient ainsi $\sigma((B_0, N_0, B_1)) = (1, 3, 2)$.

Q 36. À l'aide de l'algorithme ci-dessus, construire la permutation de S_5 associée à l'issue $(B_0, B_0, N_1, N_0, B_2)$.

Q 37. Réciproquement, soit σ l'élément de S_7 représenté par la suite $(7, 1, 3, 6, 5, 4, 2)$. Déterminer une issue ω comportant 7 tirages telle que $\sigma_\omega = \sigma$.

Q 38. À l'aide de la question 33, comparer, pour une issue quelconque, le nombre de boules blanches dans la composition finale de l'urne au nombre de montées de la permutation qui lui est associée par l'algorithme ci-dessus.

On admet que l'application $\omega \mapsto \sigma(\omega)$ est bijective de Ω_n dans S_n et qu'elle induit une bijection entre l'évènement $(X_n = m)$ et l'ensemble des permutations de S_n ayant $m - 1$ montées.

Q 39. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $m \in [\![0, n-1]\!]$ le nombre $A_{n,m}$ de permutations de S_n ayant m montées.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2019

La partie I de ce problème permet de démontrer quelques résultats sur les matrices et les endomorphismes nilpotents et aborde l'étude de cas particuliers qui seront généralisés dans la partie II.

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $M^\top$ la transposée de la matrice M.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, $M^{k+1} = MM^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, ..., $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

I Premiers résultats

Q 1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

I.A – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

Q 2. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q 3. Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

Q 4. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$.

Q 5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.

Q 6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

BY-NC-SA

I.B – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

Q 7. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ et que $2r \leqslant n$.

Q 8. On suppose que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, ..., e_r de E tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), ..., e_r, u(e_r))$ est une base de E.

Q 9. Donner la matrice de u dans cette base.

Q 10. On suppose $\operatorname{Im} u \neq \operatorname{Ker} u$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, ..., e_r de E et des vecteurs v_1, v_2, ..., v_{n-2r} appartenant à $\operatorname{Ker} u$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), ..., e_r, u(e_r), v_1, ..., v_{n-2r})$ est une base de E.

Q 11. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

I.C – Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette sous-partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 12. Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A.

Q 13. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

Q 14. Montrer qu'une matrice est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à X^n.

Q 15. Montrer la réciproque de la question 12.

Q 16. Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Q 17. Démontrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice p, alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A.

On suppose que P est un polynôme annulateur de A nilpotente.

Q 18. Démontrer que 0 est racine de P.

Q 19. On note m la multiplicité de 0 dans P, ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible puis que P est un multiple de X^p dans $\mathbb{C}[X]$.

I.D – Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$. On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

I.D.1) On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

Q 20. Calculer la trace et le rang de A. En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Q 21. Démontrer que A est semblable à la matrice $\operatorname{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que $A = P \operatorname{diag}(J_2, J_1) P^{-1}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R.

Q 22. Démontrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

Q 23. En déduire l'ensemble des racines carrées de A.

On pourra considérer $R' = P^{-1}RP$.

I.D.2) On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Q 24. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6, puis l'ensemble des solutions de l'équation.

BY-NC-SA

I.D.3) Plus généralement, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

Q 25. Montrer que, si $2p-1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

Q 26. Pour toute valeur de l'entier $n \geqslant 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geqslant 2$ et admettant au moins une racine carrée.

II Deuxième partie

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties I.A et I.B.

II.A – Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

Q 27. Démontrer que $\operatorname{Im} u$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.

Q 28. Pour tout vecteur x non nul de E, on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$; démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geqslant 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

Q 29. Démontrer que $(x, u(x), ..., u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

Q 30. Démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs x_1, ..., x_t de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

On pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$.

Q 31. Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

II.B – Partitions d'entiers

On appelle partition de l'entier n toute suite finie $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ telle que

$$\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n.$$

On note Γ_n l'ensemble des partitions de l'entier n. Ainsi, $\Gamma_1 = \{(1)\}$, $\Gamma_2 = \{(2), (1,1)\}$, $\Gamma_3 = \{(3), (2,1), (1,1,1)\}$.

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p et de rang r.

Q 32. Montrer qu'il existe une partition $\sigma = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ de n et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est égale à la matrice $N_\sigma = \operatorname{diag}(J_{\alpha_1}, ..., J_{\alpha_k})$.

Q 33. Soit α un entier naturel non nul. Calculer le rang de J_α^j pour tout entier naturel j. En déduire que J_α est nilpotente et préciser son indice de nilpotence.

Q 34. En déduire la valeur de α_1.

Q 35. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda_j = \{i \in [\![1, k]\!] \mid \alpha_i \geqslant j\}$. Démontrer que $\operatorname{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i\in\Lambda_j} (\alpha_i - j)$.

Q 36. Démontrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'entier $d_j = \operatorname{rg}(u^{j-1}) - \operatorname{rg}(u^j)$ est égal au nombre de blocs J_{α_i} dont la taille α_i est supérieure ou égale à j.

Q 37. Donner la valeur de l'entier k, nombre de blocs J_{α_i} intervenant dans N_σ.

Q 38. Pour tout entier j compris entre 1 et n, exprimer le nombre de blocs J_{α_i} de taille exactement égale à j.

Q 39. On suppose qu'il existe une partition σ' de l'entier n et une base $\mathcal{B}'$ de E telles que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ soit égale à $N_{\sigma'}$. Montrer que $\sigma = \sigma'$.

Q 40. Quel est le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes, toutes de même taille n, telles qu'il n'y ait pas dans cet ensemble deux matrices semblables ?

BY-NC-SA

II.C – Applications

Q 41. Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer la partition σ de l'entier 5 associée à u et donner la matrice N_σ.

Q 42. À l'aide du résultat de la question 31, démontrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors M, $2M$ et $M^\top$ sont semblables.

Q 43. À l'aide du résultat de la question 15, démontrer que si M et $2M$ sont semblables, alors M est nilpotente.

II.D – Un algorithme de calcul du nombre de partitions de n

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $Y_{n,j}$ l'ensemble des partitions dont le premier terme α_1 est inférieur ou égal à j et $y_{n,j}$ le cardinal de $Y_{n,j}$; on pose $y_{0,0} = 1$.

Q 44. Calculer $y_{n,1}$.

On se propose de montrer que, si $2 \leqslant j \leqslant n$, alors $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}$.

Q 45. Démontrer que cette égalité est vraie pour $j = n$.

Q 46. Pour $j < n$, vérifier que $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$. Conclure.

Q 47. Calculer les $y_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant 5$ en présentant les résultats sous la forme d'un tableau.

Q 48. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie $y_{n,n}$.

Q 49. Comparer ce résultat à celui de la question 40.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

4 heures

Calculatrice autorisée

2019

Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $M^\top$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire tel que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que Id_E appartienne à $\mathcal{A}$.)

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $AB = BA$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures. (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I Exemples de sous-algèbres

I.A – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Q 1. Les sous-ensembles $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Q 2. Les sous-ensembles $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

Q 3. On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

I.B – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \,|\, u(F) \subset F\}$.

Q 4. Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Q 5. Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.

On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_F$ est triangulaire par blocs.

Q 6. Déterminer $\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

CC BY-NC-SA

I.C – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

Q 7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Q 8. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 9. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, ..., a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i,j) de $J(a_0, ..., a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, ..., a_{n-1})$ où $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, ..., n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

II.A – Calcul des puissances de J

Q 10. Préciser les matrices J et J^2. (On pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$.)

Q 11. Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Q 12. Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, ..., a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

II.B – Une base de $\mathcal{A}$

Q 13. Montrer que $(I_n, J, J^2, ..., J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

Q 14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

Q 15. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C – Diagonalisation de J

Q 16. Déterminer le polynôme caractéristique de J.

Q 17. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 18. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q 19. Déterminer les valeurs propres complexes de J et les espaces propres associés.

II.D – Diagonalisation de $\mathcal{A}$

Q 20. Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Q 21. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Q 22. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, ..., a_{n-1})$?

BY-NC-SA

III Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

III.A – Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La trace de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{tr}(M)$.

Q 23. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne $\mathcal{A}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note r sa dimension.

Q 24. Quelle relation a-t-on entre d et r ?

Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base $(A_1, ..., A_r)$ de $\mathcal{A}^\perp$.

Q 25. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle A_i \mid M\rangle = 0$.

Q 26. Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N^\top A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

III.B – Conclusion

Soit $\mathcal{A}^\top = \{M^\top \mid M \in \mathcal{A}\}$.

Q 27. Montrer que $\mathcal{A}^\top$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

Q 28. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \mathrm{Vect}(A_1X, ..., A_rX)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{A}^\top$.

Q 29. Montrer que $d \leqslant n^2 - n + 1$ et conclure.

IV Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

> **Théorème de Burnside**
> Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Q 30. Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leqslant n - 1$.

Q 31. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

Q 32. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.

BY-NC-SA

Q 33. Montrer que $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

Q 34. Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Q 35. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})$.

V Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

V.A – Recherche d'un élément de rang 1

Q 36. Soient x et y deux éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

On pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $\{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\}$.

Q 37. Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}\, v.$$

Considérer x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}\, v$.

Q 38. En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

V.B – Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ soit une base de $\ker u_0$.

Q 39. Montrer qu'il existe $u_1, ..., u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Q 40. Conclure.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2019

4 heures

Calculatrice autorisée

Le sujet est composée de trois parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de α_{2n+1} en faisant appel à des outils analytiques et notamment à la fonction zêta de Riemann.

Dans la partie III, on définit les permutations alternantes. On procède d'abord à leur dénombrement, avant de s'intéresser à des aspects probabilistes.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II.

I Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A – Dérivées successives

Q 1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

Q 2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

Q 3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

Q 4. Montrer

$$\forall x \in I, \qquad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

Q 5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

I.B – Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

Q 6. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \pi/2[, \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).$$

CC BY-NC-SA

Q 7. En déduire la minoration $R \geqslant \pi/2$.

Q 8. Montrer

$$\forall x \in I, \qquad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

Q 9. Montrer

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = g(x).$$

Considérer les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$.

Q 10. En déduire que $R = \pi/2$.

I.C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q 11. Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

Q 12. En déduire

$$\forall x \in I, \qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

Q 13. Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Q 14. Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.

Q 15. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

II Équivalent de α_{2n+1}

II.A – La fonction zêta

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Q 16. Montrer que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Q 17. Encadrer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ par deux intégrales et en déduire $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

Q 18. Déterminer $C(s)$ tel que

$$\forall s \in]1, +\infty[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s)\,\zeta(s).$$

II.B – Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $I_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

Q 19. Montrer

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}(x) \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

BY-NC-SA

Q 20. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\pi x) = \pi x\, \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Q 21. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in]0,1[, \qquad \cos(\pi x) = \frac{1}{2}\, \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\, \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

II.C – Un autre développement de tangente

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose $J = [0, 1/2[$ et, pour tout entier naturel n et tout réel x de J,

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right).$$

Q 22. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall s \in]1, +\infty[, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \frac{1}{2(s-1)}\, \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

Q 23. Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction S_n est définie sur J.

Q 24. Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur J vers la fonction nulle.

Q 25. En dérivant $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$, montrer

$$\forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{8x}{(2k-1)^2}\, \frac{1}{1 - \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

Q 26. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1)\zeta(2p)\, x^{2p-1}.$$

Q 27. Montrer l'inégalité $t\cos(t) \leqslant \sin(t)$, pour tout t de $[0, \pi/2]$.

Q 28. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant -I'_n(x) \leqslant \frac{4x}{n} I_n(x)$$

puis, pour $x \in [0,1]$, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I'_n(x)}{I_n(x)}$.

Q 29. En déduire l'égalité

$$\forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2\left(2^{2p} - 1\right) \zeta(2p)\, x^{2p-1}.$$

II.D – Un équivalent de α_{2n+1}

Q 30. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{2\left(2^{2n+2} - 1\right)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

Q 31. En déduire un équivalent de α_{2n+1} lorsque n tend vers l'infini.

BY-NC-SA

III Permutations alternantes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une liste de n nombres réels. On dit que la liste $(x_1, ..., x_n)$ est alternante montante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) > 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. On dit qu'elle est alternante descendante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) < 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.

Autrement dit, la liste $(x_1, ..., x_n)$ est alternante montante si elle vérifie les inégalités $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \cdots$. Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

Par exemple, $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$ est alternante montante car $1 < 5 > 3 < 11 > 8 < 9$ et $(7, 4, 5, 2, 12)$ est alternante descendante car $7 > 4 < 5 > 2 < 12$.

On dit qu'une permutation σ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ est alternante montante (respectivement alternante descendante).

Par exemple, avec $n = 7$ et en représentant toute permutation σ par la liste des images $(\sigma(1), ..., \sigma(7))$, on constate que $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$ représente une permutation alternante montante et $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$ une permutation alternante descendante.

III.A – Dénombrement des permutations alternantes

Q 32. Déterminer les permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$ pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

Q 33. Montrer, pour tout $n \geqslant 2$, que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

Si $n \geqslant 2$, on note β_n le nombre de permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$, et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

Q 34. Soient k et n deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$ et A une partie à k éléments de $[\![1, n]\!]$. On considère les listes $(x_1, ..., x_k)$ constituées de k éléments deux à deux distincts de A. Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à β_k.

Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

Q 35. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, $2\beta_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}$.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, dénombrer les permutations σ alternantes (montantes ou descendantes) de $[\![1, n+1]\!]$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$.

Q 36. En déduire que $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.B – Permutations aléatoires

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on munit l'ensemble Ω_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme. On note p_n la probabilité qu'une permutation dans Ω_n soit alternante montante. On convient de plus que $p_0 = p_1 = 1$.

Q 37. Montrer que la suite (p_n) tend vers 0. Donner un équivalent de p_{2n+1} quand n tend vers l'infini.

On définit une variable aléatoire M_n sur Ω_n en associant à toute permutation $\sigma \in \Omega_n$ l'entier $M_n(\sigma)$ tel que :

— $M_n(\sigma) = 2$ si $\sigma(1) > \sigma(2)$;
— $M_n(\sigma) = 3$ si $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$;
— $M_n(\sigma) = 4$ si $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) > \sigma(4)$;
— ...
— $M_n(\sigma) = n + 1$ si σ est alternante montante.

En d'autres termes, $M_n(\sigma) = k+1$, où k est le plus grand entier tel que $(\sigma(1), ..., \sigma(k))$ soit alternante montante.

On note $\mathbb{E}(M_n)$ l'espérance de M_n.

Q 38. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, montrer $\mathbb{P}(M_n > i) = p_i$.

Q 39. Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ en fonction de p_0, p_1, ..., p_n. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_n) = \dfrac{\sin(1) + 1}{\cos(1)}$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI

2019

4 heures Calculatrice autorisée

Nombres de Fibonacci

Notations

Dans tout le problème on note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $\psi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$.

La suite de Fibonacci est la suite de nombres réels $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Objectifs

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines propriétés de la suite de Fibonacci et d'en donner des applications en théorie des nombres, en informatique et en probabilités.

Les parties IV et V utilisent des résultats démontrés dans les parties I et II. La partie III est grandement indépendante des autres, mais fait appel aux notations données en introduction.

I Préliminaires

I.A –

Q 1. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs de F_k pour $k \in [\![0, 15]\!]$.

Q 2. Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite d'entiers strictement croissante.

Q 3. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

I.B –

Q 4. Montrer que l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet comme solutions les nombres φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$.

Q 5. Vérifier les égalités $\varphi - \dfrac{1}{\varphi} = 1$, $\varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$ et $\psi = \dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{1}{\varphi+1}$.

Q 6. Démontrer l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}).$$

II Séries génératrices de Fibonacci

On s'intéresse dans cette partie aux séries entières de la variable réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} F_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!} x^n$.

On note respectivement $A(x)$ et $B(x)$ leurs sommes lorsqu'elles sont définies.

On pourra utiliser les résultats de la partie I.

II.A –

Q 7. Donner un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 8. En déduire les rayons de convergence des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} F_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!} x^n$.

CC BY-NC-SA

***II.B** –*

Q 9. En utilisant la relation de récurrence définissant la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]-\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi}[$,

$$(1-x-x^2)A(x)=x.$$

Q 10. Pour tout nombre réel x différent de $-\varphi$ et $\frac{1}{\varphi}$, vérifier que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\varphi x}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+x/\varphi}=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

Q 11. Décomposer en série entière au voisinage de 0 les deux fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{1-\varphi x}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{1+x/\varphi}$; on précisera les rayons de convergence de chacune de ces séries.

Q 12. Retrouver le résultat de la question 6.

***II.C** –*

Q 13. Montrer que, pour tout nombre réel x, $B(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{e}^{\varphi x}-\mathrm{e}^{-x/\varphi}\right)$.

Q 14. À l'aide du résultat précédent et des égalités de la question 5, démontrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad B(x)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{F_{2n}}{n!}x^n.$$

Q 15. En calculant la dérivée n-ième en zéro de chacun des deux membre de l'égalité précédente, démontrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k=F_{2n}.$$

III Représentation intégrale de la suite de Fibonacci

Dans cette partie, on étudie une fonction dont la décomposition de Fourier fait intervenir le nombre ψ défini dans les notations et on signale une formule récente donnant une expression intégrale des termes de la suite de Fibonacci.

On note f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+4\sin^2 x}$.

La fonction f étant π-périodique, ses coefficients de Fourier sont définis par

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2kx)\,\mathrm{d}x\quad\text{et}\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x.$$

***III.A** –*

Q 16. Justifier que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $b_k=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de b_k.

Q 17. Montrer que $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Q 18. À l'aide du changement de variable $t=\tan(x)$ montrer que $a_0=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

On admettra dans la suite que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $a_k=\dfrac{2\psi^k}{\sqrt{5}}$.

BY-NC-SA

III.B –

Q 19. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{+\infty} \psi^k \cos(2kx).$$

Q 20. Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1+4\sin^2 x}\right)^2 \mathrm{d}x$ comme somme d'une série géométrique et en déduire sa valeur.

Dans la poursuite de ce type de calculs, il a été démontré en 2015 que, pour tout entier naturel n

$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(x/2)(2\sin(nx)\sin(x) - \cos(nx)) \frac{f(x)}{x} \,\mathrm{d}x.$$

IV Temps d'attente de (Pile, Pile) dans un jeu de pile ou face infini

On modélise un jeu de Pile ou Face par une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

On convient que l'événement $(X_n = 1)$ modélise la situation « obtenir Pile au n-ième lancer ».

On admet qu'on définit une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ par

— $Y = 0$ si on n'obtient jamais deux Pile consécutifs ;

— sinon, Y est égale au plus petit entier naturel non nul n tel que $X_n = X_{n+1} = 1$.

On pourra utiliser les résultats des parties I et II.

IV.A –

Q 21. Calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$, $\mathbb{P}(Y = 2)$, $\mathbb{P}(Y = 3)$ et $\mathbb{P}(Y = 4)$.

IV.B –

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'évènement « la liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ne comporte pas deux 1 consécutifs » et on pose $C_0 = \Omega$.

Q 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(Y = n+2) = \frac{1}{8}\mathbb{P}(C_n)$.

Q 23. Justifier, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité des deux événements

$$(X_1 = 1) \cap C_n \qquad \text{et} \qquad (X_1 = 1) \cap (X_2 = 0) \cap C_n.$$

Q 24. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_{n-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_{n-2})$.

Q 25. Donner alors une relation simple entre $\mathbb{P}(Y = n+2)$, $\mathbb{P}(Y = n+1)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$, valable tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 26. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2^{n+1}} F_n$.

IV.C –

Q 27. En utilisant le résultat de la question 9, calculer la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.

Q 28. Interpréter ce résultat.

Q 29. Montrer que Y admet une espérance et calculer sa valeur.

BY-NC-SA

V Décomposition d'un entier

Le but de cette partie est de montrer que tout nombre entier naturel non nul peut s'écrire, de manière unique, comme une somme de certains termes de la suite de Fibonacci et d'en déduire un codage binaire des nombres entiers naturels. Ce codage et son décodage sont ensuite implantés en langage Python.

On pourra utiliser les résultats de la partie I.

Si n est un entier naturel non nul, on dit que n admet une F-décomposition s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et des entiers naturels k_1, k_2, ..., k_r supérieurs ou égal à 2 et tels que

i. $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $k_{i+1} - k_i > 1$, ce qui traduit que les nombres F_{k_i} et $F_{k_{i+1}}$ ne sont pas des termes consécutifs de la suite de Fibonacci ;

ii. $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$.

Si $r = 1$, on adopte la convention que la proposition i est vérifiée.

L'écriture $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$, si elle existe, est alors appelée une F-décomposition de l'entier naturel n.

V.A –

Q 30. Les égalités $100 = 3+8+89$, $100 = 1+2+8+89$ et $100 = 3+8+34+55$ sont-elles des F-décompositions de 100 ?

Q 31. Utiliser la calculatrice pour donner une F-décomposition de 32, puis une F-décomposition de 272.

V.B –

Q 32. On suppose qu'un entier n admet une F-décomposition de la forme $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$. Montrer, par récurrence sur r, que $F_{k_r} \leqslant n < F_{k_r+1}$.

Q 33. En déduire que, sous réserve d'existence, la F-décomposition de n est unique.

Q 34. Montrer que tout entier naturel non nul n admet une unique F-décomposition.

V.C –

Q 35. Écrire une fonction Python `fibonacci` qui prend en paramètre un entier naturel p et renvoie la liste des $p+1$ premiers termes de la suite de Fibonacci. Par exemple `fibonacci(5)` doit renvoyer `[0, 1, 1, 2, 3, 5]`.

Q 36. Écrire une fonction Python `recherche` qui prend en paramètre un entier naturel n et renvoie le plus grand entier naturel p tel que $F_p \leqslant n$. Par exemple, `recherche(7)` doit renvoyer `5`.

Q 37. Écrire une fonction Python `Fdecomposition` qui prend en paramètre un entier naturel n non nul et renvoie sa F-décomposition sous forme d'une liste croissante d'entiers. Par exemple, `Fdecomposition(100)` doit renvoyer `[3, 8, 89]`.

V.D – Une fois qu'on dispose de la F-décomposition d'un entier naturel n non nul, on lui associe une liste composée de 0 et de 1 de la manière suivante :

— on écrit en ligne la liste de tous les termes de la suite de Fibonacci inférieurs ou égaux à n, en commençant à partir de F_2 ;

— en-dessous de chaque terme de cette liste, on inscrit 1 si ce terme figure dans la F-décomposition de n et 0 s'il n'y figure pas ;

— on obtient une liste formée de 0 et de 1 qu'on « normalise » en ajoutant un 1 en dernière position.

Ce principe est appelé *codage de Fibonacci*.

Q 38. Vérifier que 100 est codé par la liste `[0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1]`.

Q 39. Écrire une fonction Python `codage` qui prend en paramètre un entier naturel n non nul et renvoie son codage de Fibonacci sous forme d'une liste de zéros et de uns. Par exemple, `codage(100)` doit renvoyer la liste `[0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1]`.

Q 40. Écrire une fonction Python `decodage` qui prend en paramètre une liste non vide constituée de 0 et de 1 et qui renvoie l'entier naturel qu'elle code. Par exemple, `decodage([0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1])` doit renvoyer l'entier 100.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — TSI — 2019

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note :

— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels ;

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;

— I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales ;

— $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques ;

— $A^\top$ la transposée de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathrm{tr}(A)$ la trace de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels ;

— χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathrm{E}_{i,j}^{(n,p)}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qui a tous ses coefficients nuls sauf le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1. Lorsque $n = p$, on simplifie l'écriture en notant $\mathrm{E}_{i,j}^{(n)}$ la matrice $\mathrm{E}_{i,j}^{(n,n)}$.

On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne.

On admet que $\left(\mathrm{E}_{i,j}^{(n,p)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Mis à part les questions 31 et 38, les parties I, II et III sont indépendantes. Dans la partie III, les questions 34, 35, 36 et 37 sont indépendantes de ce qui précède. La partie IV dépend fortement des parties II et III.

I Matrices compagnons

Si $(a_1, ..., a_p)$ est un p-uplet de nombres réels, on note $C(a_1, ..., a_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p \end{pmatrix}$.

I.A – Étude d'un premier exemple

Dans cette question on suppose $p = 3$ et $A = C(-2, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q 1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Q 2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}$$

I.B – Étude d'un second exemple

Dans cette question on suppose $p = 3$, $B = C(1, -3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q 3. Déterminer le polynôme caractéristique de B et une base de chacun des sous-espaces propres de B.

Q 4. Montrer que B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais qu'elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère le vecteur colonne $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

Q 5. Déterminer un vecteur colonne $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Bv_2 = v_1 + v_2$.

Q 6. Déterminer un vecteur colonne $v_3 = \begin{pmatrix} z \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Bv_3 = v_2 + v_3$.

Q 7. En déduire une matrice R inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = RTR^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I.C – On revient au cas général, où $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = C(a_1, ..., a_p)$.

Q 8. Montrer par récurrence sur p que le polynôme caractéristique de C est

$$\chi_C(X) = X^p - a_pX^{p-1} - \cdots - a_2X - a_1$$

Q 9. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors le rang de $C - \lambda \mathrm{I}_p$ est supérieur ou égal à $p - 1$; en déduire que les sous-espaces propres de C sont de dimension 1.

Q 10. Montrer que C est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de C est scindé à racines simples.

I.D –

Q 11. On considère un polynôme unitaire P de $\mathbb{R}[X]$ de degré p. Montrer qu'il existe un unique $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $P = \chi_C$ où $C = C(a_1, ..., a_p)$.

Q 12. Étant donné un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur Q pour que ce polynôme soit le polynôme caractéristique d'une matrice.

II Matrices symétriques positives

Dans cette partie, on considère un entier naturel n non nul. On rappelle que la norme euclidienne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est définie par $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en particulier $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top X \geqslant 0$.
Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice réelle symétrique. On dit que A est positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX \geqslant 0$.

II.A –

Q 13. Montrer que si $(\lambda, \mu) \in {\mathbb{R}^+}^2$ et si A et B sont des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\lambda A + \mu B$ est une matrice symétrique positive.

Q 14. Montrer que si A est une matrice symétrique positive, alors $A^\top$ l'est aussi.

II.B – On considère une matrice symétrique positive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 15. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) P^\top$$

Q 16. On considère $i \in \{1, ..., n\}$ et un vecteur propre $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de A associé à λ_i. Montrer que

$$\lambda_i \|X_i\|^2 = X_i^\top AX_i$$

Q 17. En déduire que les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de A sont toutes positives.

Q 18. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $a + c \geqslant 0$ et $ac - b^2 \geqslant 0$.

II.C – Réciproquement, on considère une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives. Il existe alors une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) P^\top$$

Q 19. On considère $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = P^\top X$. On note $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, montrer que

$$X^\top AX = {X'}^\top \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) X' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x'_i}^2$$

Q 20. En déduire que A est une matrice symétrique positive.

BY-NC-SA

Q 21. Montrer que si A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors A est symétrique positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

II.D – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 22. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$. Montrer que A est symétrique positive.

Q 23. Réciproquement, on suppose que A est une matrice symétrique positive. En utilisant la sous-partie II.B, montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$.

III Produits de Kronecker

Soient n, n', p, p', des entiers $\geqslant 1$. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n'} \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$, on définit le produit de Kronecker (ou produit tensoriel) de A et B noté $A \otimes B$ par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n'}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np,n'p'}(\mathbb{R})$$

Par exemple dans le cas $n = n' = p = p' = 2$ on a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha & a_{1,1}\beta & a_{1,2}\alpha & a_{1,2}\beta \\ a_{1,1}\gamma & a_{1,1}\delta & a_{1,2}\gamma & a_{1,2}\delta \\ a_{2,1}\alpha & a_{2,1}\beta & a_{2,2}\alpha & a_{2,2}\beta \\ a_{2,1}\gamma & a_{2,1}\delta & a_{2,2}\gamma & a_{2,2}\delta \end{pmatrix}$$

III.A – On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Q 24. Calculer $A \otimes B$ et $X \otimes Y$.

Q 25. Justifier sans calcul que la matrice $A \otimes B$ est diagonalisable.

Q 26. Vérifier que X est un vecteur propre de A, que Y est un vecteur propre de B et que $X \otimes Y$ est un vecteur propre de $A \otimes B$.

III.B – Dans cette sous-partie uniquement, on énonce des propriétés vraies pour tous $n, n', p, p' \in \mathbb{N}^*$, et *on demande de faire les preuves seulement dans le cas où* $n = n' = p = p' = 2$.

Q 27. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$, $A' \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ montrer que

$$(\alpha A + A') \otimes B = \alpha A \otimes B + A' \otimes B \tag{III.1}$$

Dans la suite du problème, on admettra que si de plus $B' \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ alors

$$A \otimes (\alpha B + B') = \alpha A \otimes B + A \otimes B' \tag{III.2}$$

Q 28. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ montrer que $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sont symétriques alors $A \otimes B$ est symétrique.

Q 29. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ démontrer que $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Dans la suite du problème, on admettra que si $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$, $A' \in \mathcal{M}_{n',n''}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ et $B' \in \mathcal{M}_{p',p''}(\mathbb{R})$ alors

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB') \tag{III.3}$$

III.C – On revient au cas général où n est un entier naturel non nul et on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associée à λ, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, μ une valeur propre de B et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de B associée à μ.

Q 30. Montrer que $X \otimes Y$ est un vecteur propre de $A \otimes B$ et que $\lambda\mu$ est une valeur propre de $A \otimes B$.

Q 31. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices symétriques positives montrer que $A \otimes B$ est une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$. On pourra utiliser les résultats des questions 22 et 23 ainsi que l'égalité (III.3).

III.D – On considère la base $(\mathrm{E}_{i,j}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra aussi utiliser la base $(\mathrm{E}_{i,j}^{(n^2)})_{1\leqslant i,j\leqslant n^2}$ de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

Q 32. On suppose dans cette question que $n = 2$. Calculer $\mathrm{E}_{1,2}^{(2)} \otimes \mathrm{E}_{2,1}^{(2)}$ et plus généralement les 16 produits tensoriels $\mathrm{E}_{i,j}^{(2)} \otimes \mathrm{E}_{k,l}^{(2)}$.

Q 33. Si $i, j, k, l \in \mathbb{N}^*$ exprimer $\mathrm{E}_{i,j}^{(n)} \otimes \mathrm{E}_{k,l}^{(n)}$ en fonctions d'éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

On admet dans la suite du problème que la famille des n^4 produits tensoriels $(\mathrm{E}_{i,j}^{(n)} \otimes \mathrm{E}_{k,l}^{(n)})$ pour $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$ est une base de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

On note τ_2 l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$ $\tau_2(\mathrm{E}_{i,j}^{(n)} \otimes \mathrm{E}_{k,l}^{(n)}) = \mathrm{E}_{i,j}^{(n)} \otimes (\mathrm{E}_{k,l}^{(n)})^\top$.

Q 34. Montrer que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\tau_2(A \otimes B) = A \otimes B^\top$.

III.E – Application aux entiers algébriques

On dit qu'un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique s'il est racine d'un polynôme unitaire P à coefficients dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire tel que $P(\alpha) = 0$.

Q 35. Démontrer que tout élément $\alpha \in \mathbb{Z}$ est un entier algébrique.

Q 36. Montrer que i et $\sqrt{2}$ sont des entiers algébriques.

Q 37. Prouver que le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un entier algébrique.

On *admet* que le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est lui-même à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Q 38. En utilisant la sous-partie I.D et la question 30, montrer que le produit $\alpha\beta$ de deux entiers algébriques α et β est un entier algébrique.

IV États quantiques de Werner

Dans cette partie, on étudie certains états quantiques introduits par le physicien Reinhard Werner en 1989. Chaque état de Werner représente l'état quantique d'un système à deux particules. Actuellement, ces thèmes sont au cœur de la physique contemporaine et font l'objet d'intenses recherches.

Soit $N \geqslant 1$ un entier. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un état quantique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $\mathrm{tr}(A) = 1$ et si A est une matrice symétrique positive. On note $\mathcal{Q}_N$ l'ensemble des états quantiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices symétriques positives de trace 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Q 39. Si $(A,B) \in (\mathcal{Q}_N)^2$ montrer que $\forall t \in [0,1]$, $tA+(1-t)B \in \mathcal{Q}_N$. On dit que $\mathcal{Q}_N$ est un ensemble convexe.

Q 40. On suppose que m est un entier naturel non nul. Montrer que si, $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $A_i \in \mathcal{Q}_n$, $B_i \in \mathcal{Q}_n$, $p_i \in \mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i A_i \otimes B_i \in \mathcal{Q}_{n^2}$.

Un état quantique $C \in \mathcal{Q}_{n^2}$ est dit séparable si on peut l'écrire sous la forme

$$C = \sum_{i=1}^{m} p_i A_i \otimes B_i$$

pour un certain entier naturel m, des états quantiques A_i et B_i de $\mathcal{Q}_n$ et des réels $p_i \geqslant 0$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Q 41. Montrer que si un état C de $\mathcal{Q}_{n^2}$ est séparable alors la matrice $\tau_2(C)$ est symétrique positive (l'application τ_2 a été définie dans la sous-partie III.D).

On définit la matrice ligne Ψ de $\mathcal{M}_{1,n^2}(\mathbb{R})$ par

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_{1,i}^{(1,n)} \otimes \mathrm{E}_{1,i}^{(1,n)}$$

Q 42. Calculer le produit $\Psi^\top \Psi$.

Q 43. Montrer que $\Psi^\top \Psi$ est un état quantique de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

On suppose dans la suite que $n = 2$.

Q 44. Préciser la matrice $\Psi^\top \Psi$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Soit $0 \leqslant p \leqslant 1$. On définit la matrice $W_p = p\Psi^\top \Psi + (1-p)\dfrac{1}{4}\mathrm{I}_4$.

Q 45. Montrer que W_p est un état quantique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On l'appelle état quantique de Werner.

Q 46. Expliciter la matrice W_p.

Q 47. Expliciter la matrice $\tau_2(W_p)$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et calculer ses valeurs propres.

Q 48. En utilisant la question 41, démontrer qu'il existe un intervalle I inclus dans $[0,1]$ tel que $\forall p \in I$, W_p n'est pas séparable.

Ce résultat traduit que, pour les valeurs de p dans cet intervalle, l'état quantique des deux particules est global, on ne peut pas le décrire en séparant les particules l'une de l'autre.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures

Calculatrice autorisée

2020

Fonctions arithmétiques multiplicatives et applications

La première partie établit des résultats utiles dans les parties suivantes, qui sont indépendantes entre elles.

Notations

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

On note $m \wedge n$ le plus grand commun diviseur (pgcd) des entiers naturels m et n.

Si a et b sont deux nombres entiers relatifs, on note $[\![a, b]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k \leqslant b\}$.

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n.

Le terme d'indice (i, j) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté m_{ij} et on note $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, ou plus simplement $M = (m_{ij})$ lorsque la taille de M est implicite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des nombres entiers naturels divisant n et on écrit $\displaystyle\sum_{d|n} = \sum_{d\in\mathcal{D}_n}$ la somme sur tous les nombres entiers naturels d divisant n.

Une *fonction arithmétique* est une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions arithmétiques est noté $\mathbb{A}$.

On dit qu'une fonction arithmétique $f \in \mathbb{A}$ est *multiplicative* si

$$\begin{cases} f(1) \neq 0, \\ \forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad m \wedge n = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n). \end{cases}$$

On note $\mathbb{M}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives.

On note $\mathbf{1}$, δ et $\mathbf{I}$ les fonctions arithmétiques

$$\mathbf{1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{C} \\ n \mapsto 1 \end{array} \right. \qquad \delta : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{C} \\ n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases} \end{array} \right. \qquad \mathbf{I} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{C} \\ n \mapsto n \end{array} \right.$$

On remarque que ces trois fonctions arithmétiques sont multiplicatives.

Si f et g sont deux fonctions arithmétiques, le *produit de convolution* de f et g est la fonction arithmétique notée $f * g$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

I Quelques résultats utiles

I.A – Propriétés générales de la loi $*$

Q 1. Vérifier que δ est un élément neutre pour la loi $*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid d_1 d_2 = n\}$.

Q 2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f * g)(n) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{C}_n} f(d_1) g(d_2).$$

Q 3. En déduire que $*$ est commutative.

Q 4. De même, en exploitant l'ensemble $\mathcal{C}'_n = \{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid d_1 d_2 d_3 = n\}$, montrer que $*$ est associative.

Q 5. Que peut-on dire de $(\mathbb{A}, +, *)$?

CC BY-NC-SA

I.B – Groupe des fonctions multiplicatives

Q 6. Soient f et g deux fonctions multiplicatives. Montrer que si

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(p^k) = g(p^k),$$

alors $f = g$.

Q 7. Soient m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que l'application

$$\pi : \left| \begin{array}{c} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \to \mathcal{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) \mapsto d_1 d_2 \end{array} \right.$$

est bien définie et réalise une bijection entre $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}_{mn}$.

Q 8. En déduire que si f et g sont deux fonctions multiplicatives, alors $f * g$ est encore multiplicative.

Q 9. Soit f une fonction multiplicative. Montrer qu'il existe une fonction multiplicative g telle que, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} f(p^i) g(p^{k-i})$$

et qu'elle vérifie $f * g = \delta$.

Q 10. Que dire de l'ensemble $\mathbb{M}$ muni de la loi $*$?

I.C – La fonction de Möbius

Soit μ la fonction arithmétique définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 11. Montrer que μ est multiplicative.

Q 12. Montrer que $\mu * \mathbf{1} = \delta$.

Q 13. Soit $f \in \mathbb{A}$, et soit $F \in \mathbb{A}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right). \tag{I.1}$$

On note φ la fonction indicatrice d'Euler, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n) = \mathrm{card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\}.$$

Q 14. Démontrer que $\varphi = \mu * \mathbf{I}$.

I.D – Déterminant de Smith

Soient f une fonction arithmétique, $n \in \mathbb{N}^*$ et $g = f * \mu$. On note $M = (m_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $m_{ij} = f(i \wedge j)$. On définit aussi la *matrice des diviseurs* $D = (d_{ij})$ par :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit M' la matrice de terme général $m'_{ij} = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Q 15. Montrer que $M = M' D^\top$, où $D^\top$ est la transposée de D.

Q 16. En déduire que le déterminant de M vaut

$$\det M = \prod_{k=1}^{n} g(k). \tag{I.2}$$

BY-NC-SA

I.E – Séries de Dirichlet

Soit f une fonction arithmétique. On définit, pour tout réel s tel que la série converge,

$$L_f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s}.$$

On appelle *abscisse de convergence* de L_f

$$A_c(f) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \text{la série } \sum \frac{f(k)}{k^s} \text{ converge absolument}\}.$$

On convient que $A_c(f) = +\infty$ s'il n'existe pas de réel s tel que la série $\sum \frac{f(k)}{k^s}$ converge absolument.

Q 17. Montrer que si $s > A_c(f)$, alors la série $\sum \frac{f(k)}{k^s}$ converge absolument.

Q 18. Soient f et g deux fonctions arithmétiques d'abscisses de convergence finies. Montrer que si, pour tout $s > \max(A_c(f), A_c(g))$, $L_f(s) = L_g(s)$, alors $f = g$.

Q 19. Soient f et g deux fonctions arithmétiques d'abscisses de convergence finies. Montrer que, pour tout $s > \max(A_c(f), A_c(g))$,

$$L_{f*g}(s) = L_f(s)L_g(s). \tag{I.3}$$

II Matrices et endomorphismes de permutation

Dans cette partie n est un entier naturel non nul.

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. On notera la composition des permutations de manière multiplicative ; par exemple, si γ et σ sont deux permutations de $\mathfrak{S}_n$, $\gamma^3\sigma^2 = \gamma \circ \gamma \circ \gamma \circ \sigma \circ \sigma$.

On dit que deux permutations σ et τ de $\mathfrak{S}_n$ sont *conjuguées* s'il existe une permutation $\rho \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$.

Pour $\ell \in [\![2, n]\!]$, on rappelle que, dans $\mathfrak{S}_n$, un *cycle de longueur* ℓ est une permutation $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ pour laquelle il existe ℓ éléments deux à deux distincts $a_1, ..., a_\ell$ de $[\![1, n]\!]$ tels que

$$\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \{a_1, ..., a_\ell\}, \\ a_{i+1} & \text{si } x = a_i \text{ pour } i \leqslant \ell - 1, \\ a_1 & \text{si } x = a_\ell. \end{cases}$$

L'ensemble $\text{Supp}(\gamma) = \{a_1, ..., a_\ell\}$ est appelé *support* du cycle γ et on note $\gamma = (a_1\ a_2 \cdots a_\ell)$. On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration.

> Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de cycles $\gamma_1, ..., \gamma_r$ à supports disjoints : $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$.

À toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la matrice de permutation $P_\sigma = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.A – Similitude de deux matrices de permutation

L'objectif de cette sous-partie est de démontrer la propriété (S) suivante.

> Les matrices de permutations P_σ et P_τ sont semblables si et seulement si les permutations σ et τ sont conjuguées.

Q 20. Pour toutes permutations ρ, $\rho' \in \mathfrak{S}_n$, montrer que $P_{\rho\rho'} = P_\rho P_{\rho'}$. En déduire que, pour toutes permutations σ, $\tau \in \mathfrak{S}_n$, si σ et τ sont conjuguées alors P_σ et P_τ sont semblables.

Q 21. On considère, dans cette question uniquement, $n = 7$ et les cycles $\gamma_1 = (1\ 3\ 7)$ et $\gamma_2 = (2\ 6\ 4)$. On considère également une permutation $\rho \in \mathfrak{S}_7$ telle que $\rho(1) = 2$, $\rho(3) = 6$ et $\rho(7) = 4$. Vérifier que $\rho\gamma_1\rho^{-1} = \gamma_2$.

Q 22. Plus généralement, montrer que, dans $\mathfrak{S}_n$, deux cycles de même longueur sont conjugués.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\ell \in [\![2, n]\!]$, on note $c_\ell(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur ℓ dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints. On note $c_1(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ :

$$c_1(\sigma) = \text{Card}\{j \in [\![1, n]\!], \sigma(j) = j\}.$$

Q 23. Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ sont conjugués si et seulement si, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, $c_\ell(\sigma) = c_\ell(\tau)$.

La matrice-ligne $T_\sigma = (c_1(\sigma)\ c_2(\sigma)\ ...\ c_n(\sigma))$ s'appelle le *type cyclique* de σ. On vient donc de démontrer que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type cyclique.

BY-NC-SA

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note χ_σ le polynôme caractéristique de la matrice P_σ : $\chi_\sigma(X) = \det(XI_n - P_\sigma)$.

Q 24. Soit $\ell \in [\![2, n]\!]$ et soit $\gamma \in \mathfrak{S}_\ell$ un cycle de longueur ℓ. Montrer que $\chi_\gamma(X) = X^\ell - 1$.

On pourra se ramener au cas $\gamma = (1\ 2 \cdots \ell)$ et considérer la matrice

$$\Gamma_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C}).$$

Q 25. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\chi_\sigma(X) = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)}$.

On pourra justifier que P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de la forme Γ_ℓ ($\ell \geqslant 1$), où Γ_ℓ est définie ci-dessus si $\ell \geqslant 2$ et où $\Gamma_\ell = (1)$ si $\ell = 1$.

Q 26. En raisonnant sur la multiplicité des racines de χ_σ et de χ_τ, montrer que si P_σ et P_τ sont semblables, alors, pour tout $q \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\sigma) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^{n} c_\ell(\tau).$$

(On somme sur les valeurs de ℓ multiples de q et appartenant à $[\![1, n]\!]$.)

Q 27. En déduire la propriété (S).

On pourra calculer $T_\sigma D$ où T_σ est le type cyclique de σ et D est la matrice des diviseurs définies au I.D.

II.B – Endomorphismes de permutation

Dans cette sous-partie, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit qu'un endomorphisme u de E est un *endomorphisme de permutation* s'il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $u(e_j) = e_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

On note Id_E l'identité de E.

On note $\mathrm{Tr}(u)$ la trace d'un endomorphisme u de E et χ_u son polynôme caractéristique.

Q 28. Montrer que u est un endomorphisme de permutation si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice de permutation.

Q 29. Soit u un endomorphisme de permutation de E. Montrer que u est diagonalisable et que sa trace appartient à $[\![0, n]\!]$.

Q 30. Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique.

Q 31. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est un endomorphisme de permutation si et seulement si $\mathrm{Tr}(u)$ est un entier naturel.

Q 32. Étudier si l'équivalence de la question précédente subsiste lorsqu'on remplace l'hypothèse $u^2 = \mathrm{Id}_E$ par $u^k = \mathrm{Id}_E$ pour $k = 3$, puis pour $k = 4$.

Q 33. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u est un endomorphisme de permutation si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(a) il existe des entiers naturels $c_1, ..., c_n$ tels que $\chi_u = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell}$;

(b) il existe N tel que $u^N = \mathrm{Id}_E$.

Q 34. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(u^k) = \mathrm{Tr}(v^k)$. Montrer que u et v ont même polynôme caractéristique.

Q 35. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer que u est un endomorphisme de permutation si et seulement s'il existe des entiers naturels $c_1, ..., c_n$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell|k}}^{n} \ell c_\ell.$$

(On somme sur les valeurs de ℓ divisant k et appartenant à $[\![1, n]\!]$.)

BY-NC-SA

III Valeurs propres de la matrice de Redheffer

On définit la matrice de Redheffer par $H_n = (h_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ où

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1, \\ 1 & \text{si } i \text{ divise } j \text{ et } j \neq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit également la fonction de Mertens M, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)$ où μ est la fonction de Möbius définie au I.C.

Q 36. Soient $A_n = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la matrice de terme général

$$a_{ij} = \begin{cases} \mu(j) & \text{si } i = 1, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $C_n = A_n H_n$. En calculant les coefficients de C_n, montrer que $\det H_n = M(n)$.

Pour le calcul du terme d'indice (i, j) de C_n, on pourra distinguer le cas $i = j = 1$, le cas $i = 1$, $j > 1$ et le cas $i > 1$, $j > 1$.

On note χ_n le polynôme caractéristique de H_n, de sorte que $\chi_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - H_n)$ pour tout réel λ.

Pour λ réel distinct de 1, on définit par récurrence la fonction arithmétique $\mathbf{b}$, en posant $\mathbf{b}(1) = 1$ et, pour tout entier naturel $j \geqslant 2$,

$$\mathbf{b}(j) = \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{d|j,\, d\neq j} \mathbf{b}(d).$$

On définit également la matrice $B_n(\lambda) = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de terme général

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{b}(j) & \text{si } i = 1, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 37. En calculant le produit $B_n(\lambda)(\lambda I_n - H_n)$, montrer que

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - (\lambda - 1)^{n-1} \sum_{j=2}^{n} \mathbf{b}(j).$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que λ est un réel distinct de 1 et on pose $w = \dfrac{1}{\lambda - 1}$.

On pose de plus $\mathbf{f} = (1 + w)\delta - w\mathbf{1}$.

Q 38. Montrer que $\mathbf{f} * \mathbf{b} = \delta$.

Q 39. En utilisant les notations des séries de Dirichlet données dans la sous-partie I.E, exprimer, pour des valeurs du réel s à préciser, $L_{\mathbf{f}}(s)$ en fonction de w et $L_{\mathbf{1}}(s)$.

On note $\log_2$ la fonction logarithme en base 2, définie par $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ pour tout réel $x > 0$.

Q 40. Montrer que, pour s réel suffisamment grand,

$$\frac{1}{L_{\mathbf{f}}(s)} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} m^{-s} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 m \rfloor} w^k D_k(m)$$

où $D_k(m)$ est le nombre de manières de décomposer l'entier m en un produit de k facteurs supérieurs ou égaux à 2, l'ordre de ces facteurs étant important.

Q 41. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_k(n) = \sum_{m=2}^{n} D_k(m)$. Déduire de la question précédente que

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\lambda - 1)^{n-k-1} S_k(n).$$

Q 42. Montrer enfin que H_n possède 1 comme valeur propre et que sa multiplicité est exactement

$$n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1.$$

• • • FIN • • •

CC BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures

Calculatrice autorisée

2020

Espaces à noyau reproduisant

Les espaces à noyau reproduisant ont des applications dans divers domaines comme l'apprentissage statistique ou la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Ce problème présente en partie III quelques exemples d'espaces à noyau reproduisant, l'un de ces exemples étant obtenu à partir de l'étude préalable dans la partie II d'un opérateur intégral. La partie IV propose quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant.

L'attention du candidat est attirée sur le fait que l'espace préhilbertien étudié *n'est pas le même* dans les différentes parties du problème.

Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire. On dit que E est un *espace à noyau reproduisant* sur I lorsqu'il vérifie les trois propriétés suivantes :

1. l'espace E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
2. pour tout $x \in I$, l'application $V_x : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ définie par $V_x(f) = f(x)$ est continue ;
3. pour tout $x \in I$, il existe une application $k_x \in E$ vérifiant,

$$\forall f \in E, \qquad f(x) = \langle k_x, f\rangle.$$

On appelle alors *noyau reproduisant* l'application K définie par

$$\forall (x,t) \in I^2, \qquad K(x,t) = k_x(t).$$

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1}, x_i]$.

I Préliminaires

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, de norme associée $\|\cdot\|$. Soit u un endomorphisme de E vérifiant,

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

Q 1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que l'orthogonal $F^\perp$ de F est stable par u.

On suppose qu'il existe un vecteur unitaire $x_0 \in F$ vérifiant

$$\langle u(x_0), x_0\rangle = \sup_{x\in F, \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle.$$

Pour tout vecteur unitaire $y \in F$ orthogonal à x_0, on pose, pour tout réel t,

$$\gamma(t) = x_0 \cos t + y \sin t,$$
$$\varphi(t) = \langle u\circ\gamma(t), \gamma(t)\rangle.$$

Q 2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q 3. Calculer $\|\gamma(t)\|$ puis justifier que $\varphi'(0) = 0$.

Q 4. En déduire que $u(x_0)$ est orthogonal à y.

Q 5. Montrer que x_0 est vecteur propre de u.

II Étude d'un opérateur

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, muni du produit scalaire défini par,

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

BY-NC-SA

On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tout $s \in [0,1]$, on définit la fonction k_s par,

$$\forall t \in [0,1], \qquad k_s(t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s, \\ s(1-t) & \text{si } t \geqslant s. \end{cases}$$

On note également, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $K(s,t) = k_s(t)$.

Q 6. Soit $s \in]0,1[$. Tracer la courbe représentative de k_s sur $[0,1]$.

Q 7. Montrer que K est continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

Pour tout $f \in E$, on pose,

$$\forall s \in [0,1], \qquad T(f)(s) = \int_0^1 k_s(t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 8. Montrer que T est un endomorphisme continu de E.

Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note p_k la fonction définie par $p_k(x) = x^k$.

Q 9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $T(p_k)$. En déduire que F est stable par T.

Q 10. En déduire $\big(T(p)\big)''$ pour tout $p \in F$.

Q 11. Soit $f \in E$. Calculer $T(f)(0)$ et $T(f)(1)$.

Q 12. Pour tout $f \in E$, montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ puis que $T(f)'' = -f$.

Q 13. Montrer que T est injectif.

Q 14. Déterminer l'image de T.

Q 15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de T et f un vecteur propre associé. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $\lambda f'' = -f$.

Q 16. Déterminer les valeurs propres de T et montrer que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$. On note $G = \mathrm{Vect}\big((g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\big)$ et $H = G^\perp$.

Q 17. Justifier que, pour tout $(f,g) \in E^2$, on a

$$\langle T(f), g\rangle = \langle f, T(g)\rangle$$

On pourra utiliser la question 12.

On admet que,

$$H \neq \{0\} \implies \exists f \in H \text{ telle que } \begin{cases} \|f\| = 1, \\ \langle T(f), f\rangle = \sup\limits_{h\in H, \|h\|=1} \langle T(h), h\rangle. \end{cases}$$

Q 18. En déduire que $H = \{0\}$.

Q 19. Montrer que la famille de vecteurs $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale.

On admet pour la suite que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite totale.

Pour tout $f \in E$, on pose,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \langle f, g_k\rangle g_k(x).$$

Q 20. Montrer que Φ est continue.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $f_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \langle f, g_k\rangle g_k$.

Q 21. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \|T(f_N) - \Phi\| = 0.$$

Q 22. En déduire $T(f) = \Phi$.

BY-NC-SA

III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

Dans cette partie, E_1 désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

III.A – Un exemple

Q 23. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E_1 en posant

$$\forall (f,g) \in (E_1)^2, \qquad (f \mid g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite de cette partie, on désigne par N la norme associée à ce produit scalaire.

Q 24. Montrer que, pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$, on a

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leqslant \sqrt{x \int_0^x \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t}.$$

On pose, pour tout $f \in E_1$,

$$U(f)(s) = \int_0^1 k_s'(t)f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

où k_s a été défini dans la partie précédente.

Q 25. Soit $f \in E_1$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $U(f) = -T(f'')$. En déduire que $U(f) = f$.

Q 26. Montrer que U est l'application identité de E_1.

Q 27. Démontrer que l'espace préhilbertien $(E_1, (\cdot \mid \cdot))$ est un espace à noyau reproduisant et que son noyau reproduisant est l'application K définie dans la partie précédente.

III.B – Un contre-exemple

On considère à nouveau l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 28. Montrer que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ n'est pas un espace à noyau reproduisant.

III.C – Fonctions développables en série entière

Q 29. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que la série $\sum (a_n)^2$ soit convergente.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.

Dans la suite de cette sous-partie, on considère l'ensemble E_2 des fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\sum (a_n)^2$ convergente. Pour f, $g \in E_2$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \qquad \text{où } f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ et } g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

Q 30. Montrer que E_2 muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un espace préhilbertien réel.

Q 31. Soit $x \in]-1,1[$. Déterminer $g_x \in E_2$ tel que, pour tout $f \in E_2$,

$$f(x) = \langle g_x, f\rangle$$

Q 32. En déduire que E_2 est un espace à noyau reproduisant et préciser son noyau.

BY-NC-SA

III.D – Autre exemple parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

On se donne dans cette sous-partie un réel $a > 0$.

On considère l'espace E_3 des fonctions $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, a]$, et vérifiant $f(0) = 0$. On munit E_3 du produit scalaire défini, pour f, $g \in E_3$, par

$$(f \mid g) = \int_0^a f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 33. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ est un noyau reproduisant sur $(E_3, (\cdot \mid \cdot))$.

Soit E_4 l'espace des fonctions continues sur $[0, a]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifiant de plus $f(a) = 0$. Soit $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\varphi(a) = 0$ et, pour tout $x \in [0, a]$, $\varphi'(x) < 0$.

Q 34. Déterminer un produit scalaire sur E_4 tel que la fonction $(x, y) \mapsto \min(\varphi(x), \varphi(y))$ soit un noyau reproduisant sur l'espace préhilbertien E_4.

IV Quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant

IV.A – Continuité

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace à noyau reproduisant sur un intervalle I, de noyau reproduisant K. Pour tout $(x, y) \in I^2$, on pose $k_x(y) = K(x, y)$.

Soit $x \in I$ et V_x définie sur E par $V_x(f) = f(x)$. On pose

$$N(V_x) = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Q 35. Démontrer que

$$N(V_x) = \sqrt{\langle k_x, k_x \rangle}.$$

On suppose que K est continue sur $I \times I$.

Q 36. Démontrer que toutes les fonctions de E sont continues.

IV.B – Construction d'un espace à noyau reproduisant

On note ici E l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère une fonction $A : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On s'intéresse à l'application $T : E \to E$ définie par

$$T(f)(x) = \int_0^1 A(x, t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On suppose que $\ker T$ est de dimension finie.

Q 37. Justifier que T induit un isomorphisme de $(\ker T)^\perp$ sur $\operatorname{Im} T$.

On note désormais S la bijection réciproque de cet isomorphisme.

On définit le produit scalaire φ sur $\operatorname{Im} T$ en posant, pour tout $(f, g) \in (\operatorname{Im} T)^2$,

$$\varphi(f, g) = \langle S(f), S(g) \rangle$$

On considère l'application K définie sur $[0, 1]^2$ par

$$K(x, y) = \int_0^1 A(x, t)A(y, t)\,\mathrm{d}t$$

Q 38. Montrer que $(\operatorname{Im} T, \varphi)$ est un espace à noyau reproduisant, de noyau K.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2020

Objectif

L'objectif de ce sujet est l'étude de la gestion des erreurs dans un processus industriel.

On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant n. On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n, noté $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, reste inférieur à une quantité de la forme amn, où $a > 1$ est une constante fixée et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer une probabilité de la forme $P(S_n > nam)$, dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque n tend vers l'infini.

Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1/2. Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième partie, d'étudier le cas où les variables aléatoires X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celui enregistré à l'instant n.

I Cas de la loi de Poisson

Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, mutuellement indépendantes, et suivant une loi de Poisson de paramètre 1/2.

L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de $P(S_n > n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et G_{X_n} la fonction génératrice de X_n.

I.A – Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Q 1. Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

Q 2. Expliciter le calcul de la fonction génératrice G_{X_1} de la variable aléatoire X_1.

Q 3. Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n$.

Q 4. Montrer que la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

I.B –

Q 5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = \mathrm{e}^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!\,n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leqslant \frac{n!\,n^k}{(n+k)!} \leqslant 1.$$

Q 7. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_k est définie sur $[0,+\infty[$ par $u_k : x \mapsto (1+kx)^{-k}(1/2)^k$ est normalement convergente sur $[0,+\infty[$.

BY-NC-SA

Q 8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Q 9. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$P(S_n > n) \sim \frac{\mathrm{e}^{-n/2}}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Q 10. En déduire, à l'aide de la formule de Stirling, qu'il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $P(S_n > n) = O(\alpha^n)$.

II Quelques résultats sur les matrices

L'objectif de cette partie est de démontrer un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui serviront dans la partie suivante.

Notations

— n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres *complexes* de A et pour $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$. On note $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

— On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* si tous ses coefficients sont positifs. On note alors $A \geqslant 0$.

— On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *strictement positive* si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.

— Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est dit *positif* si tous ses coefficients sont positifs. On note alors $x \geqslant 0$.

— Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est dit *strictement positif* si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $x > 0$.

— On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $A \geqslant B$ si $A - B \geqslant 0$.

— On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ par $x \geqslant y$ si $x - y \geqslant 0$.

— Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $|A|$ désigne la matrice $|A| = (|a_{i,j}|)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Si $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$ alors $|x|$ désigne le vecteur $|x| = (|x_i|)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

— On dit que $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(A)$ est une *valeur propre dominante* de A si, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{\lambda_0\}$, $|\lambda_0| > |\lambda|$.

On se propose de démontrer les deux propositions suivantes :

Proposition 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A. Le sous-espace propre associé $\ker(A - \rho(A)I_n)$ est de dimension 1 et est dirigé par un vecteur propre strictement positif.

Proposition 2

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive diagonalisable sur $\mathbb{C}$, si Y est un vecteur positif non nul de $\mathbb{R}^n$, alors $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ converge, lorsque p tend vers $+\infty$, soit vers le vecteur nul, soit vers un vecteur directeur strictement positif de $\ker(A - \rho(A)I_n)$.

Dans toute cette partie II, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **est une matrice strictement positive.**

II.A –

Q 11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \implies Ax \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0 \implies Ax > 0. \end{cases}$$

Q 12. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k > 0$.

Q 13. En déduire que $\rho(A) > 0$ puis montrer que $\rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) = 1$.

BY-NC-SA

Q 14. On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que, si $\rho(A) < 1$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Dans la suite du problème, on admettra que cette dernière implication est vraie même si la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

II.B – On suppose, dans les sous-parties II.B et II.C, que A est une matrice strictement positive vérifiant $\rho(A) = 1$.

On considère une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A de module 1 et x un vecteur propre associé à λ. On se propose de démontrer que 1 est valeur propre de A.

Q 15. Montrer que $|x| \leqslant A|x|$.

Dans les questions qui suivent, on suppose que $|x| < A|x|$.

Q 16. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A^2|x| - A|x| > \varepsilon A|x|$.

Q 17. On pose $B = \dfrac{1}{1+\varepsilon} A$. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $B^k A|x| \geqslant A|x|$.

Q 18. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k$.

Q 19. Conclure.

II.C –

Q 20. Montrer que A admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1.

Q 21. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1 de A.

On pourra admettre sans démonstration que si $z_1, z_2, ..., z_k$ sont des nombres complexes, tous non nuls, tels que $|z_1 + \cdots + z_k| = |z_1| + \cdots + |z_k|$, alors $\forall j \in [\![1, k]\!], \exists \lambda_j \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_j = \lambda_j z_1$.

Q 22. Montrer que $\dim(\ker(A - I_n)) = 1$.

Q 23. En regroupant les résultats des sous-parties II.B et II.C, justifier qu'on a démontré la proposition 1.

II.D – Dans cette sous-partie, on se propose de démontrer la proposition 2.

On suppose donc que A est strictement positive et diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_p = \left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$.

Q 24. Soit $\lambda \in S = \mathrm{sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$. Soit $Y \in \ker(A - \lambda I_n)$. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Q 25. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur positif. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté de Y sur $E_{\rho(A)}(A)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\lambda\in S} E_\lambda(A)$. Vérifier que, s'il est non nul, ce dernier vecteur (le projeté de Y) est strictement positif.

Dans la suite du problème, on admet que la proposition 2 se généralise à toute matrice A strictement positive, même non diagonalisable et que, si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur strictement positif, alors la suite (Y_p) converge vers un vecteur strictement positif dirigeant $E_{\rho(A)}(A)$.

II.E – Cette sous-partie permet de déterminer la valeur propre dominante $\rho(A)$ d'une matrice carrée A strictement positive de taille $n \geqslant 2$.

Q 26. Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, A^k est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire, dont on précisera les coefficients diagonaux.

Q 27. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} = \rho(A)$.

CC BY-NC-SA

III Une inégalité pour les chaînes de Markov

Dans toute cette partie III, N est un entier naturel non nul fixé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle d'entiers $[\![0,N]\!]$.

On suppose que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall (i_1,i_2,...,i_{n+1})\in[\![0,N]\!]^{n+1}$,

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},...,X_1=i_1)=P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n).$$

On suppose que pour tout $(i,j)\in[\![0,N]\!]^2$, $P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$ ne dépend pas de n et est strictement positif. On note alors $q_{i,j}=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une *chaine de Markov homogène* sur $[\![0,N]\!]$, de *matrice de transition* Q.

On attire l'attention sur les faits suivants :

— la numérotation des lignes et des colonnes de Q commence à 0 ;

— Q est une matrice carrée de taille $N+1$.

Dans toute la suite, pour $n\geqslant 1$ fixé, on pose Π_n la matrice colonne $\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\ \vdots\\ P(X_n=N)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.A – Justification de l'existence des lois $(\Pi_n)_{n\geqslant 1}$

Q 28. Justifier que $\forall i\in[\![0,N]\!]$, $\sum_{j=0}^{N} q_{i,j}=1$.

Q 29. Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Pi_{n+1}=Q^\top\,\Pi_n$.

Q 30. En déduire que la loi de X_1 détermine entièrement les lois de toutes les variables aléatoires X_n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Dans toute la suite, on considère une telle chaîne de Markov, et on pose

— $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ pour $n\in\mathbb{N}^*$;

— $a_{i,j}(t)=q_{i,j}\mathrm{e}^{jt}$ pour tout $(i,j)\in[\![0,N]\!]^2$ et tout $t\in\mathbb{R}$;

— $A(t)=\big(a_{i,j}(t)\big)_{0\leqslant i\leqslant N,0\leqslant j\leqslant N}\in\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$;

— $z_j(t)=P(X_1=j)\mathrm{e}^{jt}$ pour tout $j\in[\![0,N]\!]$ et tout $t\in\mathbb{R}$;

— $Z(t)=\begin{pmatrix}z_0(t)\\ \vdots\\ z_N(t)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.B – Définition de la fonction de taux λ

Soient n un entier naturel non nul et t un réel fixé.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire e^{tS_n} est égale

$$E(\mathrm{e}^{t\,S_n})=\sum_{j=0}^{N}Y_j^{(n)}(t)$$

où $Y^{(n)}(t)=\begin{pmatrix}Y_0^{(n)}(t)\\ \vdots\\ Y_N^{(n)}(t)\end{pmatrix}$ est le vecteur colonne défini par $Y^{(n)}(t)=\big(A(t)\big)^{n-1}\,Z(t)$.

Q 31. Justifier que $A(t)$ possède une valeur propre dominante $\gamma(t)>0$.

Q 32. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\big(E(\mathrm{e}^{t\,S_n})\big)}{n}=\lambda(t)$ où $\lambda(t)=\ln(\gamma(t))$.

BY-NC-SA

III.C – Dans cette sous-partie, on étudie deux programmes écrits en langage Python. On suppose que la bibliothèque `numpy` a été importée à l'aide de l'instruction

```
import numpy as np
```

On rappelle que les opérations suivantes sont alors disponibles.

— `range(n)` renvoie la séquence des `n` premiers entiers $(0 \to n-1)$.

— `np.array(u)` crée un nouveau tableau contenant les éléments de la séquence `u`. La taille et le type des éléments de ce tableau sont déduits du contenu de `u`.

— `a.shape` est un tuple donnant la taille du tableau `a` pour chacune de ses dimensions.

— `a.trace()` donne la trace du tableau `a`.

— `np.exp(a)` renvoie un tableau de même forme que le tableau `a` dont chaque terme est l'exponentielle du terme correspondant du tableau `a` (exponentielle terme à terme).

— `np.dot(a, b)` calcule le produit matriciel des tableaux `a` et `b` (sous réserve de compatibilité des dimensions).

— `x * a` renvoie un tableau de même forme que le tableau `a` correspondant au produit de chaque terme de `a` par le nombre `x`.

— `a * b` renvoie un tableau correspondant au produit terme à terme des deux tableaux `a` et `b`. Si `a` et `b` n'ont pas le même nombre de dimensions, le plus « petit » est virtuellement étendu afin de correspondre à la forme du plus « grand ». Par exemple si `a` est une matrice et `b` un vecteur, `b` doit avoir le même nombre de composantes que `a` a de lignes, il est alors virtuellement transformé en matrice avec le même nombre de colonnes que `a`, chaque colonne valant `b`.

Q 33. Écrire en langage Python une fonction `puiss2k` qui prend en argument une matrice carrée M et un entier naturel k et renvoie la matrice M^{2^k} en effectuant k produits matriciels. On pourra exploiter le fait que $M^{2^{k+1}} = M^{2^k} M^{2^k}$.

Q 34. Expliquer ce que fait la fonction Python `maxSp` définie par :

```
1  def maxSp(Q:np.ndarray, k:int, t:float) -> float:
2      n = Q.shape[1]
3      E = np.exp(t * np.array(range(n)))
4      A = Q * E
5      B = puiss2k(A, k)
6      C = np.dot(A, B)
7      return C.trace() / B.trace()
```

III.D – Une majoration théorique et son interprétation

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda^*(x) = \sup_{t \geqslant 0} (tx - \lambda(t))$.

On admet que cette borne supérieure existe et que la convergence de la suite de fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{\ln(E(\mathrm{e}^{t S_n}))}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la fonction $t \mapsto \ln(\gamma(t))$ démontrée à la question 32 est uniforme sur $\mathbb{R}^+$. On admet également dans toute la suite l'existence de $m = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} E(S_n)$ ainsi que les propriétés suivantes de λ^* :

$$\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{pour tout } x \leqslant m, \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{pour tout } x > m. \end{cases}$$

Dans toute la suite, ε désigne un réel strictement positif.

Q 35. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \geqslant n_0 \implies \ln(E(\mathrm{e}^{t S_n})) \leqslant n(\lambda(t) + \varepsilon)$$

Q 36. À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t S_n}$, montrer que pour $a > 1$, $n \geqslant n_0$ et $t \geqslant 0$,

$$P(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-ntam} \mathrm{e}^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}.$$

Q 37. En déduire que pour $n \geqslant n_0$,

$$P(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}.$$

CC BY-NC-SA

Q 38. Donner un sens concret à m en rapport avec le processus industriel étudié et interpréter l'inégalité précédente. On pourra établir un lien intuitif avec la loi des grands nombres.

III.E – Cette sous-partie constitue une application numérique et peut être traitée en admettant les résultats précédents.

On dispose de deux suites finies de réels $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_K$ $(K \geqslant 2)$ et $x_1 < x_2 < \cdots < x_L$ $(L \geqslant 2)$. La formule de la question 32 appliquée en t_i avec n suffisamment grand permet d'estimer $\lambda(t_i)$ par une valeur approchée $\hat{\lambda}(t_i)$.

Q 39. Justifier que pour tout $i \in \{1, ..., L\}$,

$$\hat{\lambda}^*(x_i) = \max_{1 \leqslant j \leqslant K} (t_j x_i - \hat{\lambda}(t_j))$$

constitue une valeur approchée raisonnable de $\lambda^*(x_i)$.

Le tableau 1 donne ces valeurs pour $L = 20$.

x_i	4,50	4,55	4,60	4,65	4,70
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$4{,}1 \times 10^{-12}$	$4{,}1 \times 10^{-12}$	$4{,}1 \times 10^{-12}$	$4{,}1 \times 10^{-12}$	$4{,}1 \times 10^{-12}$
x_i	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$5{,}1 \times 10^{-4}$	$5{,}5 \times 10^{-3}$	$1{,}1 \times 10^{-2}$	$1{,}6 \times 10^{-2}$	$2{,}1 \times 10^{-2}$
x_i	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$2{,}6 \times 10^{-2}$	$3{,}1 \times 10^{-2}$	$3{,}6 \times 10^{-2}$	$4{,}1 \times 10^{-2}$	$4{,}6 \times 10^{-2}$
x_i	5,25	5,30	5,35	5,40	5,45
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$5{,}1 \times 10^{-2}$	$5{,}6 \times 10^{-2}$	$6{,}1 \times 10^{-2}$	$6{,}6 \times 10^{-2}$	$7{,}1 \times 10^{-2}$

Tableau 1

Q 40. À l'aide du tableau 1, donner un encadrement approximatif de la valeur de m et la valeur d'un réel $h > 0$ tel qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \geqslant n_0$,

$$P(S_n > 1{,}1 \times nm) \leqslant \mathrm{e}^{-nh}.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2020

4 heures Calculatrice autorisée

Les fonctions de Lambert

Objectifs

L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert ainsi que leur application en probabilités.

Dépendance des parties

Les fonctions V et W définies dans la partie I sont utilisées dans les parties II, III et IV. Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres.

Notations

Pour des entiers k et n avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial « k parmi n » est noté $\binom{n}{k}$.

Lorsque $k \leqslant n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre k et n.

I Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Q 3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

Q 4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$ ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscise $-\mathrm{e}^{-1}$.

Q 6. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Q 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, 0[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.

Q 9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Q 10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^x \leqslant m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer, suivant les valeurs de m, les solutions de (I.2). Illustrer graphiquement les différents cas.

Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

BY-NC-SA

II Probabilités

On étudie dans cette partie deux situations dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

II.A – Première situation

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire.

Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0,1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1 - \alpha. \tag{II.1}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.1).

Q 12. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp. Donner l'espérance et la variance de X.

Q 13. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$, alors la condition (II.1) est satisfaite.

Q 14. On pose $x = -(\lambda p + 1)$. Démontrer que la condition (II.1) est équivalente à la condition

$$x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha \mathrm{e}^{-1}.$$

Q 15. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I) et la question 10, discuter selon la position de λ par rapport à $-1 - V(-\alpha \mathrm{e}^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p \in]0,1[$ satisfaisant la condition (II.1).

II.B – Deuxième situation

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1-p \in]0,1[$. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger *une* erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère $\alpha \in]0,1[$ et on veut réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1 - \alpha. \tag{II.2}$$

Pour que le codage soit efficace, on souhaite de plus que r soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.2).

Q 16. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Q 17. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $r \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$, alors la condition (II.2) est satisfaite.

Q 18. On pose $a = \dfrac{p\ln(p)}{p-1}$ et $x = r\ln(p) - a$. Démontrer que la condition (II.2) est équivalente à la condition

$$x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha a \mathrm{e}^{-a}.$$

Q 19. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I) et la question 10, étudier l'existence d'un plus grand entier naturel r satisfaisant la condition (II.2).

Q 20. Lorsqu'il existe, exprimer cet entier en fonction de p, α et a à l'aide d'une des fonctions V ou W.

BY-NC-SA

III Développement en série entière

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie I est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

III.A – Le théorème binomial d'Abel

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, ..., A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \qquad \text{et, pour tout } k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \frac{1}{k!} X(X - ka)^{k-1}.$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

Q 21. Démontrer que la famille $(A_0, ..., A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 22. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k'(X) = A_{k-1}(X - a)$.

Q 23. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, ..., \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k.$$

Q 24. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

Q 25. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall (a, x, y) \in \mathbb{C}^3, \qquad (x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x - ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}.$$

Q 26. Établir la relation,

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \qquad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}.$$

III.B – Développement en série entière de la fonction W

On définit une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ en posant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}.$$

On définit, lorsque c'est possible, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Q 27. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$.

Q 28. Justifier que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Q 29. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R, R]$.

Q 30. Démontrer que,

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad x(1 + S(x))S'(x) = S(x).$$

On pourra utiliser le résultat de la question 26.

On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & S(x)\mathrm{e}^{S(x)} \end{array} \right.$

Q 31. Démontrer que h est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Q 32. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, R[$, $]-R, 0[$ puis sur l'intervalle $]-R, R[$.

Q 33. En déduire que,

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad S(x) = W(x).$$

Q 34. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R, R]$?

BY-NC-SA

IV Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie I.

Pour tout réel positif x, on considère la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x\exp(-x\exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}^+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x)) \end{cases}$$

Q 35. Démontrer que, pour tout réel positif x, $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x, c'est-à-dire une solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.

Q 36. Démontrer que, pour tout réel positif x, la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

Q 37. En déduire que

$$\forall x \in [0,\mathrm{e}], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n |1 - W(x)|\,.$$

Q 38. Pour tout réel $a \in]0,\mathrm{e}[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction W.

Q 39. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0,\mathrm{e}]$?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2020

4 heures

Calculatrice autorisée

Étude de certaines matrices symplectiques

L'objet du problème est de définir et étudier la notion de matrice symplectique, et d'établir des résultats de réduction dans certains cas particuliers.

Vocabulaire et notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et J_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs par

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & I_n \\ -I_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $0_{n,n}$ est la matrice nulle à n lignes et n colonnes et I_n est la matrice identité de même taille.

Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, la matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est notée $M^\top$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est *symplectique* si et seulement si $M^\top J_n M = J_n$. On désigne par $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de taille $2n \times 2n$.

On note $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire* sur E toute application ψ définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in E$,

$$X \mapsto \psi(X, Y) \qquad \text{et} \qquad X \mapsto \psi(Y, X)$$

soient toutes les deux linéaires sur E.

Soit ψ une forme bilinéaire ; ψ est dite *alternée* si et seulement si, pour tout $X \in E$, $\psi(X, X) = 0$; ψ est dite *antisymétrique* si et seulement si, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $\psi(X, Y) = -\psi(Y, X)$.

Si i et j sont deux entiers naturels, on note $\delta_{i,j}$ le nombre qui vaut 1 si $i = j$ et qui vaut 0 sinon.

On note e_i la matrice colonne élémentaire dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est placé sur la ligne numéro i.

On munit $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a, pour tous X et Y dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|X\|^2 = X^\top X.$$

Si $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X^\perp$ désigne l'orthogonal de X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments Y de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle X, Y \rangle = 0$. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $F^\perp$ désignera l'orthogonal de F, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ qui sont orthogonaux à tous les éléments de F.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, on notera $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et λ est une de ses valeurs propres, on notera E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Soit E un espace vectoriel et $X_1, ..., X_p$ des vecteurs de E. On note $\mathrm{Vect}(X_1, ..., X_p)$ l'espace vectoriel engendré par $X_1, ..., X_p$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et F une partie de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On dit que F est *stable* par A si et seulement si, pour tout X dans F, AX est un élément de F.

BY-NC-SA

I Cas des matrices de taille 2×2

Q 1. Dans cette question uniquement, n est un entier naturel non nul quelconque. Déterminer J_n^2 et montrer que $J_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, $n = 1$.

Q 2. Montrer qu'une matrice de taille 2×2 est symplectique si et seulement si son déterminant est égal à 1.

Q 3. Soit M une matrice orthogonale de taille 2×2. On note $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ les deux colonnes de M. Montrer l'équivalence

$$M \text{ est symplectique } \iff M_2 = -J_1 M_1.$$

Q 4. Soit $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrer que la matrice carrée constituée des colonnes X_1 et $-J_1 X_1$ est à la fois orthogonale et symplectique.

Q 5. Soit M une matrice de taille 2×2 symétrique et symplectique. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont inverses l'une de l'autre. Montrer qu'il existe une matrice P à la fois orthogonale et symplectique telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Q 6. Déterminer les matrices de taille 2×2 à la fois antisymétriques et symplectiques et montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

II Cas des matrices symplectiques et orthogonales

Soit K une matrice antisymétrique et φ l'application de $\left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (X, Y) \in \left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \varphi(X, Y) = X^\top K Y.$$

(On identifie de nouveau $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.)

Q 7. Montrer que φ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Q 8. En calculant de deux manières $\varphi(X, X)^\top$, montrer que φ est alternée. Montrer de même que φ est antisymétrique.

Dans toute la suite du sujet, $K = J_n$.

Q 9. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, montrer l'égalité

$$\varphi(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k).$$

Q 10. Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, ..., 2n\}^2$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$ (on pourra commencer par le cas où $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ puis généraliser).

Q 11. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $J_n X \in X^\perp$ et calculer $\varphi(J_n X, X)$.

Q 12. Si $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on note Y^{J_n} l'ensemble des vecteurs Z de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\varphi(Y, Z) = 0$. Montrer que $X^{J_n} = (J_n X)^\perp$.

Q 13. Soit P une matrice symplectique et orthogonale dont les colonnes sont notées $X_1, ..., X_{2n}$. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, ..., 2n\}^2$,

$$\begin{cases} \|X_i\| = 1 \\ i \neq j \implies X_i \perp X_j \\ \varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n} \end{cases}$$

Q 14. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp$.

Q 15. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $X_{i+n} = -J_n X_i$.

III Quelques généralités sur les matrices symplectiques

Q 16. Montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1 soit -1.

Q 17. Montrer que l'inverse d'une matrice symplectique est une matrice symplectique.

Q 18. Montrer que le produit de deux matrices symplectiques est une matrice symplectique. L'ensemble $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

BY-NC-SA

IV Réduction des matrices symétriques et symplectiques

Le but de cette partie est de montrer que, si $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top MP$ est diagonale de coefficients diagonaux $d_1, ..., d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

IV.A – Propriété

Soit $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q 19. Montrer que si λ est valeur propre de M, $1/\lambda$ est également valeur propre de M. Donner un vecteur propre associé.

Q 20. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Soit $(X_1, ..., X_p)$ une base de E_λ. Montrer que $(J_nX_1, ..., J_nX_p)$ est une base de $E_{1/\lambda}$ et que

$$\dim(E_\lambda) = \dim(E_{1/\lambda}).$$

Q 21. Soient $Y_1, ..., Y_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'implication

$$Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, J_nY_1, ..., J_nY_p))^\perp \implies J_nY \in (\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, Y, J_nY_1, ..., J_nY_p))^\perp.$$

Q 22. Dans cette question $\lambda = 1$. Montrer que E_1 est de dimension paire et qu'il existe une base de E_1 orthonormée de la forme $(X_1, ..., X_p, J_nX_1, ..., J_nX_p)$ où $2p$ est la dimension de E_1.

Q 23. Qu'en est-il pour E_{-1} ?

Q 24. Démontrer la propriété annoncée au début de la partie.

IV.B – Mise en application sur un exemple

Dans la fin de cette partie, on note A la matrice

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Q 25. Montrer que $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$.

Q 26. Construire une matrice orthogonale et symplectique P telle que $P^\top AP$ soit diagonale.

V Étude du cas des matrices antisymétriques

V.A – Un peu de théorie

Soit $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit m l'application linéaire canoniquement associée à M.

Q 27. Montrer l'égalité $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

Q 28. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top M^2 P$ soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, ..., d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, X désigne un vecteur propre de M^2 de norme 1 associé à une certaine valeur propre λ.

Q 29. Montrer que MX, J_nX et J_nMX sont des vecteurs propres de M^2 et donner les valeurs propres associées à chacun de ces vecteurs.

Q 30. Dans cette question et dans la suite, on note $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$. Montrer que F est stable par M et par J_n.

Q 31. Montrer que toutes les valeurs propres de M^2 sont strictement négatives.

Q 32. Justifier que si $\lambda \neq -1$, F est un espace vectoriel de dimension 4. Montrer que, dans ce cas,

$$\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$$

est une base orthonormée de F. Donner alors la matrice de l'application m_F induite par m sur F dans la base obtenue.

Q 33. Montrer que $F^\perp$ est stable par M et par J_n.

BY-NC-SA

Q 34. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q et des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, notés $F_1, ..., F_q$ tels que

(a) $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$;

(b) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, F_i est stable par M et par J_n ;

(c) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $F_i^\perp$ est stable par M et par J_n ;

(d) $\forall (i,j) \in \{1, ..., q\}^2$, $i \neq j \implies \forall (Y, Z) \in F_i \times F_j, \langle Y, Z\rangle = 0 = \varphi(Y, Z)$;

(e) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $\dim F_i \in \{2, 4\}$;

(f) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, la matrice de l'application m_{F_i} induite par m sur F_i dans une certaine base est de la forme

$$J_1 \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda} J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_1 \end{pmatrix}.$$

V.B – Mise en application

Dans la fin de cette partie, on note B la matrice

$$B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 35. Calculer $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q 36. Déterminer un réel a et une matrice P tels que

$$P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad P^\top B P = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & -1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2020

4 heures

Calculatrice autorisée

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Toutes les variables aléatoires sont discrètes, à valeurs réelles ou complexes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Si la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.
Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\bar{z}$ son conjugué.

On appelle *sinus cardinal* la fonction définie, pour tout réel x, par $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On admet que cette fonction est continue et que pour tout réel x, $|\mathrm{sinc}(x)| \leqslant 1$.

On étend aux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes la notion d'espérance définie pour les variables aléatoires discrètes réelles. Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire discrète à valeurs complexes $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ est *d'espérance finie* si les variables aléatoires réelles $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont d'espérance finie et on définit alors l'espérance de Z par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z)) + \mathrm{i}\,\mathbb{E}(\mathrm{Im}(Z)).$$

On admettra les résultats suivants qui étendent aux variables aléatoires complexes les résultats analogues sur les variables aléatoires réelles.

— Toute variable aléatoire Z complexe finie est d'espérance finie. Si $Z(\Omega) = \{z_1, ..., z_r\}$, où les z_i sont deux à deux distincts, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{r} z_k \mathbb{P}(Z = z_k).$$

— *Théorème du transfert* (cas $X(\Omega)$ fini). Soit X une variable aléatoire réelle d'image finie $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k) f(x_k).$$

— Soit Z une variable aléatoire complexe telle que $Z(\Omega)$ soit dénombrable égal à $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les z_n sont deux à deux distincts. Alors Z est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum_{n \geqslant 0} z_n \mathbb{P}(Z = z_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \mathbb{P}(Z = z_n).$$

— *Théorème du transfert* (cas $X(\Omega)$ dénombrable). Soit X une variable aléatoire réelle d'image dénombrable $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n).$$

— Soit Z une variable aléatoire complexe et $\bar{Z} : \omega \in \Omega \mapsto \overline{Z(\omega)}$ sa variable aléatoire conjuguée.
Si Z est d'espérance finie, alors $\bar{Z}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(\bar{Z}) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$.

— Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes d'espérance finie et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors $Z_1 + Z_2$ et λZ_1 sont d'espérance finie et $\mathbb{E}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}(\lambda Z_1) = \lambda \mathbb{E}(Z_1)$.

BY-NC-SA

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction ϕ_X, appelée *fonction caractéristique* de X et définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX}\right).$$

I.A – Premières propriétés

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire réelle discrète.

Q 1. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$.
On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.
Montrer que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{r} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx_k}$.

Q 2. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.
Montrer que ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx_n}$.

Q 3. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$. Pour tout réel t, exprimer $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b.

Q 5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\phi_X(-t)$ en fonction de $\phi_X(t)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image $\phi_X(\mathbb{R})$ pour que la fonction ϕ_X soit paire.

I.B – Trois exemples

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et on note $q = 1 - p$.
Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = (q + p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})^n$.

Q 7. Soit $p \in]0, 1[$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p ?

Q 8. Soit $\lambda > 0$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ?

I.C – Image de ϕ_X

On se donne ici une variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont on note ϕ_X la fonction caractéristique.
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $\{a + bk, k \in \mathbb{Z}\}$.

Q 9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t)| \leqslant 1$.

Q 10. Montrer que, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors $|\phi_X(t_0)| = 1$.

On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_X(t_0)| = 1$.
Dans la suite de cette sous-partie I.C, on suppose de plus que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Q 11. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(\mathrm{i}(t_0 x_n - t_0 a)) = 1$.

Q 12. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0$.

Q 13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

Q 14. En déduire que $\mathbb{P}\left(X \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

BY-NC-SA

II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine sa loi. Deux méthodes de démonstration sont proposées.

II.A – Première méthode

Soit X une variable aléatoire réelle et discrète et $m \in \mathbb{R}$.

Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $V_m(T) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t$.

II.A.1) On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

Q 15. Montrer que, pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \mathrm{sinc}(T(x_n - m))\mathbb{P}(X = x_n)$.

Q 16. En déduire que $V_m(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

II.A.2) On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \mathrm{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right)\mathbb{P}(X = x_n)$.

Q 17. Montrer que pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right)$.

Q 18. Montrer que la fonction g_n se prolonge en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q 19. Montrer que la fonction $G = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q 20. Établir que $V_m(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

II.A.3) Application

Q 21. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(Y = m)$, autrement dit que X et Y ont la même loi.

II.B – Deuxième méthode

Si a et b sont deux réels, on note $K_{a,b}$ la fonction définie pour tout réel t par $K_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}}{2\,\mathrm{i}\,t} & \text{si } t \neq 0, \\ \dfrac{b-a}{2} & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Q 22. À l'aide de séries entières, montrer que $K_{a,b}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit N un entier naturel et soit F_N la fonction définie, pour tout réel x, par $F_N(x) = \displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,x}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 23. Montrer que F_N est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $F_N'(x) = N\,\mathrm{sinc}(Nx)$.

Q 24. Montrer que $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{Na}^{Nb} \mathrm{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$.

Q 25. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente.

On admettra dans la suite que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$.

Q 26. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t$ dans le cas où $a < b$.

Q 27. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini. On suppose que les réels a et b n'appartiennent pas à $X(\Omega)$. Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathbb{P}(a < X < b).$$

BY-NC-SA

III Régularité de ϕ_X

On fixe dans cette partie une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On cherche à établir des liens entre des propriétés de la loi de X et la régularité de ϕ_X.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un moment d'ordre k si la variable aléatoire X^k est d'espérance finie.

III.A –

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette sous-partie III.A que X admet un moment d'ordre k.

Q 28. Soit j un entier tel que $1 \leqslant j \leqslant k$. Montrer que pour tout réel x, $|x|^j \leqslant 1 + |x|^k$ et en déduire que X admet un moment d'ordre j.

Q 29. En déduire que ϕ_X est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de la dérivée $k-$ième de ϕ_X.

Q 30. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X^k)$ en fonction de $\phi_X^{(k)}(0)$.

III.B –

On suppose dans cette sous-partie III.B que ϕ_X est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Q 31. On note f la fonction qui à tout réel $h > 0$ associe $f(h) = \dfrac{2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h)}{4h^2}$. Quelle est la limite de f en 0 ?

Q 32. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $f(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

Q 33. En déduire que X admet un moment d'ordre 2.

III.C –

On fixe dans cette sous-partie III.C un entier naturel $k \in \mathbb{N}$ et on suppose à la fois que ϕ_X est de classe C^{2k+2} sur $\mathbb{R}$ et que X admet un moment d'ordre $2k$. On note $\alpha = \mathbb{E}(X^{2k})$.

Q 34. Que peut-on dire de X si α est nul ?

On suppose dorénavant que le réel α est strictement positif.

Q 35. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire vérifiant $Y(\Omega) = X(\Omega)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = x_n) = \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha}.$$

Montrer que ϕ_Y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Q 36. En déduire que X admet un moment d'ordre $2k+2$.

Q 37. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que si ϕ_X est de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}$, alors X admet un moment d'ordre $2k$.

IV Développement en série entière de ϕ_X

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

IV.A –

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

Q 38. Montrer que ϕ_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}\,t)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)$.

IV.B –

On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On suppose également que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n et qu'il existe un réel $R > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(|X|^n) = O\left(\frac{n^n}{R^n}\right) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Q 39. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Q 40. En déduire que pour tout réel $t \in \left[-\dfrac{R}{\mathrm{e}}, \dfrac{R}{\mathrm{e}}\right]$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\,\mathbb{E}(X^k).$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI

2020

4 heures

Calculatrice autorisée

Traitement de signaux discrets

Le traitement des signaux est utilisé dans de nombreux domaines liés à l'analyse et à la synthèse de l'information. Un signal à temps discret, obtenu par exemple à partir de l'échantillonnage d'un signal à temps continu, est modélisé par une suite réelle $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce modèle, le nombre réel x_n, également noté $[x]_n$, représente la valeur du signal au temps d'indice n.

Ce problème comprend deux parties. La partie I est indépendante de la partie II. Dans la partie II, la sous-partie II.D est indépendante des sous-parties qui la précèdent.

Notations

Dans tout le problème, $\mathcal{S}$ désigne l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ et $I_\mathcal{S}$ désigne l'application identité de $\mathcal{S}$.

On désigne par

— τ l'opérateur de décalage, défini, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par $[\tau(x)]_n = x_{n+1}$;

— Δ l'opérateur de différence, défini, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par $[\Delta(x)]_n = x_{n+1} - x_n$;

— Σ l'opérateur de sommation, défini, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par $[\Sigma(x)]_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

On admet que les applications τ, Δ et Σ sont des endomorphismes de $\mathcal{S}$. On note $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{S}$.

Pour tout $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, la notation Φ^k désigne $I_\mathcal{S}$ si $k = 0$ et la composée $\underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{k \text{ fois}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

I Discrétisation d'une équation différentielle

I.A – Opérateurs agissant sur les signaux à temps discret

Dans cette sous-partie, on étudie les opérateurs définis en introduction agissant sur les signaux à temps discrets.

Q 1. Dans le cas où $x_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $[\Delta(x)]_n$, $[\Delta^2(x)]_n$ et $[\Delta^3(x)]_n$.

Pour toutes suites $x \in \mathcal{S}$ et $y \in \mathcal{S}$, on rappelle que le produit de x et de y est défini par $[x \cdot y]_n = x_n y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 2. Montrer que, pour toutes suites $(x, y) \in \mathcal{S}^2$, $\Delta(x \cdot y) = \Delta(x) \cdot y + \tau(x) \cdot \Delta(y)$.

Q 3. Démontrer, pour toute suite $x = (x_n)_n \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'égalité $\sum_{k=0}^{n-1} [\Delta(x)]_k = x_n - x_0$.

I.B – Discrétisation d'une équation différentielle

On présente ici les *équations aux différences finies* comme l'analogue discret des équations différentielles.

I.B.1) Étude d'une équation différentielle linéaire homogène

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = 0. \tag{I.1}$$

On admet que l'ensemble des solutions de (I.1) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

Q 4. Démontrer que y est solution de (I.1) si, et seulement si, y' est solution de l'équation suivante, d'inconnue z :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0. \tag{I.2}$$

Q 5. Résoudre (I.2) et déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (I.1).

CC BY-NC-SA

I.B.2) Méthode de discrétisation de l'équation différentielle (I.1)

Soient A un nombre réel strictement positif.

L'objectif de cette section est de construire *une équation aux différences finies* (I.3) associée à (I.1) sur $[0, A]$.

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On subdivise le segment $[0, A]$ en N intervalles de même longueur $h = A/N$.

Soit y une solution de (I.1). Pour transposer à un signal u à temps discret la relation $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t) = 0$, notamment valable pour $t = kh$, on décide de remplacer respectivement $y'(kh)$, $y''(kh)$ et $y'''(kh)$ par $\dfrac{[\Delta u]_k}{h}$, $\dfrac{[\Delta^2 u]_k}{h^2}$ et $\dfrac{[\Delta^3 u]_k}{h^3}$.

Le signal à temps discret u vérifie alors l'équation aux différences finies

$$\Delta^3(u) + 3h\Delta^2(u) + 2h^2\Delta(u) = 0. \tag{I.3}$$

Q 6. Montrer qu'une suite u est solution de (I.3) si, et seulement si, $\Delta(u)$ est solution de l'équation suivante, d'inconnue v :

$$\Delta^2(v) + 3h\Delta(v) + 2h^2 v = 0. \tag{I.4}$$

Q 7. Démontrer qu'une suite $v \in \mathcal{S}$ est solution de l'équation aux différences finies (I.4) si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} + (3h-2)v_{n+1} + (2h^2-3h+1)v_n = 0$.

Q 8. Montrer qu'il existe quatre réels r_1, r_2, C_1 et C_2 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$. On calculera les réels r_1 et r_2 en fonction de h.

Q 9. En déduire que les solutions de (I.3) vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = C_0 + C_1\left(\frac{1-(1-2h)^n}{2h}\right) + C_2\left(\frac{1-(1-h)^n}{h}\right)$$

où C_0 est une constante à déterminer en fonction de u_0. On pourra utiliser le résultat de la question **Q** 3.

I.B.3) Comparaison des solutions de (I.3) **à celles de** (I.1)

Q 10. Démontrer qu'il existe une unique solution y de (I.1) vérifiant $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ et donner la valeur de cette solution.

On se propose de comparer y avec une solution u bien choisie de l'équation aux différences finies (I.3) associée à (I.1).

Q 11. On considère la solution u de l'équation aux différences finies (I.3) vérifiant les conditions initiales $u_0 = y(0)$, $[\Delta u]_0 = hy'(0)$ et $[\Delta^2 u]_0 = h^2 y''(0)$. Calculer u_1 et u_2 et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (1-2h)^n - 3(1-h)^n + 3.$$

On note dorénavant $h_N = A/N$ afin de souligner la dépendance de h par rapport à N. De manière analogue, on note $u^{(N)}$ le signal à temps discret défini à la question **Q** 11. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^{(N)} = (1-2h_N)^n - 3(1-h_N)^n + 3.$$

Soit $t \in [0, A]$, on note $\varphi_t(N) = \left\lfloor \dfrac{t}{h_N} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q 12. Démontrer la double inégalité, $\varphi_t(N)h_N \leqslant t < (\varphi_t(N)+1)h_N$.

Q 13. Démontrer que $\lim\limits_{N\to+\infty}(1-2h_N)^{\varphi_t(N)} = \mathrm{e}^{-2t}$ et que $\lim\limits_{N\to+\infty}(1-h_N)^{\varphi_t(N)} = \mathrm{e}^{-t}$.

Q 14. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\lim\limits_{N\to+\infty} u^{(N)}_{\varphi_t(N)}$. Comparer cette valeur au résultat de la question **Q** 10.

II Traitement d'un signal par filtre linéaire récursif

Dans la chaine de traitement numérique d'un signal à temps discret par filtre numérique récursif, on effectue une successions d'opérations qui transforment un *signal d'entrée* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un *signal de sortie* $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Un modèle mathématique de ce filtre est de la forme

$$\begin{cases} y_0 = x_0, \\ y_1 = x_1 - p_1 y_0, \\ y_2 = x_2 - p_2 y_1 - q_2 y_0, \\ y_{n+3} = x_{n+3} - p_{n+3}y_{n+2} - q_{n+3}y_{n+1} - r_{n+3}y_n, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases} \tag{II.1}$$

où $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites réelles telles que $r_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

BY-NC-SA

L'objet de cette partie est de présenter deux méthodes permettant de calculer le signal de sortie $y \in \mathcal{S}$ en fonction du signal d'entrée $x \in \mathcal{S}$.

II.A – Propriétés générales des filtres linéaires récursifs

Q 15. *Existence et unicité du signal de sortie.* Montrer que la donnée de la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ détermine une unique suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ vérifiant (II.1).

On note alors $y = T(x)$ l'unique signal de sortie y associé au signal d'entrée $x \in \mathcal{S}$.

Q 16. Montrer que T est un endomorphisme injectif de $\mathcal{S}$.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des suites $y = (y_n) \in \mathcal{S}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+3} + p_{n+3}y_{n+2} + q_{n+3}y_{n+1} + r_{n+3}y_n = 0.$$

Q 17. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

Q 18. Justifier que l'application $\psi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{H} \to \mathbb{R}^3 \\ y \mapsto (y_0, y_1, y_2) \end{array} \right.$ est un isomorphisme et en déduire la dimension de $\mathcal{H}$.

II.B – Méthode algébrique de calcul du signal de sortie y pour un signal d'entrée $x \in \mathcal{S}$ donné

Dans toute cette sous-partie II.B, on suppose que l'on dispose d'une base (a, b, c) de $\mathcal{H}$.

Si une suite réelle $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ est désignée par une lettre minuscule, on note $\mathbf{Z}$ avec une lettre majuscule grasse, la suite vectorielle définie en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{Z}_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix}$.

Q 19. Déterminer une suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que l'on ait l'équivalence

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+3} + p_{n+3}y_{n+2} + q_{n+3}y_{n+1} + r_{n+3}y_n = x_{n+3}\Big) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{Y}_{n+1} = M_n\mathbf{Y}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{n+3} \end{pmatrix}\right)$$

Q 20. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice M_n est inversible.

Q 21. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les égalités, $\mathbf{A}_{n+1} = M_n\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_{n+1} = M_n\mathbf{B}_n$ et $\mathbf{C}_{n+1} = M_n\mathbf{C}_n$ où $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont les suites vectorielles respectivement associées aux suites réelles a, b et c.

Q 22. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant (II.1).

Q 23. Montrer qu'il existe trois suites réelles u, v et w telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{Y}_n = u_n\mathbf{A}_n + v_n\mathbf{B}_n + w_n\mathbf{C}_n.$$

Q 24. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[\Delta(u)]_n\mathbf{A}_{n+1} + [\Delta(v)]_n\mathbf{B}_{n+1} + [\Delta(w)]_n\mathbf{C}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{n+3} \end{pmatrix}.$$

On note $W_n \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$ et $\mathbf{C}_n$.

Q 25. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes $[\Delta(u)]_n$, $[\Delta(v)]_n$ et $[\Delta(w)]_n$ à l'aide de la matrice W_{n+1} et de x_{n+3}.

Q 26. Déduire des questions qui précèdent une méthode pour calculer $y = T(x)$ défini par le système (II.1).

II.C – Exemple de mise en œuvre de cette méthode algébrique pour un signal d'entrée de type rampe

Q 27. Montrer, pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(q-1)^2}$.

Q 28. Montrer que les suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ définies, pour tout entier naturel n, par $a_n = 1$, $b_n = (-3)^n$ et $c_n = 2^n$ forment une base de l'ensemble $\mathcal{H}$ des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+3} - 7y_{n+1} + 6y_n = 0$.

Q 29. Résoudre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système suivant, d'inconnues α, β, γ :

$$\begin{pmatrix} 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \\ 1 & (-3)^{n+3} & 2^{n+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n+3 \end{pmatrix}.$$

BY-NC-SA

Q 30. En déduire le signal de sortie y vérifiant

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = 1, \\ y_2 = 2, \\ y_{n+3} - 7y_{n+1} + 6y_n = n + 3, \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

II.D – Méthode analytique de calcul d'un signal de sortie

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, une suite modélisant un signal discret.

On note ρ_u le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$. Si $\rho_u > 0$, on dit que u admet une *transformée en Z*, notée U, définie sur le domaine $\mathcal{D}_u = \{z \in \mathbb{C}^\star ; |z| > \dfrac{1}{\rho_u}\}$ par

$$\forall z \in \mathcal{D}_u, \qquad U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{-n}.$$

On admet que, si u et v sont deux suites telles que les séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ ont le même rayon de convergence strictement positif, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite $\lambda u + v$ admet une transformée en Z égale à $\lambda U + V$ où U et V sont respectivement les transformées en Z des suites u et v.

Q 31. Montrer que si les transformées en Z, U et V, de deux suites $u \in \mathcal{S}$ et $v \in \mathcal{S}$ sont égales, alors les deux suites u et v sont elles-mêmes égales.

Q 32. Montrer que $\rho_{\tau(u)} = \rho_u$.

Q 33. Calculer ρ_u et la transformée en Z de u dans le cas où $u_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.E – Exemple de mise en œuvre de la méthode analytique pour un signal d'entrée exponentiel

On se propose de déterminer le signal de sortie $y \in \mathcal{S}$ vérifiant

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = -1, \\ y_2 = -1, \\ y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = (-2)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans les deux questions qui suivent, on suppose que $\rho_y > 0$ et on note Y la transformée en Z de y.

Q 34. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\tau^k(y)$ admet une transformée en Z, notée Y_{τ^k} et définie par

$$\forall z \in \mathcal{D}_y, \qquad Y_{\tau^k}(z) = z^k Y(z) - \sum_{i=0}^{k-1} y_i z^{k-i}.$$

Q 35. Déterminer $\tau^3(y) + \tau^2(y) - \tau(y) - y$ et en déduire que

$$Y(z) = \frac{-z(z+3)}{(z-1)(z+1)(z+2)}.$$

Q 36. Déterminer trois nombres réels α, β et γ tels que,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1, 1\}, \qquad \frac{-z\ (z+3)}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{\alpha}{z+1} + \frac{\beta}{z+2} + \frac{\gamma}{z-1}.$$

Q 37. Si $c \in \mathbb{R}^\star$, calculer le développement en série entière en 0 de $z \mapsto \dfrac{1}{1-cz}$ et donner son rayon de convergence.

Q 38. En déduire que $\dfrac{1}{z+c} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-c)^n z^{-n-1}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |c|$.

Q 39. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 2$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left((-1)^n - \frac{(-2)^n}{3} - \frac{2}{3} \right) z^{-(n+1)}$ converge.

Q 40. En utilisant les questions **Q** 35 à **Q** 38, déterminer l'expression générale de y_n en fonction de n.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI

4 heures Calculatrice autorisée

2020

Ce sujet se compose de deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

I Décompositions de matrices

Notations et rappels

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ son produit scalaire.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $M^\top$.

On rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque $M^\top M = MM^\top = I_n$.

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure lorsque $a_{i,j} = 0$ dès que $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

On pourra utiliser sans preuve les deux résultats suivants :

— le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure ;

— l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.

Objectifs

Ce problème étudie deux types de décompositions matricielles, d'abord pour une matrice inversible, puis pour une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

I.A – Un exemple introductif

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

On note c_1, c_2 et c_3 les colonnes de P considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Q 1. Justifier que la matrice P est inversible. En déduire que la famille $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q 2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$ pour construire une base orthonormée $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Q 3. Soit Q la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$. Justifier que $Q^{-1} = Q^\top$.

Q 4. Déterminer la matrice de passage R de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.

On constate que R est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Q 5. Justifier que $P = QR$.

I.B – Cas général : décomposition QR

Q 6. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. En s'inspirant de la démarche mise en place sur l'exemple, montrer qu'il existe une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $P = QR$.

Q 7. Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliquer l'intérêt de la décomposition $P = QR$, avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, pour résoudre le système linéaire $Px = b$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$.

Les deux questions qui suivent permettent de démontrer l'unicité de la décomposition précédente.

Q 8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. En raisonnant de proche en proche de la première à la dernière colonne de M, montrer que $M = I_n$.

Q 9. On considère quatre matrices Q_1, Q_2, R_1, R_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que Q_1 et Q_2 sont orthogonales, R_1 et R_2 sont triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs et $Q_1R_1 = Q_2R_2$. Montrer que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

I.C – Décomposition d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$

Q 10. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant la décomposition QR d'une matrice inversible bien choisie, démontrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = QTQ^\top$.

BY-NC-SA

Q 11. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et une décomposition $A = QTQ^\top$ avec $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, mais non diagonale.

Q 12. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et une décomposition $A = QTQ^\top$ avec $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale à éléments diagonaux strictement positifs.

II Calcul approché d'intégrales par quadrature

Notations et rappels

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel.

Pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$, le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ est défini par $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée, définie sur le segment $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction g continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $N(g) = \max_{x \in [-1,1]} |g(x)|$.

Pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^k$, on note $g^{(k)}$ sa dérivée k-ième.

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à une méthode numérique de calcul approché de

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour une fonction f continue sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le principe de cette méthode, dite par quadrature, consiste à approcher $I(f)$ par une somme, pondérée par des poids $(\omega_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, de valeurs prises par la fonction f en $n + 1$ points distincts $(r_0, r_1, ..., r_n)$ de l'intervalle $[-1, 1]$.

On note r le $(n + 1)$-uplet $(r_0, r_1, ..., r_n)$ et $\Sigma_r(f)$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \omega_k f(r_k)$.

Les réels $(r_0, ..., r_n) \in [-1, 1]^{n+1}$ sont appelés *nœuds* de la quadrature. La performance de cette méthode d'approximation dépend du nombre de nœuds, du choix de ces nœuds et de la régularité de la fonction f. Ces trois aspects sont abordés dans ce problème.

II.A – Méthode de quadrature

Dans cette sous-partie, $(r_0, r_1, ..., r_n)$ sont $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[-1, 1]$.

II.A.1) Détermination des poids (ω_i)

Pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, on note $A_i(X) = \prod_{k \neq i} \frac{X - r_k}{r_i - r_k}$.

Q 13. Vérifier que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $A_i(r_j) = \delta_{i,j}$.

Q 14. Démontrer que $(A_0, A_1, ..., A_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner la décomposition, dans cette base, d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$.

On se propose de démontrer qu'il existe un unique $(n + 1)$-uplet $(\omega_0, ..., \omega_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour lequel l'égalité

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \omega_k P(r_k)$$

est valable pour toute fonction P polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

On raisonne par analyse-synthèse.

a) Analyse

On suppose l'existence d'un tel $(n + 1)$-uplet $(\omega_0, ..., \omega_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Q 15. Pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, exprimer ω_i en fonction de A_i.

Q 16. En déduire l'unicité de $(\omega_0, ..., \omega_n)$.

b) Synthèse

Q 17. Démontrer que, pour les valeurs $\omega_0, ..., \omega_n$, déterminées à la question 15, l'égalité

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \omega_k P(r_k)$$

est valable pour toute fonction P polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

BY-NC-SA

Dans toute la suite, pour un jeu de nœuds $r = (r_0, ..., r_n)$ donné, on note Q_r le polynôme

$$Q_r = \prod_{k=0}^{n}(X - r_k).$$

Si $(\omega_0, ..., \omega_n)$ sont les valeurs déterminées à la question 15, on rappelle que

$$\Sigma_r(f) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(r_k).$$

Q 18. On choisit $n = 0$ et $r_0 = 0$. Donner l'interprétation géométrique, en termes d'aire, de $\Sigma_r(f)$ lorsque f est positive sur $[-1, 1]$.

Q 19. On choisit $n = 1$, $r_0 = -1$ et $r_1 = 1$. Donner l'interprétation géométrique, en termes d'aire, de $\Sigma_r(f)$ lorsque f est positive sur $[-1, 1]$.

II.A.2) Majoration de l'erreur

On suppose f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$ et on se propose de majorer l'erreur d'approximation $|I(f) - \Sigma_r(f)|$.

Q 20. Justifier l'existence de $N(f^{(n+1)})$ et de $N(Q_r)$.

Q 21. Démontrer que $T_{r,f} = \sum_{k=0}^{n} f(r_k)A_k$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $T_{r,f}(r_i) = f(r_i)$, pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$.

On se propose de démontrer que, pour tout réel $x \in [-1, 1]$,

$$|f(x) - T_{r,f}(x)| \leqslant \frac{N(f^{(n+1)})N(Q_r)}{(n+1)!}. \tag{II.1}$$

On suppose que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$ s'annulant en au moins $n + 2$ points distincts de $[-1, 1]$.

Q 22. Démontrer que g' s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $]-1, 1[$.

Q 23. Démontrer que $g^{(n+1)}$ s'annule en au moins un point de l'intervalle $]-1, 1[$.

Q 24. Démontrer que l'inégalité (II.1) est vérifiée si $x \in \{r_0, ..., r_n\}$.

Q 25. On suppose que $x \notin \{r_0, ..., r_n\}$. Montrer qu'il existe un réel λ_x pour lequel la fonction g_x définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall t \in [-1, 1], \qquad g_x(t) = f(t) - T_{r,f}(t) - \lambda_x Q_r(t)$$

vérifie $g_x(x) = 0$.

Q 26. En utilisant le résultat de la question 23, démontrer qu'il existe un réel $c_x \in]-1, 1[$ tel que

$$\lambda_x = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

et conclure.

Q 27. En déduire que $|I(f) - \Sigma_r(f)| \leqslant 2\dfrac{N(f^{(n+1)})N(Q_r)}{(n+1)!}$.

II.B – Choix d'un jeu de nœuds

II.B.1) Nœuds équidistants

On choisit un jeu $s = (s_0, ..., s_n)$ de $n+1$ nœuds équidistants dans l'intervalle $[-1, 1]$ vérifiant $s_0 = -1$ et $s_n = 1$. On cherche à minorer $N(Q_s)$.

Q 28. On pose $h = 2/n$ et $x = -1 + th$ avec $t \in [0, n]$. Exprimer $|Q_s(x)|$ en fonction de $\varphi_{n+1}(t) = \prod_{k=0}^{n}|t - k|$.

Q 29. Justifier que la fonction φ_{n+1} admet un maximum sur $[0, n]$ et que ce maximum est atteint sur $[0, n/2]$.

On admet dans la suite que ce maximum est atteint sur $[0, 1]$.

Q 30. Démontrer que $\max_{[0,1]} \varphi_3 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Q 31. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}(n-1)!$.

Q 32. En déduire une minoration de $N(Q_s)$.

BY-NC-SA

II.B.2) Zéros des polynômes de Tchebychev

On cherche un nouveau jeu de nœuds $c = (c_0, ..., c_n)$ utilisant une famille de polynômes.

On rappelle que arccos est la fonction réciproque de la fonction $\left|\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta) \end{array}\right.$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n : x \mapsto \cos(n \arccos(x))$.

Q 33. Préciser le domaine de définition de T_n.

Q 34. Calculer, pour tout x dans le domaine de définition, $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$.

Q 35. Pour tout entier naturel n, calculer $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.

Q 36. Étudier la parité de T_n en fonction de n.

Q 37. Pour tout x dans le domaine de définition, démontrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.

Q 38. En déduire que T_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

Pour tout entier naturel n, T_n est le n-ième polynôme de Tchebychev.

Q 39. Montrer que T_{n+1} admet $n+1$ racines distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.

On rappelle qu'après l'exécution de l'instruction Python `import numpy as np`, `np.pi` désigne la constante π et `np.cos` correspond à la fonction cosinus. La fonction `np.cos` peut s'appliquer à un tableau, elle produit alors un nouveau tableau de même dimension dont les composantes sont les cosinus des composantes du tableau passé en paramètre. Par ailleurs, l'expression `np.linspace(x, y, n)` construit un vecteur de `n` valeurs, régulièrement espacées, la première valant `x` et la dernière `y`.

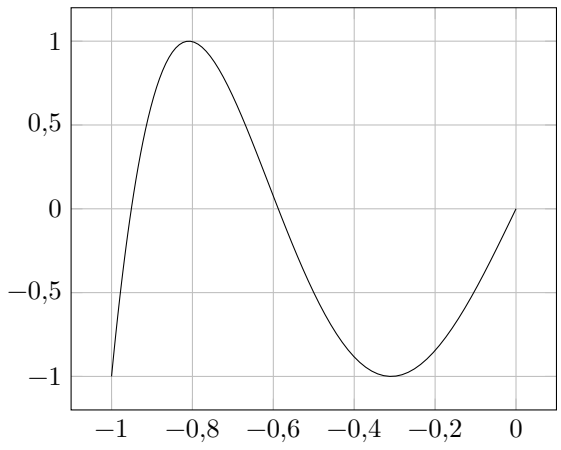
Q 40. Compléter la fonction Python `Tchebychev(n)` ci-dessous qui prend en argument un entier n et renvoie un couple de deux vecteurs $(u_0, ..., u_{999})$ et $(y_0, ..., y_{999})$, avec, pour tout $k \in [\![0, 999]\!]$, $y_k = T_n(u_k)$.

```
import numpy as np

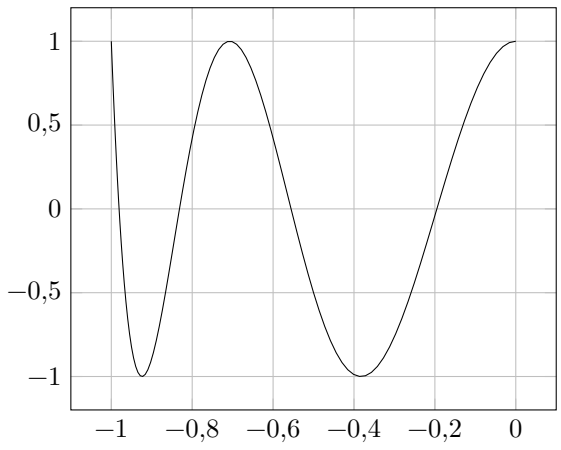
def Tchebychev(n):
    T = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 1000)
    U = np.cos(T)
    Y = . . .
    return U, Y
```

En reliant les points de coordonnées (u_k, y_k) pour deux valeurs du paramètre n, on a obtenu les deux courbes suivantes.

Courbe 1



Courbe 2



Q 41. Pour chacune de ces deux courbes, préciser, en la justifiant, la valeur utilisée pour le paramètre n.

Q 42. On choisit les racines obtenues en question 39 comme nœuds du jeu $c = (c_0, ..., c_n)$. Donner la valeur de $N(Q_c)$.

II.B.3) Comparaison des ces deux jeux de nœuds

Q 43. En admettant que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{-n}\, n^n$, calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du rapport $\dfrac{N(Q_c)}{N(Q_s)}$.

Q 44. À l'aide de ce résultat et de celui de la question 27, comparer la qualité des estimations de l'intégrale sur $[-1, 1]$ par quadrature, selon le choix de s ou c comme jeu de nœuds.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

2021

4 heures Calculatrice autorisée

La loi du demi-cercle

Notations

— Pour tous entiers naturels p et q tels que $p \leqslant q$ on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leqslant i \leqslant q\}$.

— Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients réels, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et à coefficients réels de taille n et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles orthogonales de taille n.

— Pour toute matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $\lambda_1(M) \geqslant \lambda_2(M) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(M)$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant.

— On note $M^\top$ la transposée d'une matrice M.

— Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note E_{ij} la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i-ème ligne et la j-ième colonne qui vaut 1.

— Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|M\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(MM^\top)}$ sa norme euclidienne canonique.

— Dans tout le problème, on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω.

— Étant donnée une variable aléatoire discrète X à valeurs réelles admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance. Si X admet une variance, on note $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

Problématique

En essayant d'expliquer la répartition des niveaux d'énergie des noyaux des atomes lourds, Eugene Wigner a été amené, dans les années 1950, à étudier le spectre de matrices symétriques réelles aléatoires de grande taille. La figure 1 montre un histogramme qui représente la répartition des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle de taille $n = 2500$ constituée de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, d'espérance nulle et de variance égale à 1.

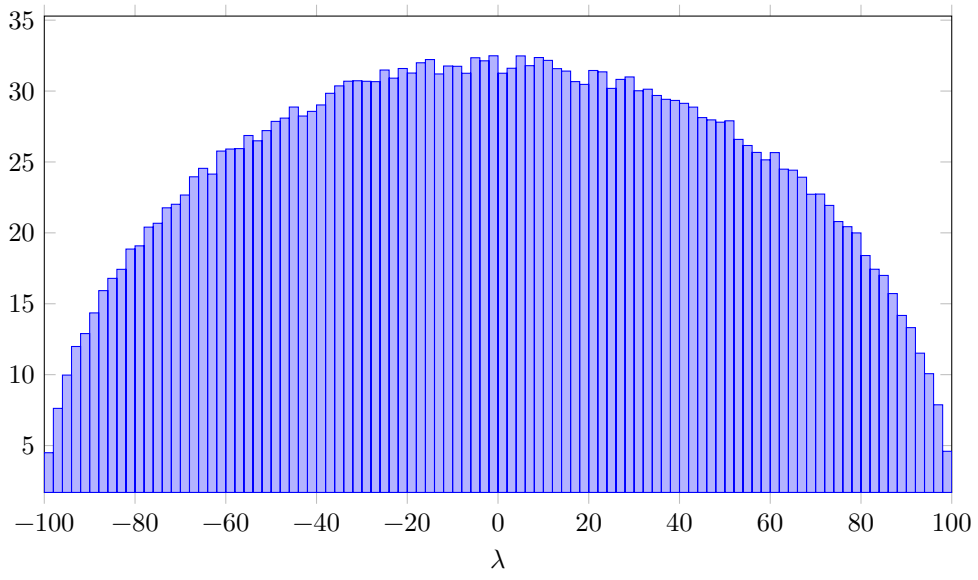


Figure 1

On voit que les valeurs propres se répartissent suivant un profil en demi-cercle de rayon $2\sqrt{n}$. En normalisant par un facteur $1/\sqrt{n}$ on obtient le profil d'un demi-cercle de rayon 2.

BY-NC-SA

Plus précisément, on considère $(X_{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^\star)^2}$ une famille de variables aléatoires discrètes réelles telles que

— pour tout $(i,j)\in(\mathbb{N}^\star)^2$, $X_{ij}=X_{ji}$;

— les variables aléatoires X_{ij} sont de même loi, d'espérance nulle et de variance 1 ;

— pour $n\geqslant 1$, les variables aléatoires X_{ij}, pour $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ et pour tout $\omega\in\Omega$, on note $M_n(\omega)$ la matrice $\left(X_{ij}(\omega)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $\omega\in\Omega$, on note $\Lambda_{1,n}(\omega)\geqslant\cdots\geqslant\Lambda_{n,n}(\omega)$ les valeurs propres de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}M_n(\omega)$.

On définit ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^\star$ et $i\in[\![1,n]\!]$, des variables aléatoires réelles discrètes $\Lambda_{i,n}$ sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

On se propose de montrer le résultat suivant :

Loi du demi-cercle

Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue et bornée,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\Lambda_{i,n})\right)\quad\xrightarrow{n\to+\infty}\quad\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dans la partie I, on établit une inégalité portant sur les valeurs propres d'un couple de matrices symétriques. La partie II est consacrée à la résolution d'un problème de dénombrement qui est utilisée dans la partie III où la loi du demi-cercle est démontrée pour des variables aléatoires uniformément bornées. Dans la partie IV, on établit la loi du demi-cercle dans le cas général en utilisant les résultats des parties I et III.

I Inégalité de Hoffman-Wielandt

I.A – Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Q 1. Montrer que, pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous P et Q dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|PMQ\|_F=\|M\|_F$.

Q 2. On note $D_A=\mathrm{diag}(\lambda_1(A),...,\lambda_n(A))$ et $D_B=\mathrm{diag}(\lambda_1(B),...,\lambda_n(B))$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P=(p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $\|A-B\|_F^2=\|D_AP-PD_B\|_F^2$.

Q 3. Montrer que

$$\|A-B\|_F^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}p_{i,j}^2\left(\lambda_i(A)-\lambda_j(B)\right)^2.$$

I.B – On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}m_{j,i}=1$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

On note $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})&\to&\mathbb{R}\\ M&\mapsto&\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}\left(\lambda_i(A)-\lambda_j(B)\right)^2\end{array}\right.$.

Q 4. Justifier que f admet un minimum sur $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que ce minimum est atteint en la matrice identité.

Q 5. Soit $(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3$ tel que $j\geqslant i$ et $k\geqslant i$. Montrer que, pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $x\in\mathbb{R}^+$,

$$f(M+xE_{ii}+xE_{jk}-xE_{ik}-xE_{ji})-f(M)=2x(\lambda_i(A)-\lambda_j(A))(\lambda_k(B)-\lambda_i(B))\leqslant 0$$

Q 6. Soient $n\geqslant 2$ et $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ une matrice différente de l'identité. On note i le plus petit entier appartenant à $[\![1,n]\!]$ tel que $m_{i,i}\neq 1$. Montrer qu'il existe une matrice $M'=(m'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M')\leqslant f(M)$ et $m'_{j,j}=1$ pour tout $j\in[\![1,i]\!]$.

BY-NC-SA

Q 7. En déduire que

$$\min\{f(M) \mid M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})\} = f(I_n).$$

I.C –

Q 8. En déduire que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda_i(A) - \lambda_i(B)\big)^2 \leqslant \|A-B\|_F^2.$$

II Dénombrement des mots bien parenthésés

Dans cette partie, on s'intéresse à des chaines de caractères constituées uniquement des deux caractères parenthèse ouvrante et parenthèse fermante. On dit qu'un mot est *bien parenthésé* s'il commence par une parenthèse ouvrante et qu'à toute parenthèse ouvrante est associée une (unique) parenthèse fermante *qui lui est postérieure*. Par exemple le mot

( ) (( ))

est bien parenthésé. En revanche, le mot

( )) ( )

n'est pas bien parenthésé. Un mot bien parenthésé est ainsi forcément constitué d'un nombre pair de caractères, chaque parenthèse qui s'ouvre doit se refermer.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note C_n le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. On pose par commodité $C_0 = 1$.

II.A –

Q 9. En énumérant les différents mots bien parenthésés de longueur 2, 4 et 6, montrer que $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ et déterminer C_3.

Q 10. Montrer que, pour tout entier naturel n, $C_n \leqslant 2^{2n}$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum C_k x^k$?

Q 11. Montrer par un raisonnement combinatoire que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i C_{k-i-1}.$$

On peut remarquer qu'un mot bien parenthésé est forcément de la forme $(m)m'$ avec m et m' deux mots bien parenthésés, éventuellement vides.

II.B – Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, on pose $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$.

Q 12. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $F(x) = 1 + x\big(F(x)\big)^2$.

Q 13. Montrer que la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2xF(x) - 1 \end{array}\right.$ ne s'annule pas.

Q 14. Déterminer, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, une expression de $F(x)$ en fonction de x.

Q 15. Déterminer le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u}$. On écrira les coefficients sous la forme d'un quotient de factorielles et de puissances de 2.

Q 16. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}.$$

BY-NC-SA

III Loi du demi-cercle, cas uniformément borné

On suppose, uniquement dans cette partie, que les variables aléatoires X_{ij} sont uniformément bornées :

$$\exists K \in \mathbb{R} \qquad \forall (i,j) \in (\mathbb{N}^\star)^2 \quad \left|X_{ij}\right| \leqslant K.$$

III.A – Pour tout entier naturel k on pose

$$m_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Q 17. Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut m_{2k+1} ?

Q 18. En utilisant le changement de variable $x = 2\sin t$, calculer m_0.

Q 19. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel k,

$$m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2} m_{2k}.$$

Q 20. En déduire que

$$m_k = \begin{cases} C_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

III.B – Soit k un entier naturel. On se propose de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = m_k,$$

où $\Lambda_{i,n}^k = (\Lambda_{i,n})^k$ est la puissance k-ième de $\Lambda_{i,n}$.

Q 21. Justifier que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k$ admet une espérance et que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbb{E}\left(\mathrm{tr}(M_n^k)\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in[\![1,n]\!]^k} \mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}).$$

On appelle *cycle* de longueur k à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, tout $(k+1)$-uplet $\vec{\imath} = (i_1, i_2, ..., i_k, i_1)$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$. Les éléments $i_1, ..., i_k$ sont appelés *sommets* du cycle $\vec{\imath}$. On dit aussi que le cycle *passe* par ces sommets. On note $|\vec{\imath}|$ le nombre de sommets distincts du cycle $\vec{\imath}$.

On appelle *arêtes* du cycle $(i_1, i_2, ..., i_k, i_1)$ les couples non ordonnés (l'ordre des deux éléments de chaque couple n'est pas significatif) (i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_k, i_1).

Par exemple $\vec{\imath} = (1,3,5,3,2,2,1)$ est un cycle de longueur 6 dans $[\![1,5]\!]$. Les sommets de ce cycle sont les éléments 1, 2, 3 et 5, donc $|\vec{\imath}| = 4$. Les arêtes distinctes de ce cycle sont $(1,3)$, $(3,5)$, $(3,2)$, $(2,2)$ et $(2,1)$. Les arêtes $(3,5)$ et $(5,3)$ sont les mêmes.

Q 22. Montrer que le nombre de cycles de longueur k dans $[\![1,n]\!]$ passant par ℓ sommets distincts est inférieur ou égal à $n^\ell \ell^k$.

Q 23. En déduire que

$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2}} \left|\mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1})\right| \quad \xrightarrow{n\to+\infty} \quad 0.$$

On classe les cycles de longueur k en trois sous-ensembles :

— l'ensemble $\mathcal{A}_k$, constitué des cycles où au moins une arête n'apparait qu'une fois ;

— l'ensemble $\mathcal{B}_k$, constitué des cycles où toutes les arêtes apparaissent exactement deux fois ;

— l'ensemble $\mathcal{C}_k$, constitué des cycles où toutes les arêtes apparaissent au moins deux fois et il en existe au moins une qui apparait au moins trois fois.

BY-NC-SA

Q 24. Montrer que, si le cycle $(i_1, i_2, ..., i_k, i_1)$ appartient à $\mathcal{A}_k$, alors

$$\mathbb{E}(X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_{k-1} i_k} X_{i_k i_1}) = 0.$$

Q 25. Montrer que, pour tout cycle $\vec{\imath}$ appartenant à $\mathcal{C}_k$, $|\vec{\imath}| \leqslant \dfrac{k+1}{2}$.

Q 26. Que peut-on dire de $\mathcal{B}_k$ si k est impair ? En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = 0$ dans ce cas.

On suppose dans la suite que k est pair et que $\vec{\imath} \in \mathcal{B}_k$ est un cycle passant par $\dfrac{k}{2}+1$ sommets distincts. Autrement dit $|\vec{\imath}| = \dfrac{k}{2}+1$.

On parcourt les arêtes de $\vec{\imath}$ dans l'ordre. À chaque arête de $\vec{\imath}$ on associe une parenthèse ouvrante si cette arête apparait pour la première fois et une parenthèse fermante si elle apparait pour la deuxième fois. Par exemple, au cycle $(1,3,2,3,1)$ correspond $(())$, au cycle $(1,2,1,3,1)$ correspond $()()$.

Q 27. Justifier que l'on obtient ainsi un mot bien parenthésé de longueur k.

Q 28. Dénombrer les cycles $\vec{\imath}$ qui correspondent à un mot bien parenthésé fixé.

Q 29. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = C_{k/2}.$$

III.C –

Q 30. En déduire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(\Lambda_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

III.D – Soit $A > 2$.

Q 31. Montrer que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) \leqslant \frac{1}{A^{p+2q}}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right).$$

Q 32. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) = 0.$$

Q 33. Soient f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et P un polynôme de degré p. Justifier qu'il existe une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\,]-A, A[, \qquad |f(x) - P(x)| \leqslant K|x|^p.$$

Q 34. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |f-P|(\Lambda_{i,n})\right) = 0.$$

BY-NC-SA

III.E –

Q 35. Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

IV Loi du demi-cercle, cas général

On revient au cas général. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice d'un événement A.

Pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ et pour tout $C > 0$, on pose

$$\sigma_{ij}(C) = \sqrt{\mathbb{V}(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C})}.$$

Si $\sigma_{ij}(C) \neq 0$, on pose

$$\widehat{X}_{ij}(C) = \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C} - \mathbb{E}(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C})).$$

IV.A –

Q 36. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}) \quad \xrightarrow{C\to+\infty} \quad \mathbb{E}(X).$$

Q 37. En déduire que

$$\lim_{C\to+\infty} \sigma_{ij}(C) = 1.$$

Q 38. Justifier que, pour C assez grand, les variables $\widehat{X}_{ij}(C)$ sont bien définies et qu'elles sont alors bornées, centrées, de variance 1 et qu'elles sont mutuellement indépendantes pour $1 \leqslant i \leqslant j$.

Q 39. Montrer que

$$X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)X_{ij} + \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} - \mathbb{E}(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C})).$$

Q 40. Montrer que

$$\lim_{C\to+\infty} \mathbb{E}\Big((X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C))^2\Big) = 0.$$

IV.B – Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$, on note $\widehat{M}_n(C) = (\widehat{X}_{ij}(C))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\widehat{\Lambda}_{1,n}(\omega) \geqslant ... \geqslant \widehat{\Lambda}_{n,n}(\omega)$ les valeurs propres de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\widehat{M}_n(C)(\omega)$ rangées dans l'ordre décroissant.

On obtient ainsi des variables aléatoires réelles discrètes $\widehat{\Lambda}_{1,n}, ..., \widehat{\Lambda}_{n,n}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne.

Q 41. Montrer que

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widehat{\Lambda}_{i,n})\right)\right| \leqslant \frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F\right).$$

Q 42. On suppose de plus f bornée. Montrer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\Lambda_{i,n})\right) \quad \xrightarrow{n\to+\infty} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

IV.C –

Q 43. Montrer la loi du demi-cercle dans le cas général.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

2021

4 heures Calculatrice autorisée

Inégalités de Bernstein

Le but de ce problème est d'étudier les inégalités dites de Bernstein dans deux cadres différents.

La première partie s'intéresse à la démonstration de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes et à certaines applications. La deuxième partie introduit la notion de transformée de Fourier et permet d'établir une inégalité de Bernstein pour des fonctions dont la transformée de Fourier vérifie certaines propriétés.

Les deux parties de ce sujet sont complètement indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre désiré.

I Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

Dans cette partie,

— si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n ;

— si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\exists (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \exists (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

On remarque que les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont des fonctions bornées ;

— si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée de I dans $\mathbb{C}$, on note

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

On admet que $f \mapsto \|f\|_{L^\infty(I)}$ définit une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{C}$.

I.A – Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Q 1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n, puis montrer que $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Q 3. En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $\theta \mapsto P(\cos\theta)$ est dans $\mathcal{S}_n$.

Q 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])}$.

Q 5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$.

On pourra commencer par établir que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin\theta|$.

I.B – Inégalité de Bernstein

Soit n un entier naturel non nul.

Q 6. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, scindé à racines simples, et $(\alpha_1, ..., \alpha_{2n})$ ses racines. Montrer que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X - \alpha_k)A'(\alpha_k)}. \tag{I.1}$$

Soit P dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

Q 7. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifier que $X - 1$ divise P_λ.

Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on note Q_λ le quotient de P_λ par $X - 1$:

$$Q_\lambda(X) = \frac{P(\lambda X) - P(\lambda)}{X - 1} \in \mathbb{C}_{2n-1}[X].$$

BY-NC-SA

Q 8. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.

On considère le polynôme $R(X) = X^{2n} + 1$. Pour k dans $[\![1, 2n]\!]$, on note $\varphi_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$.

Q 9. Montrer que

$$R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k).$$

Q 10. À l'aide de la formule (I.1), montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k} \omega_k$$

puis en déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}. \tag{I.2}$$

Q 11. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

On pourra appliquer l'égalité (I.2) au polynôme X^{2n}.

Soit maintenant f dans $\mathcal{S}_n$.

Q 12. Montrer qu'il existe $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} U(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Q 13. Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\dfrac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \dfrac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$ et déduire des questions 11 et 12 que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(\theta + \varphi_k) \frac{(-1)^k}{2\sin(\varphi_k/2)^2}. \tag{I.3}$$

Q 14. En déduire que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |f'(\theta)| \leqslant n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{I.4}$$

I.C – Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)

Soit n un entier naturel non nul.

Q 15. Déduire des questions 3 et 14 que

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \left| P'(x)\sqrt{1-x^2} \right| \leqslant n \|P\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

Q 16. Montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad |Q(1)| \leqslant n \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| Q(x)\sqrt{1-x^2} \right|.$$

On pourra considérer $f : \theta \mapsto Q(\cos\theta)\sin\theta$ et vérifier que $f \in \mathcal{S}_n$.

Q 17. Soit $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $t \in [-1, 1]$. Montrer que

$$|R(t)| \leqslant n \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| R(x)\sqrt{1-x^2} \right|.$$

On pourra considérer le polynôme $S_t(X) = R(tX)$.

Q 18. En déduire que, pour tout P dans $\mathbb{C}_n[X]$,

$$\|P'\|_{L^\infty([-1,1])} \leqslant n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

Q 19. Peut-il y avoir égalité dans l'inégalité précédente ?

BY-NC-SA

II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

Dans cette partie,

— pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée k-ième continue sur $\mathbb{R}$ (si $k = 0$, f est continue) ; on dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$;

— on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ *continues* et intégrables sur $\mathbb{R}$;

— pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$;

— on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ *continues* et bornées sur $\mathbb{R}$;

— pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^\mathbb{R}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

II.A – Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Q 20. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Q 21. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Q 22. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout réel x. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ, exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ.

II.B – Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle produit de convolution de f et g, et on note $f * g$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la sous-partie II.B que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Q 23. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = (g*f)(x).$$

Q 24. Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$.

Q 25. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in [\![0,k]\!]$, alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f*g)^{(k)} = f*(g^{(k)})$.

Q 26. On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f*g \in L^1(\mathbb{R})$. En admettant que, pour tout ξ réel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

existent et sont égales, montrer que $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$.

BY-NC-SA

II.C – Introduction d'une fonction plateau

On cherche dans cette sous-partie à construire une fonction réelle positive ρ, définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\rho(t) = 1$ pour tout $t \in [-1,1]$ et $\rho(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash[-2,2]$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{-1/t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 27. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On pourra montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists P_k \in \mathbb{R}[X]$, $\forall t > 0$, $\varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)\mathrm{e}^{-1/t}$.

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]-1,1[, \\ \mathrm{e}^{1/(t^2-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 28. Montrer, en l'exprimant à l'aide de φ, que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q 29. Soit θ l'unique primitive de ψ s'annulant en 0. Montrer que θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, constante sur $]-\infty,-1]$ (on note A cette constante) et constante sur $[1,+\infty[$ (on note B cette constante). Vérifier que $A \neq B$.

Q 30. Construire alors une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[-1,1]$ et constante égale à 0 sur $\mathbb{R}\backslash[-2,2]$.

II.D – Inégalités de Bernstein

On admet les formules suivantes, dites formules d'inversion de Fourier :

— si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$;

— si $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, si a est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, et si $a \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\alpha = \hat{a}$.

On remarque que ces résultats permettent d'affirmer que, si f et g sont deux fonctions continues telles que f, g, $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont intégrables et si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$.

On considère toujours la fonction ρ définie à la question 30.

Soit r la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout réel x,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\rho(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Q 31. Montrer que r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa fonction dérivée (faisant éventuellement intervenir une intégrale).

Q 32. Montrer que $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et en déduire que r est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$.

On admet qu'en utilisant la même méthode, on montre que r' est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda > 0$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\hat{f}$ soit nulle en dehors du segment $[-\lambda,\lambda]$. On note r_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $r_\lambda(x) = r(\lambda x)$ pour tout réel x.

Q 33. On admet que $f * r_\lambda$ est intégrable. Montrer que $f = \lambda f * r_\lambda$.

Q 34. En déduire que, si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^\star$, indépendante de λ et de f, telle que

$$\|f'\|_\infty \leqslant C\lambda\|f\|_\infty.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

PSI

2021

4 heures

Calculatrice autorisée

Ce sujet comprend trois parties. Les résultats généraux du I.A sont utilisés dans la partie II et dans la sous-partie III.A. Le III.B.2 peut être traité indépendamment du III.B.1.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n. On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ sa transposée.

Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

Définitions

Un *graphe orienté* G est un ensemble $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini dont les éléments s'appellent les *sommets* du graphe G et où $A \subset S^2$. Les éléments de A s'appellent les *arêtes orientées* du graphe G.

Si $a = (s, s') \in A$, a est l'arête orientée reliant le sommet s au sommet s'. Si $(s, s') \in S^2$, on dit que s' est un *sommet voisin* de s s'il existe une arête orientée reliant s à s', c'est-à-dire si $(s, s') \in A$.

On note que s peut être un sommet voisin de lui-même (si $(s, s) \in A$) et que s' peut être un voisin de s alors que s n'est pas un voisin de s' (si $(s, s') \in A$ alors que $(s', s) \notin A$).

I Marche aléatoire sur un graphe

On considère un graphe orienté fini dont les sommets sont numérotés de 1 à n.

Un point se déplace aléatoirement d'un sommet à un autre de ce graphe en suivant les arêtes orientées du graphe. Le nombre d'étapes de cette marche aléatoire peut tendre vers l'infini. À chaque étape, le point se déplace du sommet où il se trouve vers l'un de ses sommets voisins de façon équiprobable. Ceci entraine notamment que la probabilité de passer du sommet i au sommet j ne dépend pas du rang de l'étape.

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $t_{i,j}$, la probabilité que le point passe du sommet i au sommet j ; en particulier, s'il n'y a pas d'arête reliant i à j, $t_{i,j} = 0$. La matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $t_{i,j}$ est notée T. Cette matrice s'appelle la *matrice de transition* du graphe.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, ..., p_{n-1}^{(k)}, p_n^{(k)})$, où, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i^{(k)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet i à l'étape de rang k.

I.A – Résultats généraux

Q 1. Justifier que, pour tout entier naturel k, $p_1^{(k)} + \cdots + p_n^{(k)} = 1$.

Q 2. Montrer que, pour tout tout entier naturel k, $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$.

Q 3. En déduire, pour tout entier naturel k, une expression de $P^{(k)}$ en fonction de T, k et $P^{(0)}$.

Q 4. On suppose que la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $P = (p_1, ..., p_n)$. Montrer que $PT = P$, que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et que $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

BY-NC-SA

I.B – Marche aléatoire sur un tétraèdre

Dans cette sous-partie, on considère le graphe orienté $G = (S, A)$ où

$$\begin{cases} S = \{1, 2, 3, 4\}, \\ A = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (3,4), (4,3)\}. \end{cases}$$

La figure 1 représente ce graphe en version complète à gauche et en version simplifiée à droite. Les sommets sont représentés par des cercles et l'arête orientée reliant le sommet s au sommet s', par une flèche de s vers s'. Par la suite, nous utiliserons la représentation simplifiée dans laquelle si le graphe comporte les deux arêtes orientées (s, s') et (s', s) elles sont représentées par un seul trait avec une flèche à chaque extrémité.

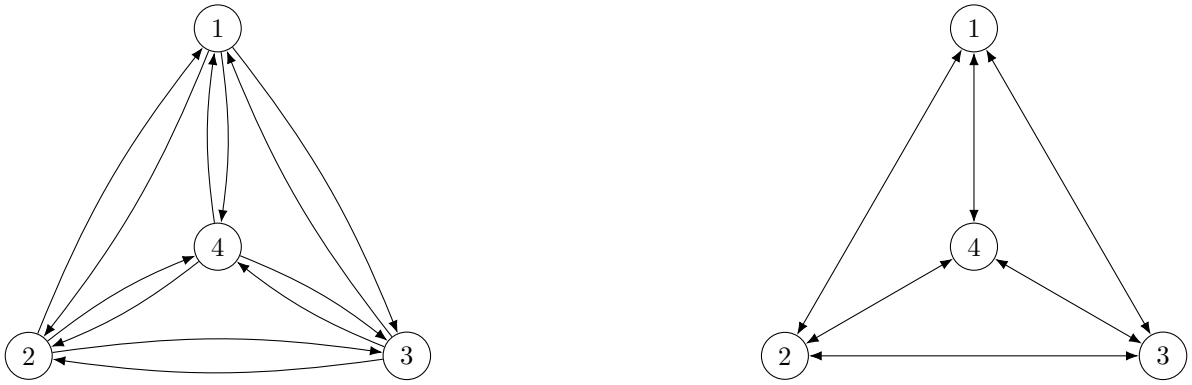


Figure 1

On suppose que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des trois autres sommets du graphe.

On pose

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q 5. Exprimer la matrice de transition T en fonction de J_4 et I_4.

Q 6. Démontrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$T = \frac{1}{3} Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^\top.$$

Q 7. Montrer que la suite de matrices $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et identifier géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice limite.

Q 8. Montrer que, quel que soit le vecteur ligne $P^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}, p_4^{(0)})$, où pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, $p_i^{(0)}$ est la probabilité que le point soit au départ sur le sommet i, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ligne $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

I.C – Marche aléatoire sur une pyramide tronquée à base carrée

Dans cette question, on suppose que G est le graphe représenté figure 2.

On rappelle que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des sommets à qui il est relié. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que

$$P^{(0)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

On note $S_1 = \{1, 3, 6, 8\}$ et $S_2 = \{2, 4, 5, 7\}$.

Q 9. Donner la matrice de transition T de ce graphe et calculer

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\, T.$$

BY-NC-SA

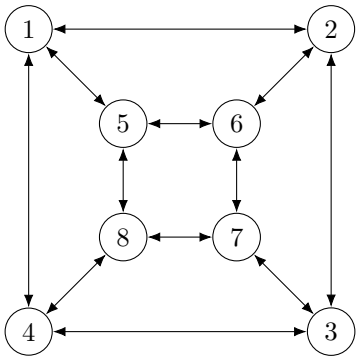


Figure 2

Q 10. Montrer que, si le point se trouve sur un sommet de la partie S_1 à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de la partie S_2 à l'étape suivante et que, s'il se trouve sur un sommet de S_2 à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de S_1 à l'étape suivante.

Q 11. La suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

II Matrices stochastiques et distributions de probabilité

Définitions

Soit $X = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On dit que X est une distribution de probabilité si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geqslant 0$ et $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une matrice stochastique si chaque ligne de M est une distribution de probabilité.

II.A –

Q 12. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que M est une matrice stochastique si et seulement si

$$M\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}.$$

Q 13. Montrer que la matrice de transition d'un graphe (définie dans la partie I) est une matrice stochastique et que, pour tout entier naturel k, le vecteur $P^{(k)}$, lui aussi défini dans la partie I, est une distribution de probabilité.

II.B –

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques, $X \in \mathbb{R}^n$ une distribution de probabilité et $\alpha \in [0, 1]$.

Q 14. Montrer que XM est une distribution de probabilité.

Q 15. Montrer que MN est une matrice stochastique.

Q 16. Montrer que $\alpha M + (1 - \alpha)N$ est une matrice stochastique.

II.C –

Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre (réelle ou complexe) de M. On note $(u_1, ..., u_n)$ les composantes (réelles ou complexes), dans la base canonique, d'un vecteur propre u associé à λ.

BY-NC-SA

II.C.1)

Q 17. Soit $h \in \{1, ..., n\}$ tel que $|u_h| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i|$. Montrer que $|\lambda - m_{h,h}| \leqslant 1 - m_{h,h}$. En déduire que $|\lambda| \leqslant 1$.

Q 18. Soit $\delta = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} m_{i,i}$. Montrer que $|\lambda - \delta| \leqslant 1 - \delta$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat et montrer que, si tous les termes diagonaux de M sont strictement positifs, alors 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

II.C.2)

On suppose désormais que tous les coefficients $m_{i,j} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ de la matrice stochastique M sont strictement positifs.

Q 19. Démontrer que $\dim(\ker(M - I_n)) = 1$.

Si $(u_1, ..., u_n)$ désigne les composantes (réelles) dans la base canonique d'un vecteur de $\ker(M - I_n)$, on pourra utiliser $\min_{1 \leqslant i \leqslant n} u_i$.

Q 20. En déduire qu'il existe au plus une distribution de probabilité X invariante par M, c'est-à-dire vérifiant $XM = X$.

On pose $\varepsilon = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}$.

On s'intéresse à la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ des puissances de M. On note $m_{i,j}^{(k)}$ le coefficient de la matrice M^k situé à la ligne i et la colonne j.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$\begin{cases} \alpha_j^{(k)} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} m_{i,j}^{(k)}, \\ \beta_j^{(k)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} m_{i,j}^{(k)}. \end{cases}$$

Dans les quatre questions suivantes, j est un entier fixé dans $[\![1, n]\!]$ et k est fixé dans $\mathbb{N}$.

Q 21. Démontrer les inégalités $\alpha_j^{(k)} \leqslant \alpha_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k)}$.

Q 22. Démontrer qu'il existe un couple $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que

$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geqslant m_{i_0,j_0} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}).$$

Q 23. Démontrer qu'il existe un couple $(i_1, j_1) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que

$$\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geqslant m_{i_1,j_1} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}).$$

Q 24. En déduire que $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leqslant (1 - 2\varepsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$.

Q 25. Démontrer que la suite (M^k) converge vers une matrice stochastique $B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ dont toutes les lignes sont égales.

On note P^∞ la ligne $(b_1, ..., b_n)$.

Q 26. Démontrer que, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i > 0$.

Q 27. Démontrer que la suite $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} = (P^{(0)} M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers P^∞, quelle que soit la distribution de probabilité initiale $P^{(0)}$.

Q 28. Démontrer que P^∞ est l'unique distribution de probabilité P invariante par M, c'est-à-dire vérifiant $PM = P$.

BY-NC-SA

III Le graphe du web

On modélise le web par un graphe orienté à n sommets représentant chacun une page du web et dont les arêtes orientées représentent les liens hypertextes entre celles-ci. Lorsque la page i contient au moins un lien vers la page j, on dit que la page i *pointe vers* la page j. Cette situation est modélisée par l'existence de l'arête orientée de i vers j, notée $i \to j$. On dit que $i \to j$ est une *arête sortante* de i et une *arête entrante* de j. Si aucun lien de la page i ne pointe vers la page j, on note $i \not\to j$.

Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i désigne le nombre d'arêtes sortantes de la page i, c'est-à-dire le nombre de pages vers laquelle elle pointe. On suppose qu'aucune page ne pointe vers elle-même.

Les moteurs de recherche effectuent un classement entre les différentes pages du web à partir d'une mesure d'importance attribuée à chacune d'elles. Cette mesure d'importance s'appelle la *pertinence* de la page. On se propose d'étudier deux algorithmes permettant de mesurer la pertinence de chaque page du web.

On appelle pertinences des pages du web les éléments de toute suite finie $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) la pertinence μ_j de la page j est une fonction croissante de la pertinence de chacune des pages qui pointent vers elle ;

(ii) la contribution de la page i dans la pertinence de chacune des pages vers lesquelles elle pointe est une fonction décroissante de λ_i (voir définition ci-dessus).

III.A – Premier modèle de navigation sur le web

On suppose qu'un surfeur navigue sur le web de la manière suivante : lorsqu'il se trouve sur la page i,

— si la page i pointe vers d'autres pages, il se dirige au hasard, de manière équiprobable, vers l'une de ces pages ;

— si la page i ne pointe vers aucune page, il reste sur la page i.

Q 29. Vérifier que la matrice de transition associée à ce modèle de navigation est la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec

$$\begin{cases} a_{i,i} = \begin{cases} 1 & \text{si la page } i \text{ ne pointe vers aucune autre page} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \not\to j \\ 1/\lambda_i & \text{si } i \to j \end{cases} \qquad \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

III.B – L'algorithme PageRank

Selon le modèle précédent, lorsque le surfeur arrive sur une page ne comportant aucun lien vers d'autres pages, il lui est impossible de quitter cette page. Ce modèle n'étant pas conforme à la réalité, on décide de remplacer la matrice A par la matrice

$$B = (1 - \alpha)A + \frac{\alpha}{n} J_n.$$

où J_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, A est la matrice stochastique décrite à la question 29 et α est un réel de $]0, 1[$, appelé *facteur d'amortissement*.

III.B.1)

Q 30. Montrer que B est une matrice stochastique dont tous les coefficients sont strictement positifs.

Q 31. Dans le modèle de navigation admettant B pour matrice de transition, donner la probabilité de quitter une page ne contenant aucun lien vers une autre page.

Soit Q une distribution de probabilité. On définit la suite $(Q^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par $Q^{(k)} = QB^k$ pour tout entier naturel k.

Q 32. Démontrer que la suite $(Q^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite Q^∞ vérifie les conditons (i) et (ii) décrites dans l'introduction de cette partie. Elle fournit donc des pertinences pour les n pages du web. On exprimera la

BY-NC-SA

pertinence de chaque page j en fonction de celles des pages qui pointent vers elle en distinguant les pages qui pointent vers une autre page et les autres.

Connu sous le nom de PageRank cet algorithme de calcul des pertinences a été inventé par Sergey Brin et Larry Page, fondateurs de Google.

III.B.2) Calcul de B^k

Dans la pratique, on se contente d'approcher Q^∞ par $Q^{(k)} = QB^k$ pour une valeur de k suffisamment grande.

On suppose que le module numpy de Python a été importé à l'aide de l'instruction `import numpy as np`. Ceci donne ainsi accès aux fonctions suivantes :

— `np.identity(n)` crée I_n, la matrice identité d'ordre `n` ;

— `A.shape` donne, sous forme de couple, la taille du tableau `A`,
par exemple `np.identity(5).shape` → `(5, 5)` ;

— `np.dot(A, B)` calcule, le produit matriciel de `A` et `B` si `A` et `B` sont deux tableaux à deux dimensions compatibles avec le produit matriciel.

L'algorithme naïf de calcul de B^k repose sur sa définition, à savoir :

$$\begin{cases} B^0 = I_n, \\ B^k = B\,B^{k-1} \quad \forall k \geqslant 1. \end{cases}$$

Q 33. Écrire une fonction Python `puissance1(B, k)` qui prend en argument une matrice carrée `B` et un entier naturel `k` et renvoie la matrice B^k calculée en utilisant l'algorithme naïf.

L'algorithme d'exponentiation rapide repose sur le principe suivant :

$$\begin{cases} B^0 = I_n, \\ B^k = \left(B^2\right)^{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ B^k = B\left(B^2\right)^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Q 34. Écrire une fonction Python `puissance2(B, k)` qui prend en argument une matrice carrée `B` et un entier naturel k et renvoie la matrice B^k calculée à partir de l'algorithme d'exponentiation rapide.

Q 35. On suppose que $k \geqslant 2$ et on note p l'unique entier tel que $2^p \leqslant k < 2^{p+1}$. Pour chacun des appels `puissance1(B, k)` et `puissance2(B, k)`, calculer le nombre d'appels à la fonction `np.dot`, dans le pire et dans le meilleur des cas.

• • • FIN • • •

CC BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2021

4 heures Calculatrice autorisée

Autour des fonctions hypergéométriques

Objectif

L'objectif du problème est l'étude de suites, séries et fonctions dites *hypergéométriques* et d'en donner quelques exemples en analyse et en probabilités.

La partie I introduit la notion de suites et séries hypergéométriques. La partie II, indépendante de la partie I, définit la fonction Γ, permettant d'étendre la factorielle à des valeurs non entières. La partie III, qui s'appuie sur certains résultats des deux premières parties, introduit deux familles de fonctions hypergéométriques. Les parties IV et V, indépendantes l'une de l'autre, donnent des exemples de fonctions hypergéométriques, respectivement dans le cadre d'une famille de polynômes et dans un contexte probabiliste.

Notations

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On note $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial p parmi n, égal à $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$ et égal à 0 sinon.

On note $D = \mathbb{R} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, les deux notations $f^{(n)}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ sont utilisées pour la dérivée n-ième de f.

I Suites et séries hypergéométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *hypergéométrique* lorsqu'il existe deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}. \tag{I.1}$$

On dit alors que P et Q sont des polynômes *associés* à la suite hypergéométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On dit également qu'une série entière $\sum u_n x^n$ est une série hypergéométrique lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est hypergéométrique.

Q 1. Montrer qu'une suite géométrique est hypergéométrique.

Q 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \binom{n}{p}$ est hypergéométrique.

Q 3. Démontrer que l'ensemble des suites vérifiant la relation (I.1), avec

$$P(X) = X(X-1)(X-2) \qquad \text{et} \qquad Q(X) = X(X-2),$$

est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.

Q 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite hypergéométrique de polynômes associés P et Q. On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0) = 0$ et, $\forall n \geqslant n_0$, $Q(n) \neq 0$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

BY-NC-SA

II Extension de la factorielle

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Q 5. Justifier qu'on définit ainsi une fonction sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 6. Montrer que la fonction Γ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 7. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{II.1}$$

Q 8. Déterminer la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On admet qu'on peut prolonger la fonction Γ sur D par une fonction continue, toujours notée Γ, qui vérifie la relation (II.1) pour tout $x \in D$.

III Fonctions hypergéométriques

III.A – Symbole de Pochhammer

On définit le symbole de Pochhammer, pour tout nombre réel a et tout entier naturel n par

$$[a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(a+k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 9. Si a est un entier négatif ou nul, justifier que la suite $\left([a]_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Q 10. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $[a]_{n+1} = a[a+1]_n$.

Q 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de $[a]_n$

— à l'aide de factorielles lorsque $a \in \mathbb{N}^*$;

— à l'aide de deux valeurs de la fonction Γ, lorsque $a \in D$.

III.B – Fonction hypergéométrique de Gauss

Étant donné trois nombres réels a, b et c, on appelle *fonction hypergéométrique de Gauss* associée au triplet (a, b, c), la fonction, définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, par

$$F_{a,b,c}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\frac{x^n}{n!}.$$

Q 12. Justifier que, si $c \in D$, alors $\dfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}$ est bien défini pour tout entier naturel n.

On suppose cette condition vérifiée dans les questions suivantes.

Q 13. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\dfrac{x^n}{n!}$ est hypergéométrique et préciser des polynômes associés.

Q 14. Réciproquement, démontrer que l'ensemble des séries hypergéométriques associées aux polynômes obtenus à la question précédente est un espace vectoriel dont on donnera une base et dont on précisera la dimension.

Q 15. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\dfrac{x^n}{n!}$.

BY-NC-SA

Q 16. Justifier que $F_{a,b,c}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. Calculer sa dérivée et l'exprimer à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

Q 17. Justifier que $F_{a,b,c}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée n-ième à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

Q 18. Exprimer la fonction $x \mapsto F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Q 19. Exprimer la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

On admet, en cas d'existence de toutes les quantités présentes dans l'expression suivante, que

$$F_{a,b,c}(1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Q 20. Soient $N \in \mathbb{N}$, $c \in D$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $c - a \in D$. Justifier l'existence de $F_{a,-N,c}(1)$ et démontrer que

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{[a]_k}{[c]_k} = \frac{[c-a]_N}{[c]_N}.$$

Q 21. Soit $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $N \leqslant \min(u,v)$. En prenant $a = -u$ et $c = v - N + 1$, montrer l'identité de Vandermonde :

$$\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}.$$

On admet pour la suite que l'identité de Vandermonde reste valable pour tous entiers naturels u, v, N.

Q 22. Donner une interprétation combinatoire de l'identité de Vandermonde.

III.C – Fonction hypergéométrique confluente

Soient deux nombre réels a et c tels que $c \in D$.

Q 23. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$xy''(x) + (c-x)y'(x) - ay(x) = 0. \tag{III.1}$$

On exprimera ces solutions à l'aide du symbole de Pochhammer et on précisera la structure algébrique de leur ensemble.

On note $M_{a,c}$ la solution de l'équation (III.1) vérifiant $M_{a,c}(0) = 1$. Cette fonction est appelée *fonction hypergéométrique confluente* associée au couple (a,c).

IV Les polynômes de Laguerre

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout nombre réel x,

$$\Phi_n(x) = \mathrm{e}^{-x}x^n \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\Phi_n^{(n)}(x).$$

Q 24. Déterminer L_0, L_1, L_2 et L_3.

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

Q 25. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n. Déterminer les coefficients $c_{n,k}$ tels que $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k$.

BY-NC-SA

Q 26. Pour tout nombre réel x, exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L'_n(x)$.

Q 27. Utiliser l'égalité $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}x\Phi_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$, que l'on justifiera, pour démontrer l'égalité

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L'_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q 28. Utiliser l'égalité $\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}\Phi_{n+1}^{(1)}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x)$ pour démontrer l'égalité

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q 29. En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0. \tag{IV.1}$$

Q 30. Montrer que L_n est une fonction hypergéométrique confluente.

V Loi hypergéométrique

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient deux entiers naturels A et n tels que $n \leqslant A$ et p un nombre réel compris entre 0 et 1. On suppose $pA \in \mathbb{N}$ et on note $q = 1 - p$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit la *loi hypergéométrique* de paramètres n, p et A lorsque

$$\begin{cases} X(\Omega) \subset [\![0, n]\!], \\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n]\!]. \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

V.A – Premiers résultats

Q 31. Vérifier qu'on a bien défini une loi de probabilité.

Q 32. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$. Calculer l'espérance de X.

On rappelle que, pour tous entiers naturels non nuls k et N, $k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$.

Q 33. Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ est hypergéométrique. En déduire une expression de la fonction génératrice de X à l'aide d'une fonction hypergéométrique.

V.B – Modélisation

On considère deux urnes contenant chacune A boules dont pA sont blanches et qA sont noires. On tire simultanément, de manière équiprobable, n boules dans la première urne. On note Y le nombre de boules blanches obtenues. On tire également, de manière équiprobable, n boules dans la deuxième urne, mais successivement et avec remise. On note Z le nombre de boules blanches obtenues.

Q 34. Quelle est la loi de la variable Z ? Donner l'espérance et la variance de Z.

Q 35. Démontrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

BY-NC-SA

V.C – Calcul de la variance

On se propose d'utiliser la modélisation du tirage dans la première urne pour retrouver la valeur de l'espérance et pour calculer la variance d'une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,p,A)$.

Pour cela, on numérote de 1 à pA chacune des boules blanches contenues dans la première urne et, pour tout entier naturel $i \in [\![1, pA]\!]$, on pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boule numérotée } i \text{ a été tirée,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 36. Exprimer Y à l'aide des Y_i et retrouver la valeur de l'espérance de Y. La comparer à celle de Z.

Q 37. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant pA$, démontrer que la variable aléatoire Y_iY_j suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

Q 38. En déduire la valeur de la variance de Y. La comparer à celle de Z.

V.D – Résultats asymptotiques

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{H}(n,p,A)$. On fixe n et p. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Q 39. Montrer que $\lim\limits_{A\to+\infty} \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Q 40. Interpréter ce résultat en lien avec ceux obtenus pour l'espérance et la variance de Y.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2021

4 heures

Calculatrice autorisée

Ce sujet est divisé en trois parties.

— Dans la première partie, on étudie une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui modélise la trajectoire d'une particule. On s'intéresse en particulier au temps nécessaire pour que la particule revienne pour la première fois à son point de départ, si cela arrive. Pour cela, on introduit une suite de nombres appelés nombres de Catalan et on étudie leurs propriétés.

— Dans la deuxième partie, entièrement indépendante de la première, on s'intéresse au calcul d'un déterminant à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

— Dans la troisième partie enfin, on utilise les résultats des deux premières parties pour calculer deux déterminants associés aux nombres de Catalan.

I Étude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p, \quad \text{où } p \in]0, 1[.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise la trajectoire aléatoire dans $\mathbb{Z}$ d'une particule située en $S_0 = 0$ à l'instant initial $n = 0$, et faisant à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ un saut de $+1$ avec une probabilité p et de -1 avec une probabilité $1 - p$, les sauts étant indépendants et p appartenant à $]0, 1[$.

Pour $\omega \in \Omega$, on représente la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(n, S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$.

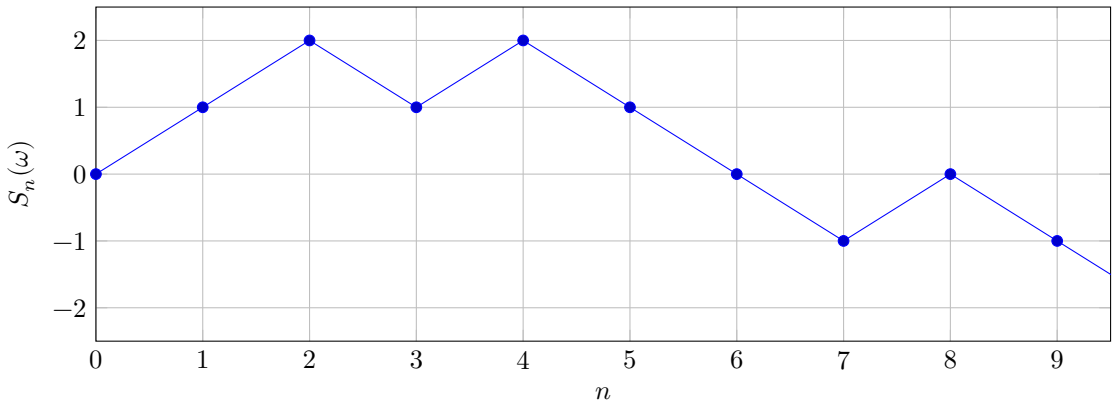


Figure 1 Exemple de trajectoire possible

I.A – Espérance et variance de S_n

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul.

Soit Y_n la variable aléatoire sur Ω égale au nombre de valeurs de $k \in [\![1, n]\!]$ telles que $X_k = 1$.

Q 1. Quelle est la loi de Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

Q 2. Quelle relation a-t-on entre S_n et Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de S_n. Justifier que S_n et n ont même parité.

I.B – Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur m tout m-uplet $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$ tel que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\gamma_i \in \{-1, 1\}$.

On pose alors $s_\gamma(0) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $s_\gamma(k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$.

On représente le chemin γ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(k, s_\gamma(k))$, $k \in [\![0, m]\!]$.

BY-NC-SA

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

— on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_{2n})$ de longueur $2n$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $s_\gamma(k) \geqslant 0$;

— on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

On convient de plus que $C_0 = 1$.

La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.

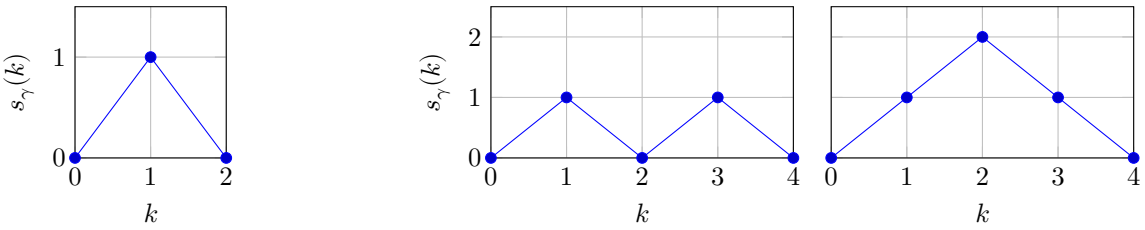


Figure 2 Représentation des chemins de Dyck de longueurs 2 et 4

Q 3. Donner sans démonstration la valeur de C_3 et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n + 2$. Soit $r = \max\{i \in [\![0, n]\!] \mid s_\gamma(2i) = 0\}$.

On suppose $0 < r < n$ et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, ..., \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, ..., \gamma_{2n+1})$.

Q 4. Justifier à l'aide d'une figure que $\gamma_{2r+1} = 1$, $\gamma_{2n+2} = -1$ et que α et β sont des chemins de Dyck.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$ un chemin de longueur m.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $A_{t,\gamma}$ l'événement : « pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $X_{t+k} = \gamma_k$ » ; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^{m} (X_{t+k} = \gamma_k).$$

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_{2n})$ un chemin de Dyck de longueur $2n$. Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(A_{t,\gamma})$ en fonction de n et p.

Soit T la variable aléatoire, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*, S_k(\omega) \neq 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 6. Montrer que T prend des valeurs paires et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = 2n+2) = 2\,C_n\,p^{n+1}(1-p)^{n+1}$.

I.B.1) Série génératrice des nombres de Catalan

Q 7. En utilisant la question 4, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}.$$

Q 8. À l'aide de la variable aléatoire T, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{C_n}{4^n}$ converge.

Q 9. En déduire que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} C_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

On pose alors, pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \quad \text{et} \quad g(t) = 2tf(t).$$

On rappelle que la série génératrice de T, donnée par $G_T(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n)t^n$, est définie si $t \in [-1, 1]$.

Q 10. À l'aide des questions précédentes, exprimer G_T à l'aide de g et de $\mathbb{P}(T = 0)$.

Q 11. En déduire que si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors T admet une espérance.

Q 12. Montrer que $\forall t \in I$, $g(t)^2 = 2g(t) - 4t$.

Q 13. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t}.$$

BY-NC-SA

Q 14. Montrer que ε est continue sur $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$. En déduire

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1-4t}.$$

Q 15. En déduire que $\mathbb{P}(T \neq 0) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$. Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Q 16. Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, alors T n'admet pas d'espérance.

I.C – Expression des nombres de Catalan et équivalent

Q 17. Justifier l'existence d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n à l'aide d'un coefficient binomial.

Q 18. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Q 19. Rappeler l'équivalent de Stirling. En déduire un équivalent de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 20. À partir de la question précédente, retrouver le résultat des questions 11 et 16.

II Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G_n = \Big((X^{i-1}|X^{j-1})\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \cdots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \cdots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \cdots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de G_n à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

II.A – Définition et propriétés d'un système orthogonal

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n.

Dans toute la partie II, on considère un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 21. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_0, V_1, ..., V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Q 22. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $(V_n|P) = 0$.

Q 23. Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n$.

II.B – Expression de $\det G_n$ *à l'aide de la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit G'_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G'_n = \Big((V_{i-1}|V_{j-1})\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (V_0|V_0) & (V_0|V_1) & \cdots & (V_0|V_n) \\ (V_1|V_0) & (V_1|V_1) & \cdots & (V_1|V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (V_n|V_0) & (V_n|V_1) & \cdots & (V_n|V_n) \end{pmatrix}$$

On note $Q_n = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de la famille $(V_0, V_1, ..., V_n)$ dans la base $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 24. Montrer que Q_n est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.

Q 25. Montrer que $Q_n^\top G_n Q_n = G'_n$, où $Q_n^\top$ est la transposée de la matrice Q_n.

Q 26. En déduire que $\det G_n = \prod_{i=0}^{n} \|V_i\|^2$.

BY-NC-SA

III Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

Dans cette partie, on introduit un produit scalaire particulier sur $\mathbb{R}[X]$ et une suite de polynômes. On vérifie qu'il s'agit d'un système orthogonal pour ce produit scalaire, ce qui permettra d'appliquer les résultats de la partie précédente.

III.A – Produit scalaire

Q 27. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la fonction $x \mapsto P(4x)Q(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Dans toute la partie III, on pose

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X], \quad (P|Q) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Q 28. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III.B – Système orthogonal

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $U_0 = 1$, $U_1 = X-1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n$.

Q 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n est unitaire de degré n, et déterminer la valeur de $U_n(0)$.

Q 30. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(4\cos^2\theta)\sin\theta = \sin((2n+1)\theta)$.

Q 31. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Q 32. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|U_n\| = 1$.
Pour calculer la valeur de $(U_m|U_n)$, on pourra effectuer le changement de variable $x = \cos^2\theta$.

III.C – Application

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = (X^n|1)$.

Q 33. À l'aide d'une intégration par parties, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{2\times 4^n}{\pi}\int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2n-1}\mu_n.$$

Q 34. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = C_n$.

Q 35. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des parties précédentes la valeur du déterminant

$$H_n = \det(C_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-1} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} & C_{2n} \end{vmatrix}$$

III.D – Un autre déterminant de Hankel

Dans cette sous-partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H'_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_2 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_3 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-3} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-2} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-3} & C_{2n-2} & C_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Q 36. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Montrer $(D_n|X^k) = 0$.

Q 37. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = U_n$, puis déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur du déterminant H'_n.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2021

4 heures

Calculatrice autorisée

Dans tout ce sujet, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et w est une fonction continue et strictement positive de I dans $\mathbb{R}$; on dit que w est *un poids* sur I.

Étant donnée une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ telle que fw est intégrable sur I, on cherche à approcher l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)w(x)\,\mathrm{d}x$ par une expression de la forme

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.

Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note

$$e(f) = \int_I f(x)w(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée. On remarque que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ telles que fw est intégrable sur I.

On rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* si son coefficient dominant est 1.

Étant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si,

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad e(P) = 0,$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m,

$$\int_I P(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j).$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

Les parties II et III s'appuient sur la partie I et sont indépendantes entre elles.

I Généralités sur les formules de quadrature

I.A – Exemples élémentaires

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas $I = [0,1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Q 1. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée $e(f)$.

Q 2. Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$.

Q 3. Déterminer les coefficients λ_0, λ_1, λ_2 pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?

I.B – Construction de formules d'ordre quelconque

On revient au cas général.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts dans I, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$.

BY-NC-SA

Q 4. Montrer que l'application linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Q 5. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Q 6. Montrer que $(L_0, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, ..., x_n)$.

Q 7. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x) \, \mathrm{d}x.$$

Q 8. On se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, 1/2, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question 3.

I.C – Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

Dans cette sous-partie, on suppose que l'intervalle I est un segment : $I = [a, b]$, avec $a < b$.

Pour tout entier naturel m, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi_m(x, t) = \begin{cases} (x - t)^m & \text{si } x \geqslant t, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

On observe que φ_m est continue si $m \geqslant 1$ et discontinue si $m = 0$.

On considère une formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$.

On note $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :

$$e(f) = \int_a^b f(x) w(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I.

Q 9. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e(f) = e(R_m)$, où R_m est définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t) f^{(m+1)}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Q 10. En déduire que, si $m \geqslant 1$,

$$e(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) \, \mathrm{d}t,$$

où la fonction $K_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], \qquad K_m(t) = e(x \mapsto \varphi_m(x, t)) = \int_a^b \varphi_m(x, t) w(x) \, \mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j, t).$$

On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b \left(\int_a^b g(x, t) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_a^b g(x, t) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

La fonction K_m est appelée *noyau de Peano associé à la formule de quadrature.*

On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m = 0$.

BY-NC-SA

I.D – Exemple : méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on suppose que I est un segment et $\forall x \in I,\ w(x) = 1$.
On se place d'abord dans le cas $I = [0,1]$ et on considère la formule de quadrature

$$I_1(g) = \frac{g(0) + g(1)}{2},$$

qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

Q 11. Calculer le noyau de Peano associé $t \mapsto K_1(t)$ et montrer que, pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$|e(g)| \leqslant \frac{1}{12} \sup_{x\in[0,1]} |g''(x)|.$$

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque $I = [a,b]$ (avec $a < b$), qu'on subdivise en $n+1$ points $a_0, ..., a_n$ équidistants :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \qquad a_i = a + ih,$$

où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.
On considère alors la formule de quadrature

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

appelée *méthode des trapèzes*. L'erreur de quadrature associée est notée :

$$e_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n(f).$$

Q 12. Représenter graphiquement $T_n(f)$.

Q 13. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

où e est l'erreur associée à la formule de quadrature I_1 étudiée à la question 11 et les $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.

Q 14. En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

II Polynômes orthogonaux et applications

Dans la suite, on note E l'ensemble des fonctions f continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2 w$ est intégrable sur I.

II.A – Étude d'un produit scalaire

Q 15. Montrer que, pour toutes fonctions f et g de E, le produit $fg\,w$ est intégrable sur I.
On pourra utiliser l'inégalité $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, après l'avoir justifiée.

Q 16. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour toutes fonctions f et g de E, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Q 17. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

BY-NC-SA

Dans la suite, on munit E de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

II.B – Polynômes orthogonaux associés à un poids

On suppose que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I. Cela entraine par linéarité de l'intégrale que E contient toutes les fonctions polynomiales.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est unitaire,

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(p_n) = n$,

(c) la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, autrement dit $\langle p_i, p_j\rangle = 0$, pour $i \neq j \in \mathbb{N}$.

On dit que les (p_n) sont les *polynômes orthogonaux associés au poids w*.

On s'intéresse aux racines des polynômes p_n.

On rappelle que $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de I, c'est-à-dire l'intervalle I privé de ses éventuelles extrémités.

On a donc $\mathring{I} =]a, b[$, où $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1, ..., x_k$ les racines distinctes de p_n qui sont dans $\mathring{I}$ et $m_1, ..., m_k$ leurs multiplicités respectives. On considère le polynôme

$$q(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\varepsilon_i}, \quad \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } m_i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Q 18. En étudiant $\langle p_n, q\rangle$, montrer que p_n possède n racines distinctes dans $\mathring{I}$.

II.C – Applications : méthodes de quadrature de Gauss

Considérons une formule de quadrature

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.

On suppose que les coefficients $(\lambda_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ sont choisis comme à la question 7 :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $(L_0, ..., L_n)$ est la base de Lagrange associée aux points $(x_0, ..., x_n)$ (définie dans la partie I).

Ainsi, la formule $I_n(f)$ est d'ordre $m \geqslant n$. Nous allons montrer que dans ces conditions, il existe un seul choix des points $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ qui permet d'obtenir l'ordre m le plus élevé possible.

Q 19. En raisonnant avec le polynôme $\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$, montrer que $m \leqslant 2n + 1$.

Q 20. Montrer que $m = 2n + 1$ si et seulement si les x_i sont les racines de p_{n+1}.

II.D – Exemple 1

On se place ici dans le cas où $I = [-1, 1]$ et $w(x) = 1$.

On est donc bien dans les conditions d'application des résultats précédemment obtenus.

Q 21. Déterminer les quatre premiers polynômes orthogonaux (p_0, p_1, p_2, p_3) associés au poids w.

Q 22. En déduire explicitement une formule de quadrature d'ordre 5 (on déterminera les points x_j et les coefficients λ_j).

II.E – Exemple 2

Dans cette sous-partie, $I =]-1, 1[$ et $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Q 23. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur I.

Cela entraine que E contient toutes les fonctions polynomiales.

Dans la suite, on considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $Q_n : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(n \arccos(x)) \end{array}\right.$.

BY-NC-SA

Q 24. Calculer Q_0, Q_1 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer simplement Q_{n+2} en fonction de Q_{n+1} et Q_n.

Q 25. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est polynomiale et déterminer son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on notera également Q_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui coïncide avec $x \mapsto Q_n(x)$ sur $[-1,1]$.

Q 26. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes orthogonaux associés au poids w. Montrer que

$$\begin{cases} p_0 = Q_0, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} Q_n. \end{cases}$$

Q 27. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer explicitement les points $(x_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de I telle que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ soit d'ordre maximal.

III Accélération de la méthode des trapèzes

On dit qu'une fonction S définie sur une partie de $\mathbb{C}$ est *développable en série entière au voisinage de* 0 s'il existe un disque ouvert D non vide de centre 0 et une suite complexe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in D$, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$.

III.A – Nombres b_m et polynômes B_m

On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, de rayon de convergence $R \neq 0$ et avec $\alpha_0 = 1$. On note S la somme de cette série entière sur son disque de convergence : pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, on a

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n.$$

Q 28. Montrer qu'il existe un réel $q > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n| \leqslant q^n$.

Q 29. On suppose que $\dfrac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et on note $\sum_{n\geqslant 0} \beta_n z^n$ son développement. Calculer β_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer β_n en fonction de $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_{n-1}$.
En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\beta_n| \leqslant (2q)^n.$$

Q 30. Montrer que $\dfrac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Q 31. En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe une unique suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$0 < |z| < r \Rightarrow \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Q 32. En effectuant un produit de Cauchy, montrer que $b_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} b_p = 0.$$

Q 33. En déduire la valeur de b_1, b_2, b_3 et b_4.

Q 34. En utilisant un argument de parité, montrer que $b_{2p+1} = 0$ pour tout entier $p \geqslant 1$.

Dans la suite du problème, on considère les polynômes B_m définis par

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b_k x^{m-k}.$$

On remarque que chaque polynôme B_m est unitaire de degré m et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $B_m(0) = b_m$.

Q 35. Déterminer B_0, B_1, B_2 et B_3.

Q 36. Montrer que, pour tout entier $m \geqslant 2$, $B_m(1) = b_m$, puis que, pour tout entier $m \geqslant 1$, $B'_m = mB_{m-1}$.

BY-NC-SA

III.B – Développement asymptotique de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on utilise les nombres b_m et les polynômes B_m définis dans la sous-partie III.A pour établir un développement asymptotique à tout ordre de l'erreur de quadrature associée à la méthode des trapèzes (déjà étudiée dans la partie I), pour une fonction suffisamment régulière.

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère une fonction $g : [0, n] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q 37. Montrer que

$$\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} - \int_0^n B_1(x-\lfloor x \rfloor) g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Q 38. En déduire que pour tout entier $m \geqslant 2$,

$$\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^{p-1} b_p}{p!}\left(g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)\right) + \frac{(-1)^m}{m!}\int_0^n B_m(x-\lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

On considère maintenant une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la formule de quadrature déjà étudiée à la partie I :

$$T_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2},$$

(méthode des trapèzes), où $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $a_i = a + ih$.

Q 39. Montrer que, pour tout entier $m \geqslant 1$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T_n(f) - \sum_{p=1}^{m} \frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}} + \rho_{2m}(n),$$

où les coefficients γ_{2p} sont donnés par

$$\gamma_{2p} = \frac{(b-a)^{2p} b_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\right)$$

et $\rho_{2m}(n)$ est un reste intégral vérifiant la majoration

$$|\rho_{2m}(n)| \leqslant \frac{C_{2m}}{n^{2m}}$$

où C_{2m} est une constante à préciser ne dépendant que de m, a et b.

On a donc établi, pour tout entier $m \geqslant 1$, le développement asymptotique

$$T_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_4}{n^4} + \cdots + \frac{\gamma_{2m}}{n^{2m}} + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{2(m+1)}}\right),$$

où les coefficients γ_{2p} sont indépendants de n.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

TSI

2021

4 heures

Calculatrice autorisée

Ce sujet comporte deux problèmes indépendants. Le premier problème est consacré au calcul de la valeur d'une série et à son utilisation pour modéliser une expérience aléatoire. Le second problème est consacré à l'utilisation des séries de Fourier pour résoudre, dans un cas particulier, l'équation de propagation de la chaleur dans un solide conducteur à une seule dimension. Cette équation a été étudiée par Joseph Fourier en 1802.

I Séries et probabilités

Notations et rappels

Si $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On rappelle que, si $0\leqslant k\leqslant n$, $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et, si $k>n$, $\binom{n}{k}=0$.

Objectifs

Dans la sous-partie I.A, on montre que, pour tout $x\in]-1,1[$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$ converge et que

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Dans la sous-partie I.B, on utilise ce résultat pour étudier une expérience aléatoire.

I.A – Calcul de la somme d'une série

Dans les questions 1 et 2, k un entier naturel fixé.

Q 1. Montrer que : $\binom{n+1}{k}\sim\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$.

Lorsqu'elle est définie, on note $S_k(x)$ la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$.

Q 3. Rappeler sans démonstration le domaine de définition de la fonction S_0 et, pour tout réel x dans ce domaine, la valeur de $S_0(x)$.

Q 4. À l'aide d'un théorème de cours énoncé avec précision, justifier que, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$S_1(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q 5. Montrer que, pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $k<n$, on a $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$.

Q 6. En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]-1,1[$, $S_{k+1}(x)=xS_k(x)+xS_{k+1}(x)$.

BY-NC-SA

Q 7. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, $S_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

I.B – Étude d'une expérience aléatoire

On considère un dé équilibré comportant 1 face blanche et 5 faces noires. On réalise l'expérience aléatoire suivante.

1. On lance le dé jusqu'à obtenir la face blanche. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face blanche.
2. Si N prend une valeur entière positive non nulle n lors de la première étape, on réalise alors une série de n lancers du dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la face blanche a été obtenue lors de cette seconde série de lancers.

Q 8. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire N.

Q 9. Calculer, en explicitant les calculs, l'espérance et la variance de N.

Q 10. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, donner une expression de $P(N \leqslant n)$ en fonction de n qui ne fasse pas intervenir le symbole Σ.

Q 11. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.

Q 12. Démontrer que $P(X = 0) = 5/11$, puis que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = \frac{36}{55}\left(\frac{5}{11}\right)^k.$$

Q 13. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Q 14. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Q 15. Calculer $E(X(X-1))$.

Q 16. En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

II Séries de Fourier et équation de la chaleur

Rappels

Si F est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, alors :

i) les coefficients de Fourier trigonométriques de F, $\left(a_n(F)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n(F)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définis par

$$\begin{cases} a_0(F) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} F(t)\,\mathrm{d}t, \\ a_n(F) = \displaystyle\int_{-1}^{1} F(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(F) = \int_{-1}^{1} F(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ; \end{cases}$$

ii) la série $\sum \left(\left(a_n(F)\right)^2 + \left(b_n(F)\right)^2\right)$ converge ;

iii) si F est continue et C^1 par morceau sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de F converge en tout nombre réel x et sa somme vaut $F(x)$.

II.A – Propriétés des coefficients de Fourier

Dans tout cette sous-partie, F est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2. Sa dérivée est notée F'.

BY-NC-SA

Q 17. Démontrer que :

— si la fonction F est paire, alors, pour tout entier naturel n non nul, $b_n(F) = 0$;

— si la fonction F est impaire, alors, pour tout entier naturel n, $a_n(F) = 0$.

Q 18. Démontrer que :

— si la fonction F est paire, alors sa dérivée F' est impaire ;

— si la fonction F est impaire, alors sa dérivée F' est paire.

Q 19. Démontrer que

$$\begin{cases} a_0(F') = 0, \\ a_n(F') = n\pi b_n(F) \quad \text{et} \quad b_n(F') = -n\pi a_n(F), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Pour les deux dernières égalités, on pourra effectuer une intégration par parties.

Q 20. En déduire que les deux séries $\sum n^2 (a_n(F))^2$ et $\sum n^2 (b_n(F))^2$ sont convergentes.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que la fonction F est périodique de période 2, impaire et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. On note $F^{(3)}$ sa dérivée troisième.

Q 21. Exprimer les coefficients de Fourier trigonométriques de $F^{(3)}$ en fonction de ceux de F.

Q 22. En déduire la nature de la série $\sum n^6 (b_n(F))^2$.

Q 23. Pour deux réels quelconques a et b, démontrer que $|a|\,|b| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Q 24. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 |b_n(F)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(n^6 (b_n(F))^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Q 25. Quelle est la nature de la série $\sum n^2 b_n(F)$?

II.B – Un problème de prolongement

On suppose dans cette sous-partie que f est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

Q 26. Démontrer qu'il existe une unique fonction F, impaire, périodique de période 2, telle que

$$\forall x \in [0,1], \qquad F(x) = f(x).$$

Q 27. Décrire l'enchainement des transformations géométriques qui permettent d'obtenir la courbe représentative de F à partir de celle de f.

Q 28. À l'aide d'arguments géométriques, justifier que la courbe représentative de la fonction F admet des tangentes aux points d'abscisses 0, 1 et -1. Déterminer les coefficients directeurs de ces trois tangentes.

On admet pour la suite du problème que, si la fonction f est de classe C^3 sur $[0,1]$ et vérifie

$$f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0,$$

où f'' désigne la dérivée seconde de f, alors la fonction F est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

II.C – L'équation de la chaleur

On considère une barre rectiligne métallique de longueur 1 m. On suppose qu'au cours du temps la température de chacune de ses extrémités est maintenue à 0 °C. On prend pour origine l'une des extrémités de la barre et on repère chaque point de la barre par son abscisse x (en mètre). On note $f(x)$ la température (en degrés Celsius) à l'instant $t = 0$ au point de la barre d'abscisse x. On suppose que la fonction f est de classe C^3 sur $[0,1]$.

On note $\Delta = [0, +\infty[\times [0,1]$. Pour $(t,x) \in \Delta$, on note $u(t,x)$ la température, à l'instant t, au point de la barre d'abscisse x. On admet que la fonction u vérifie l'équation de la chaleur

$$\forall (t,x) \in \Delta, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x). \tag{II.1}$$

BY-NC-SA

Les conditions spécifiées dans l'énoncé imposent en plus les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0 & \forall t \in [0,+\infty[, \\ u(0,x) = f(x) & \forall x \in [0,1]. \end{cases}$$

On cherche à déterminer les fonctions u solutions de l'équation (II.1) vérifiant de plus les conditions de régularité suivantes :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \text{la fonction } g_t : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(t,x) \end{array} \right. \text{ est de classe } C^3 \text{ sur } [0,1];$$

$$\forall x \in [0,1], \qquad \text{la fonction } h_x : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & u(t,x) \end{array} \right. \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,+\infty[.$$

Q 29. Démontrer que

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0.$$

Q 30. Que peut-on en déduire pour les valeurs de $f''(0)$ et de $f''(1)$?

Q 31. Justifier que f est prolongeable en une unique fonction F impaire, périodique de période 2 et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On suppose que u est une solution du problème et on fixe $t \in [0,+\infty[$.

Q 32. Démontrer que la fonction g_t est prolongeable en une unique fonction G_t impaire, périodique de période 2 et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

Q 33. Démontrer qu'il existe une suite $(\beta_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

Q 34. Exprimer $\beta_n(0)$ à l'aide de la fonction F.

Q 35. Justifier que la dérivée seconde de G_t, notée G_t'', est égale à la somme de sa série de Fourier et écrire cette somme.

Pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}$, on note $U(t,x) = G_t(x)$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction β_n est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, que la série $\sum |\beta_n'(t)|$ converge et que

$$\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t) \sin(n\pi x).$$

Q 36. En déduire que,

$$\forall (t,x) \in \Delta, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t) \sin(n\pi x) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

On admet que cette égalité entraine, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,+\infty[$, l'égalité

$$\beta_n'(t) = -n^2\pi^2 \beta_n(t).$$

Q 37. Donner l'ensemble des solutions, sur $[0,+\infty[$, de l'équation différentielle $y'(t) + n^2\pi^2 y(t) = 0$.

Q 38. En déduire que la solution cherchée est définie par

$$\forall (t,x) \in \Delta, \qquad u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(F) \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Remarque. Il est possible, mais non demandé ici, de démontrer que cette fonction vérifie bien toutes les conditions imposées.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI

4 heures Calculatrice autorisée

2021

Notations et rappels

— Pour n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et I_n la matrice identité d'ordre n.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.

Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

— Base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}^{(n)}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1. On admet que $(E_{i,j}^{(n)})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Matrices blocs

Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels non nuls tels que $n_1 + n_2 = n$, toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline M_3 & M_4 \end{array}\right)$ où $M_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$, $M_2 \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{R})$, $M_3 \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{R})$ et $M_4 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$.

Si $N = \left(\begin{array}{c|c} N_1 & N_2 \\ \hline N_3 & N_4 \end{array}\right)$ est une décomposition du même type, on admet que le produit matriciel MN s'effectue selon la même formule que le produit habituel en remplaçant les coefficients par des blocs :

$$MN = \left(\begin{array}{c|c} M_1N_1 + M_2N_3 & M_1N_2 + M_2N_4 \\ \hline M_3N_1 + M_4N_3 & M_3N_2 + M_4N_4 \end{array}\right)$$

— Polynômes matriciels

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, $M^{k+1} = MM^k$.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Si $\Pi = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Pi(M)$ la matrice $\sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit alors que $\Pi(M)$ est un polynôme matriciel en M.

Enfin, on admet que, si $(\Pi_1, \Pi_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(\Pi_1 \times \Pi_2)(M) = \Pi_1(M) \times \Pi_2(M)$.

Définition et objectifs du problème

On définit le commutant C_A d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

L'objectif de la première partie est d'expliciter le commutant de certaines matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notamment dans le cas où $n = 3$. La deuxième partie aborde l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 à coefficients constants. Seuls les résultats du I.B.3 sont utilisés dans la partie II.

Le candidat mentionnera les résultats obtenus à l'aide d'une calculatrice. Dans ce cas, aucune justification complémentaire n'est attendue.

BY-NC-SA

I Commutant d'une matrice

I.A – Propriétés générales

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 1. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 2. Montrer que, si M et N appartiennent à C_A, alors leur produit MN appartient à C_A.

Q 3. Montrer que si M appartient à C_A, alors, pour tout entier naturel k, M^k appartient à C_A.

Q 4. Déduire de la question précédente que, si $\Pi \in \mathbb{R}[X]$, alors $\Pi(A) \in C_A$.

On note $A' = P^{-1}AP$.

Q 5. Montrer que M appartient à C_A si et seulement si $M' = P^{-1}MP$ appartient à $C_{A'}$.

On définit les deux applications Φ et Ψ par

$$\Phi : \left|\begin{array}{ccc} C_A & \to & C_{A'} \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \Psi : \left|\begin{array}{ccc} C_{A'} & \to & C_A \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}\right.$$

Q 6. Justifier que Φ et Ψ sont des applications linéaires.

Q 7. Calculer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.

Q 8. Établir que Φ et Ψ sont des isomorphismes.

I.B – Quelques exemples en dimension **3**

I.B.1) Premier exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q 9. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et expliciter une matrice P_1 inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P_1 D P_1^{-1}$.

Q 10. Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à C_D si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que

$$M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Q 11. En déduire une base de C_D faisant intervenir certaines des matrices $E_{i,j}^{(3)}$.

Q 12. En utilisant la question 8, déterminer une base de C_A. Quelle est la dimension de C_A ?

I.B.2) Deuxième exemple

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Q 13. Justifier sans calcul que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et expliciter une matrice P_2 inversible et une matrice Δ diagonale vérifiant $[\Delta]_{3,3} = 9$ telles que $B = P_2 \Delta P_2^{-1}$.

Q 14. Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à C_Δ si et seulement s'il existe cinq réels a, b, c, d et e tels que

$$M' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

BY-NC-SA

Q 15. En déduire une base de C_Δ puis une base de C_B. Quelle est la dimension de C_B ?

I.B.3) Troisième exemple

On considère la matrice $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Q 16. Donner le polynôme caractéristique de G, ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Q 17. G est-elle trigonalisable ? Est-elle diagonalisable ? Justifier les réponses.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant G comme matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Q 18. Déterminer les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g(u) = -2u$ et $g(v) = v$ et dont les premières composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont égales à 1.

Q 19. Déterminer le vecteur w de première composante nulle dans la base $\mathcal{B}$ vérifiant $(g - Id_{\mathbb{R}^3})(w) = v$.

Q 20. Vérifier que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner une matrice P_3 inversible telle que $G = P_3 T P_3^{-1}$, où

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q 21. Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à C_T si et seulement s'il existe quatre réels a, b, c et d tels que

$$M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & b \end{pmatrix}.$$

Q 22. En déduire une base de C_T, puis une base de C_G.

I.C – Commutant d'une matrice d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes

On suppose dans cette sous-partie que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et que A est une matrice réelle d'ordre n admettant n valeurs propres réelles deux à deux distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

I.C.1)

Q 23. Justifier qu'il existe une matrice P_4 inversible telle que $A = P_4 D P_4^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Q 24. Démontrer que, pour tout polynôme Π de $\mathbb{R}[X]$,

$$\mathrm{diag}(\Pi(\lambda_1), ..., \Pi(\lambda_n)) = \Pi(\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)).$$

I.C.2) On considère l'application $\Theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ \Pi & \mapsto & (\Pi(\lambda_1), ..., \Pi(\lambda_n)) \end{array} \right.$.

Q 25. Montrer que Θ est linéaire et injective.

Q 26. Démontrer que, pour tout n-uple $(\mu_1, ..., \mu_n)$ de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad Q(\lambda_i) = \mu_i.$$

I.C.3) Soit M' une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 27. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $[M'D]_{i,j}$ et $[DM']_{i,j}$.

Q 28. Démontrer que M' appartient à C_D si et seulement s'il existe des réels $\mu_1, ..., \mu_n$ tels que

$$M' = \mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_n).$$

Q 29. Déterminer une base de C_D, puis une base de C_A.

BY-NC-SA

Q 30. Comparer la dimension de C_A avec le résultat obtenu à la question 12.

I.C.4) Soit M une matrice appartenant à C_A. On pose $M' = P_4^{-1}MP_4$.

Q 31. Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M' = Q(D)$.

Q 32. Démontrer que pour tout entier naturel n, $(P_4DP_4^{-1})^n = P_4D^nP_4^{-1}$, puis que,

$$\forall \Pi \in \mathbb{R}[X], \qquad \Pi(P_4DP_4^{-1}) = P_4\,\Pi(D)P_4^{-1}.$$

Q 33. En déduire que $M = Q(A)$, puis comparer C_A à l'ensemble des polynômes matriciels en A.

I.D – Commutant d'une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres

On suppose dans cette sous-partie que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ayant exactement deux valeurs propres λ_1 et λ_2.

Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on note $n_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$ où $E_{\lambda_i}(A)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i.

Soient

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{array}\right)$$

et P_5 une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P_5DP_5^{-1}$.

Q 34. Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à C_D si et seulement s'il existe deux matrices $M_1' \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$ et $M_2' \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ telles que

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} M_1' & 0 \\ \hline 0 & M_2' \end{array}\right)$$

Q 35. En déduire la dimension de C_A et comparer ce résultat avec celui trouvé à la question 15.

II Suites récurrentes linéaires d'ordre 3

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ et F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + (a+3)u_{n+1} - 2(a+1)u_n$$

où a est un nombre réel. On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

II.A – Étude du cas particulier $a = 0$

On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n. \tag{II.1}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Q 36. Donner l'expression de U_{n+1} en fonction de U_n et de la matrice G définie au I.B.3. En déduire l'expression de U_n en fonction de G et de U_0.

Q 37. Déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n où T est la matrice définie à la question 20.

Q 38. En décomposant T^n en une somme de trois matrices bien choisies, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

BY-NC-SA

Q 39. Réciproquement, démontrer que toute combinaison linéaire des trois suites précédentes vérifie la récurrence (II.1).

II.B – Étude du cas général

On revient au cas général où a est un réel quelconque. On considère l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array} \right.$$

Q 40. Démontrer que φ est un isomorphisme et donner la dimension de F.

Q 41. Justifier que 3 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F forment une base de F si, et seulement si, le déterminant $\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ est non nul.

Q 42. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = x^n,$$

appartient à F si et seulement si

$$x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = 0. \tag{II.2}$$

L'équation (II.2) s'appelle *équation caractéristique* de la récurrence. On note $C(x) = x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1)$.

Q 43. Démontrer que 1 est racine du polynôme C et et que toutes les racines de C sont réelles.

Q 44. On suppose $a \neq 0$ et $a \neq -3$. Montrer que C admet deux racines distinctes, autres que 1, notées r_1 et r_2. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel F.

Q 45. Montrer que, si $a = -3$, l'équation (II.2) admet une racine double et une racine simple, notées respectivement r_0 et r_1. Donner les valeurs de r_0 et r_1.

Q 46. Soit x un nombre réel non nul et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général nx^n. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n = x^n(nC(x) + xC'(x))$$

où C' désigne la dérivée de C.

Q 47. En déduire, dans le cas où $a = -3$, que la suite $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de F. Déterminer une base de F.

Q 48. Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -3u_{n+2} + 4u_n.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

2022

4 heures Calculatrice autorisée

Exemples de contraintes symplectiques linéaires

Notations

— Dans tout le problème, n et m désignent des entiers naturels non nuls.

— On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Pour tous entiers naturels non nuls p et q, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Ainsi, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire réel d'ordre n (matrices carrées inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices de déterminant égal à 1 :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

— On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.

— Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne associée sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$.

— Le groupe orthogonal réel d'ordre n est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\right\}.$$

— Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

Objectif

Ce problème a pour objectif de définir la notion d'espace symplectique réel et d'étudier certaines propriétés des endomorphismes symplectiques de $\mathbb{R}^n$.

La première partie établit quelques résultats utiles dans la suite.

La deuxième partie définit toutes les notions relatives aux objets symplectiques utilisés dans la suite du problème.

La troisième partie vise plus spécifiquement à montrer que toute matrice symplectique réelle a un déterminant égal à 1.

La quatrième partie aborde la définition des contraintes permettant d'injecter un objet dans un autre au moyen d'un endomorphisme symplectique.

Les deux dernières parties sont largement indépendantes.

I Préliminaires

Q 1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (X, Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \qquad X^\top A Y = X^\top B Y.$$

Montrer que $A = B$.

Q 2. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de $M^\top M$ sont toutes strictement positives.
En déduire qu'il existe une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^\top M$.

II Objets symplectiques

II.A – Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

On appelle *forme symplectique sur E* toute application ω de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

— bilinéarité : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\omega(x + \lambda y, z) = \omega(x, z) + \lambda\omega(y, z)$ et $\omega(x, y + \lambda z) = \omega(x, y) + \lambda\omega(x, z)$;

— antisymétrie : $\forall (x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$;

— non dégénérescence : $\{x \in E \mid \forall y \in E,\ \omega(x, y) = 0\} = \{0_E\}$.

BY-NC-SA

Un *espace vectoriel symplectique réel* (E,ω) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'une forme symplectique ω sur E.

Q 3. Montrer que, si ω est une forme symplectique sur E, alors pour tout vecteur x de E, $\omega(x,x)=0$.

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace symplectique (E,ω), on appelle *ω-orthogonal de F* et on note F^ω l'ensemble

$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \omega(x,y)=0\}.$$

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E,ω).

Q 4. Justifier que F^ω est un sous-espace vectoriel de E.

Q 5. Le sous-espace F^ω est-il nécessairement en somme directe avec F ?

Pour tout $x \in E$, on note $\omega(x,\cdot)$ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto \omega(x,y)$ et on considère

$$d_\omega : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x,\cdot) \end{array} \right.$$

Q 6. Montrer que d_ω est un isomorphisme.

Pour $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, on note $\ell|_F$ la restriction de ℓ à F.

Q 7. Montrer que l'application de restriction $r_F : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(F,\mathbb{R}) \\ \ell & \mapsto & \ell|_F \end{array} \right.$ est surjective.

Q 8. Préciser le noyau de $r_F \circ d_\omega$. En déduire que $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.

Q 9. Montrer que la restriction ω_F de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F si et seulement si $F \oplus F^\omega = E$.

II.B – Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

On suppose qu'il existe une forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\Omega = \big(\omega(e_i,e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où $(e_1,...,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 10. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \omega(x,y) = X^\top \Omega Y$$

où X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 11. En déduire que Ω est antisymétrique et inversible.

Q 12. Conclure que l'entier n est pair.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que n est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel tel que $n=2m$.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big(=\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})\big)$ la matrice définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

et on note j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.

Q 13. Montrer que l'application $b_s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x, j(y)\rangle \end{array} \right.$ est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Il existe donc des formes symplectiques en dimension paire, et seulement en dimension paire.

La forme symplectique b_s est appelée la *forme symplectique standard sur* $\mathbb{R}^n$.

II.C – Endomorphismes et matrices symplectiques réels

On appelle *endomorphisme symplectique* d'un espace vectoriel symplectique réel (E,ω) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \omega\big(u(x),u(y)\big) = \omega(x,y).$$

On note $\mathrm{Symp}_\omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique (E,ω).

Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.

Soient λ, μ des valeurs propres réelles de u, et soient $E_\lambda(u)$, $E_\mu(u)$ les sous-espaces propres associés.

Q 14. Montrer que, si $\lambda\mu \neq 1$, alors les sous-espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_\lambda(u), \quad \forall y \in E_\mu(u), \qquad \omega(x,y)=0.$$

BY-NC-SA

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 15. Montrer que u est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si $M^\top J M = J$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symplectique* si $M^\top J M = J$.

On note $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top J M = J\}.$$

Q 16. Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, stable par transposition et contenant la matrice J.

Ce groupe est appelé *groupe symplectique réel d'ordre* $n = 2m$.

Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ (décomposition par blocs).

Q 17. Montrer que $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A^\top C \text{ et } B^\top D \text{ sont symétriques} \qquad \text{et} \qquad A^\top D - C^\top B = I_m.$$

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

L'objectif de cette partie est de montrer l'inclusion $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ par deux méthodes différentes qui reposent chacune sur une propriété structurelle du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ qu'on examine au préalable.

III.A – Le cas de la dimension 2

Q 18. Montrer que $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

III.B – Commutant de J

On note $\mathcal{C}_J = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid JM = MJ\}$ le commutant de la matrice J, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec J.

Q 19. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})\big)$,

$$M \in \mathcal{C}_J \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (U, V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}.$$

Q 20. En déduire que, pour toute matrice $M \in \mathcal{C}_J$, $\det(M) \geqslant 0$.

On pourra considérer le produit de matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ \mathrm{i}I_m & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -\mathrm{i}I_m & I_m \end{pmatrix}$.

III.C – Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

On note $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques et orthogonales réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie.

Q 21. Montrer que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Q 22. Montrer que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_J$.

Q 23. En déduire que, pour toute matrice M de $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, $\det(M) = 1$.

Jusqu'à la fin de la sous-partie III.C, on considère une matrice $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^\top M$.

Q 24. Montrer que S est symplectique.

On pourra considérer une base de vecteurs propres de l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S, et montrer que s est un endomorphisme symplectique de l'espace standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

Q 25. Justifier que S est inversible puis montrer que la matrice O définie par $O = MS^{-1}$ appartient au groupe $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$.

Q 26. Conclure que le déterminant de la matrice M est égal à 1.

III.D – Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques

Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $n = 2m$.

On appelle *transvection* de E tout endomorphisme τ de E tel qu'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $a \in \ker(\ell)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \qquad \tau(x) = x + \ell(x)\, a.$$

BY-NC-SA

III.D.1) Transvection symplectique

Q 27. Soit $a \in E$ un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer que l'application τ_a^λ définie par

$$\forall x \in E, \quad \tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a,x)\,a$$

est une transvection de E et qu'il s'agit d'un endomorphisme symplectique de ce même espace.

Les applications τ_a^λ pour $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont appelées *transvections symplectiques de E*.

Q 28. Soit $a \in E$ un vecteur non nul et soient λ et μ des réels. Montrer que $\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}$.

Q 29. Soient $a \in E$ un vecteur non nul et λ un réel. Montrer que $\det(\tau_a^\lambda) > 0$.

Q 30. La réciproque $(\tau_a^\lambda)^{-1}$ est-elle encore une transvection symplectique ?

On se propose de montrer le théorème suivant :

> Tout endomorphisme symplectique de E peut s'écrire comme la composée d'au plus $2n = 4m$ transvections symplectiques de E :
> si $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$, il existe un entier $p \leqslant 4m$ et τ_1, τ_2, ..., τ_p des transvections symplectiques de E telles que $u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

III.D.2) Un lemme

On commence par montrer le lemme suivant :

> Pour tous vecteurs non nuls x et y de E, il existe une composée γ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\gamma(x) = y$.

On fixe x et y, non nuls, dans E.

Q 31. Supposons que $\omega(x,y) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.

Q 32. Supposons que $\omega(x,y) = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $z \in E$ tel que $\omega(x,z) \neq 0$ et $\omega(y,z) \neq 0$.

Q 33. Montrer le lemme cité ci-dessus.

III.D.3) Le théorème

Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.

Soit $e_1 \in E$ un vecteur non nul.

Q 34. Justifier l'existence de $f_1 \in E$, non colinéaire à e_1, tel que $\omega(e_1, f_1) = 1$.

On pose $P = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs e_1 et f_1. On va montrer l'existence d'une composée δ d'au plus quatre transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases} \delta\big(u(e_1)\big) = e_1 \\ \delta\big(u(f_1)\big) = f_1 \end{cases} \tag{III.1}$$

Q 35. Pourquoi existe-t-il une composée δ_1 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\delta_1\big(u(e_1)\big) = e_1$?

Q 36. Notons $\tilde{f}_1$ le vecteur $\delta_1\big(u(f_1)\big)$. Montrer qu'il existe une composée δ_2 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases} \delta_2(e_1) = e_1 \\ \delta_2(\tilde{f}_1) = f_1 \end{cases}$$

On pourra adapter la démonstration du lemme précédent.

La composée $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$ d'au plus quatre transvections symplectiques vérifie bien les conditions (III.1) souhaitées. On pose $v = \delta \circ u$.

Q 37. Montrer que P est stable par v et déterminer v_P, endomorphisme induit par v sur P.

Q 38. Montrer que P^ω est stable par v.

Q 39. Montrer que la restriction ω_{P^ω} de ω à $P^\omega \times P^\omega$ munit P^ω d'une structure d'espace symplectique et que l'endomorphisme v_{P^ω} induit par v sur P^ω est un endomorphisme symplectique.

Q 40. À l'aide de ce qui précède, montrer le théorème annoncé.

III.D.4) Une conséquence topologique

On munit toujours l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie d'espace vectoriel normé.

Q 41. Montrer que le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de cet espace.

III.D.5) Deuxième conséquence

Q 42. Utiliser les résultats de cette sous-partie III.D pour prouver l'inclusion $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

IV Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

Dans cette partie, on fixe $n = 2m \geqslant 4$.

On rappelle que $\mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ désigne le groupe des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2m}, b_s)$. On note de plus $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ le groupe des endomorphismes de $\mathbb{R}^{2m}$ de déterminant égal à 1.

Pour $r \geqslant 0$, on considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^{2m}$.

— La boule euclidienne fermée de rayon r :

$$B^{2m}(r) = \left\{(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad x_1^2 + \cdots + x_m^2 + y_1^2 + \cdots + y_m^2 \leqslant r^2\right\}.$$

— Le cylindre symplectique de rayon r basé sur les axes de coordonnées numéro 1 et $m+1$:

$$Z^{2m}(r) = \left\{(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad x_1^2 + y_1^2 \leqslant r^2\right\}.$$

Sur des exemples (boules ou cylindres) de parties A et B de $\mathbb{R}^{2m}$, on étudie l'existence d'un endomorphisme u tel que $u(A) \subset B$ lorsque $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$, puis lorsque $u \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$.

IV.A – Injection par $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ d'une boule dans un cylindre

Q 43. Montrer que, pour tout $r > 0$, il existe $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $u\big(B^{2m}(1)\big) \subset Z^{2m}(r)$.

IV.B – Injection par $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ d'une boule dans une autre

Soit $r > 0$ tel qu'il existe $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ vérifiant $u\big(B^{2m}(1)\big) \subset B^{2m}(r)$.

Notons $U \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de la matrice U.

Q 44. Montrer que $|\lambda| \leqslant r$.

Pour le cas λ non réel, si P et Q dans $\mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$ sont telles que $Z = P + \mathrm{i}Q$ est une colonne propre de U pour la valeur propre λ, on pourra montrer que $\|UP\|^2 + \|UQ\|^2 = |\lambda|^2(\|P\|^2 + \|Q\|^2)$.

Q 45. En déduire que $1 \leqslant r$.

Q 46. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $r > 0$ existe-t-il u appartenant à $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $u\big(B^{2m}(1)\big) \subset B^{2m}(r)$?

IV.C – Injection symplectique d'une boule dans un cylindre

Soit $r > 0$ tel qu'il existe un endomorphisme symplectique $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ vérifiant $\psi\big(B^{2m}(1)\big) \subset Z^{2m}(r)$.

On note $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de ψ dans la base canonique $(e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_m)$ de $\mathbb{R}^{2m}$ et $\psi^\top$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M^\top$.

Q 47. Montrer que $|b_s\big(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\big)| = 1$ puis que $\|\psi^\top(e_1)\| \geqslant 1$ ou $\|\psi^\top(f_1)\| \geqslant 1$.

Q 48. Montrer que $1 \leqslant r$.

Q 49. Montrer le théorème de non-tassement linéaire :

> Pour $R > 0$ et $R' > 0$, il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $\psi\big(B^{2m}(R)\big) \subset Z^{2m}(R')$ si et seulement si $R \leqslant R'$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

MP

4 heures

Calculatrice autorisée

2022

Objectifs

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$ de deux façons différentes : un point de vue déterministe et un point de vue probabiliste. Pour conclure à une formule du type $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(K)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(K)}$ avec K entier supérieur ou égal à 2, les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f_n', ..., f_n^{(K-1)}$ (par exemple de convergence simple sur tout l'intervalle ou même en un seul point). Le sujet montre que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où x parcourt un ensemble fini. Cette dernière hypothèse sera de nouveau affaiblie dans la partie probabiliste consacrée à la dérivation de séries aléatoires de fonctions.

Le sujet est divisé en quatre parties :

— la partie I étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe $\mathcal{C}^K$;

— la partie II utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère $\mathcal{C}^K$ à une somme de série de fonctions ;

— la partie III, qui est indépendante des parties I et II, étudie la convergence des séries aléatoires numériques de la forme $\sum X_n a_n$, où (X_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de Rademacher et (a_n) une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;

— la partie IV utilise les résultats des parties précédentes pour donner une application au caractère $\mathcal{C}^K$ de la somme d'une série aléatoire de fonctions de la forme $\sum X_n f_n$.

Notations

— Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leqslant j$, la notation $[\![i, j]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.

— La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.

— Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.

— Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^K(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in [\![0, K]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$).

— Dans le cas particulier $I = [0, 1]$, pour toute fonction bornée $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

I Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0, 1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, ..., x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \qquad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| . \tag{I.1}$$

Une inégalité du type précédent est appelée *inégalité d'interpolation* à l'ordre K.

I.A – Cas particulier $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0, 1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \qquad \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + C\,|f(x_1)| . \tag{I.2}$$

Q 1. Montrer l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1$.

Q 2. Soit $C \in]0, 1[$. À l'aide d'un exemple simple de fonction f, montrer que l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse.

I.B – Cas particulier $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0, 1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \qquad \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty) \leqslant \|f''\|_\infty + C(|f(x_1)| + |f(x_2)|). \tag{I.3}$$

BY-NC-SA

Q 3. Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \|f''\|_\infty .$$

Q 4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a $\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$.

Q 5. Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

I.C – Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par (I.1). On fixe $K \in \mathbb{N}^\star$.

Q 6. Démontrer que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{K-1}[X] & \to & \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto & \big(P(x_1), ..., P(x_K)\big) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Q 7. Montrer qu'il existe K polynômes $L_1, ..., L_K$ de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum_{j=1}^{K} f(x_j) L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \qquad P(x_\ell) = f(x_\ell).$$

Dans les deux questions suivantes Q8 et Q9, on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question Q7.

Q 8. Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K - k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

Q 9. En déduire l'inégalité $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q 10. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée.

II Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions

II.A – Énoncé général

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $K \in \mathbb{N}^\star$, on considère

— des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) ;

— une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$;

(H2) pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Q 11. Dans le cas particulier $[a,b] = [0,1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q 12. Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a,b]$ avec $a < b$.

On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ est définie par $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Q 13. Démontrer que F_0 est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ et que $F_0^{(k)} = F_k$ pour tout $k \in [\![1, K]\!]$.

II.B – Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ vérifiant $f_n(1) = 0$, $f_n(2) = 0$ et $f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$ pour tout $x > 0$.

Q 15. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Q 16. Expliciter $F''(x)$.

Q 17. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ pour tout $x \in [1,2]$.

BY-NC-SA

III Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

Le but de cette partie est de montrer que, si la série $\sum a_n^2$ converge, alors la série aléatoire $\sum X_n a_n$ converge avec probabilité 1.

Notations

— $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2};$$

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;

— pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} X_n a_n$ la somme partielle au rang N de la série $\sum X_n a_n$;

— si $\big(\phi(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ et tout entier $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, on note les évènements

$$A_j = \left\{\left|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\},$$
$$B_j = \left\{\max_{\phi(j)+1\leqslant n\leqslant\phi(j+1)} \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\},$$
$$B_{j,m} = \left\{\left|S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j} \text{ et } \forall n \in [\![\phi(j), m-1]\!], \quad \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}.$$

La réalisation de l'évènement $B_{j,m}$ signifie que m est le plus petit entier de l'intervalle $[\![\phi(j), \phi(j+1)]\!]$ vérifiant $\left|S_n - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}$.

III.A – Construction de la suite $\big(\phi(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ et majoration de $\mathbb{P}(A_j)$

Q 18. Justifier l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers naturels $\big(\phi(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n>\phi(j)}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^j}.$$

On fixe désormais une telle suite $\big(\phi(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$.

Q 19. Exprimer l'espérance et la variance de $S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}$ en fonction des termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 20. Déduire des deux questions précédentes la majoration $\mathbb{P}(A_j) \leqslant 2^{-j}$.

III.B – Inégalité maximale de Lévy $\mathbb{P}(B_j) \leqslant 2\mathbb{P}(A_j)$

Q 21. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, démontrer que les évènements $B_{j,m}$, pour m parcourant $[\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, sont disjoints deux à deux et qu'on a l'égalité d'évènements

$$B_j = \bigcup_{\phi(j)<m\leqslant\phi(j+1)} B_{j,m}.$$

Q 22. Expliquer comment en déduire la formule $\mathbb{P}(A_j) = \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m})$.

Q 23. Soit $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, montrer que la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & 2^{\phi(j+1)-\phi(j)}\,\mathbb{P}\left(\left\{\left|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}\right) \end{array}\right.$$

est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et est paire.

Q 24. Prouver que si l'évènement B_j se réalise, alors il existe $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$ et $\alpha \in \{-1, +1\}$ tels que l'évènement

$$\left\{\left|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}$$

se réalise également.

On pourra exprimer $S_m - S_{\phi(j)}$ en fonction des deux nombres $\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}$ avec $\alpha = \pm 1$.

Q 25. En déduire que

$$\mathbb{P}(B_j) \leqslant 2\mathbb{P}(A_j)$$

BY-NC-SA

III.C – Convergence de la série aléatoire $\sum X_n a_n$

Q 26. On note B l'évènement $\bigcap_{J\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geqslant J} B_j$. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(B) = 0$.

Q 27. Montrer que l'évènement

$$\{\exists J \in \mathbb{N}, \quad \forall j \geqslant J, \quad \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!], \quad \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\}$$

se réalise avec probabilité 1.

Q 28. En déduire que l'évènement

$$\{\text{la suite } \left(S_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

a également une probabilité 1.

On pourra examiner la série $\sum \left|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right|$.

Q 29. Conclure que l'évènement

$$\{\text{la série } \sum X_n a_n \text{ est convergente}\}$$

a une probabilité 1.

IV Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour des séries aléatoires de fonctions

On fixe $K \in \mathbb{N}^\star$ et on considère

— une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses de la partie précédente ;

— des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de $[0,1]$;

— une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[0,1]$;

(H2') pour tout $\ell \in [\![1,K]\!]$, la série numérique $\sum f_n(x_\ell)^2$ est convergente.

Q 30. Montrer que l'une des deux hypothèses (H2') ou (H2) (étudiée dans la partie II) implique l'autre.

Q 31. Montrer que l'évènement

$$\{\text{pour tout } \ell \in [\![1,K]\!], \text{ la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente}\}$$

a une probabilité 1.

Q 32. On note $P_n \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ un polynôme vérifiant $P_n(x_\ell) = f_n(x_\ell)$ pour tout $\ell \in [\![1,K]\!]$ (cf. question 7), montrer que l'évènement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } k \in [\![0,K]\!], \text{ la série de fonctions } \sum X_n (f_n - P_n)^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1], \\ \text{la fonction } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^K, \\ \text{pour tout } k \in [\![0,K]\!], \ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n)\right)^{(k)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n)^{(k)} \end{array} \right\}$$

a une probabilité 1.

Q 33. Montrer que l'évènement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } k \in [\![0,K]\!], \text{ la série de fonctions } \sum X_n f_n^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1], \\ \text{la fonction } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^K, \\ \text{pour tout } k \in [\![0,K]\!], \ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n\right)^{(k)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n^{(k)} \end{array} \right\}$$

a une probabilité 1.

Q 34. Donner un exemple d'entier $K \in \mathbb{N}^\star$ pour lequel l'évènement précédent se réalise avec les fonctions f_n définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = 0, \\ f_n(x) = \ln\left(1 + \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in [0,1]. \end{array} \right.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

PSI 2022

4 heures Calculatrice autorisée

Notations et rappels

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{V}_{n,p}$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\{-1,1\}$.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $M^\top = -M$.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I_n la matrice identité d'ordre n et 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles.

On définit la suite des puissances de M par

$$\begin{cases} M^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad M^{k+1} = MM^k \end{cases}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0_n$.

On note $\mathcal{N}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices nilpotentes.

Si U est une partie d'un espace vectoriel E, on note $\mathrm{Vect}(U)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par U.

Toutes les variables aléatoires considérées dans les parties II, III et IV sont définies sur un même espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Étant donné une variable aléatoire réelle Z, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathbb{V}(Z)$ sa variance.

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant, connu sous le nom de lemme des coalitions :

> Si $X_1, ..., X_N$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, alors, pour tout entier naturel $k \in [\![1, N-1]\!]$, toute fonction f de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ et toute fonction g de de $\mathbb{R}^{N-k}$ dans $\mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X_1, ..., X_k)$ et $g(X_{k+1}, ..., X_N)$ sont indépendantes.

Dans la partie III, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Son produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On note ch la fonction cosinus hyperbolique.

Objectifs du problème et articulations entre les différentes parties

Ce problème porte sur l'étude de certains sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, où n est un entier naturel non nul.

Dans la partie I, on étudie quelques propriétés de l'ensemble $\mathcal{N}_n$. Dans les parties II et III, on s'intéresse à des variables aléatoires réelles et matricielles à coefficients dans $\{-1,1\}$. Dans la partie IV, on établit, à l'aide d'outils d'analyse et de probabilités, l'existence d'une famille de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant certaines propriétés de nature euclidienne.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes les unes des autres. Cependant, le résultat de la question 9 est utilisé dans la sous-partie II.C, ceux des questions 14 et 16 sont utilisés dans la sous-partie II.D et celui de la question 19 dans la partie IV.

I Partie I

I.A – Quelques résultats préliminaires

Q 1. Démontrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire et que

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

BY-NC-SA

Q 2. Montrer que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}(A^\top B)\end{array}\right.$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 3. En déduire que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^\top A = 0$ alors $A = 0$.

I.B – Quelques propriétés de $\mathcal{N}_n$

Q 4. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors 0 est une valeur propre de A et que c'est la seule valeur propre complexe de A.

Q 5. Déterminer la trace et le déterminant d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 6. Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors M^2 est nilpotente.

Q 7. On suppose que M et N sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que MN et $M+N$ sont nilpotentes.

Q 8. On suppose que M, N et $M+N$ sont nilpotentes. En calculant $(M+N)^2 - M^2 - N^2$, montrer que $\mathrm{tr}(MN) = 0$.

Q 9. Démontrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $\det(M) = \mathrm{tr}(M) = 0$.

Q 10. Montrer que la seule matrice réelle nilpotente et symétrique est la matrice nulle.

Q 11. Soit A une matrice antisymétrique réelle et nilpotente. Montrer que $A^\top A = 0_n$, puis que $A = 0_n$.

Q 12. On suppose $n \geqslant 3$. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle et de déterminant nul, mais non nilpotente.

II Matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

II.A – Quelques résultats algébriques

Soit $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $V = \sum_{k=1}^{n} E_k$.

Q 13. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, exprimer E_i en fonction de V et de $V - 2E_i$. En déduire que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{V}_{n,1})$. (L'ensemble $\mathcal{V}_{n,p}$ a été défini dans les notations présentées au début du problème.)

Soient $C_1, ..., C_n$, n matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec C_1 non nulle.

Q 14. Démontrer que, si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est liée, alors il existe un unique $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que

$$\begin{cases}(C_1, ..., C_j) \text{ est libre} \\ C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_j)\end{cases}$$

Soit $d \in [\![1, n]\!]$, $(U_1, ..., U_d)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $H = \mathrm{Vect}(U_1, ..., U_d)$.

Q 15. Démontrer qu'il existe des entiers $i_1, ..., i_d$ vérifiant $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant n$ tels que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} H & \to & \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} \end{pmatrix}\end{array}\right.$$

soit bijective.

On pourra s'intéresser au rang de la matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $U_1, ..., U_d$.

Q 16. Soit $\mathcal{W}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension d. Démontrer que

$$\mathrm{card}(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{n,1}) \leqslant 2^d.$$

II.B – Une loi de probabilité

On dit qu'une variable réelle X suit la loi $\mathcal{R}$ si

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Q 17. Si X suit la loi $\mathcal{R}$, préciser la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X+1)$.

Q 18. Calculer l'espérance et la variance d'une variable suivant la loi $\mathcal{R}$.

BY-NC-SA

Q 19. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant chacune la loi $\mathcal{R}$. Déterminer la loi de leur produit XY.

II.C – Un premier procédé de génération de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1,1\}$

Jusqu'à la fin de la partie II, n est un entier naturel non nul et $m_{i,j}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ sont n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$. La variable aléatoire matricielle $M_n = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est alors à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,n}$.

On pose $\tau_n = \mathrm{tr}(M_n)$ et $\delta_n = \det(M_n)$.

Q 20. Calculer l'espérance et la variance de la variable τ_n.

Q 21. Calculer l'espérance de la variable δ_n.

Q 22. Démontrer que la variance de la variable δ_n est égale à $n!$

On pourra développer δ_n selon une rangée et raisonner par récurrence.

Dans le cas particulier $n = 2$, m_{11}, m_{12}, m_{21} et m_{22} sont quatre variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$.

Q 23. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{N}_2$.

Q 24. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$.

II.D – Une généralisation

L'objectif de cette sous-partie est de prolonger le dernier résultat de la partie précédente, en trouvant, dans le cas général où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, un minorant de la probabilité de l'évènement $M_n \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.

II.D.1) On considère $2n$ variables aléatoires réelles c_1, c_2, ..., c_n et c'_1, c'_2, ..., c'_n mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$.

Q 25. Soit $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$. Calculer $\mathbb{P}\big((c_1 = \varepsilon_1) \cap \cdots \cap (c_n = \varepsilon_n)\big)$.

On considère les matrices colonnes aléatoires $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$.

Q 26. Démontrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, la famille $\big(C(\omega), C'(\omega)\big)$ est liée si et seulement s'il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que $C'(\omega) = \varepsilon C(\omega)$.

Q 27. En déduire $\mathbb{P}\big((C,C') \text{ est liée}\big)$.

II.D.2) On rappelle que $m_{i,j}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ sont n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$, que $M_n = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice aléatoire à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,n}$ dont, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est égal à $m_{i,j}$.

On note

$$C_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix}, ..., C_n = \begin{pmatrix} m_{1n} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{pmatrix}$$

les variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,1}$ constituées par les colonnes de la matrice M_n.

Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on note R_j l'événement

$$(C_1, ..., C_j) \text{ est libre et } C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_j)$$

et R_n l'événement

$$(C_1, ..., C_n) \text{ est libre.}$$

Q 28. Montrer que $(R_1, ..., R_n)$ est un système complet d'événements.

II.D.3)

Q 29. Montrer que

$$\mathbb{P}\big(M \notin \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})\big) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_j)\big).$$

Q 30. Justifier que, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}\big(C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_j)\big) = \sum_{(v_1,...,v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j} \mathbb{P}\big(C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_j)\big)\, \mathbb{P}\big((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j)\big).$$

BY-NC-SA

Q 31. En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}\big(C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_j)\big) \leqslant 2^{j-n}.$$

Q 32. En déduire que

$$\mathbb{P}\big(M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\big) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

III Un autre procédé de construction de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Soit $p \in]0, 1[$. On définit une suite (A_k) de matrices aléatoires d'ordre n à coefficients dans $\{-1, 1\}$ selon le procédé suivant :

— on note A_0 la matrice réelle d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ;

— pour tout entier naturel k, on construit la matrice A_{k+1} à partir de la matrice A_k en conservant chaque coefficient de A_k égal à -1 et en changeant en -1 avec la probabilité p chaque coefficient de A_k égal à 1. Chaque coefficient égal à 1 a donc la probabilité $q = 1 - p$ de ne pas être modifié ;

— le processus s'arrête quand la matrice obtenue est égale à $-A_0$.

On suppose avoir utilisé l'instruction

```
import numpy as np, numpy.random as rd
```

pour charger les bibliothèques `numpy` et `numpy.random`. Voici quelques fonctions de ces bibliothèques qui peuvent être utiles dans cette partie :

— `np.ones((n, n))` crée un tableau `numpy` de taille $n \times n$ dont tous les éléments valent 1 ;

— `A.shape` est un tuple qui contient les dimensions du tableau `A` ;

— `A.size` donne le nombre total d'éléments du tableau `A` ;

— `A.sum()` renvoie la somme de tous les éléments du tableau `A` ;

— `rd.binomial(1, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

Q 33. Écrire en Python une fonction `modifie_matrice(p, A)` qui prend en argument une probabilité p et un tableau numpy représentant une matrice $A \in \mathcal{V}_{n,n}$. Cette fonction modifie le tableau `A` selon le procédé décrit ci-dessus.

Q 34. En utilisant la fonction précédente, écrire en Python une fonction `nb_tours(p, n)` qui prend en argument une probabilité p et l'ordre n des matrices A_k et renvoie le plus petit entier k tel que $A_k = -A_0$, en partant de la matrice A_0.

Q 35. Écrire en Python une fonction `moyenne_tours(p, n, nbe)` qui prend en argument une probabilité p, l'ordre n des matrices A_k et un nombre entier `nbe` et qui renvoie la moyenne, sur `nbe` essais effectués, du nombre d'étapes nécessaires pour passer de A_0 à $-A_0$.

IV Vecteurs aléatoires unitaires

On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On désigne par I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (u_i)_{i \in I}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 36. Démontrer que le nombre réel

$$C(u) = \sup\{|\langle u_i | u_j \rangle|, (i, j) \in I^2, i \neq j\}$$

existe et appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

$C(u)$ s'appelle paramètre de cohérence de la suite $(u_i)_{i \in I}$.

Q 37. Montrer que si $C(u) = 0$, alors l'ensemble $\{u_i, i \in I\}$ est fini et donner un majorant de son cardinal.

On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u) \leqslant \varepsilon$ où ε est un nombre réel de l'intervalle $[0, 1]$. On dit alors que u est une famille « presque orthogonale ».

Q 38. Démontrer que, pour tout nombre réel t, $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Soient X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{R}$ (définie dans la sous-partie II.B). On définit les vecteurs aléatoires, $X = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1, ..., X_n)^\top$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1, ..., Y_n)^\top$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

Q 39. Démontrer que, pour tout nombre réel t,

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X|Y\rangle)\big) = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

Q 40. En déduire que, pour pour tout nombre réel t,

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X|Y\rangle)\big) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

Soient σ et λ deux nombres réels strictement positifs et Z une variable aléatoire réelle telle que $\exp(tZ)$ est d'espérance finie et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}\big(\exp(tZ)\big) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Q 41. En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbb{P}(Z \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

Q 42. En déduire que

$$\mathbb{P}(|Z| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

Q 43. Avec les notations et les hypothèses de la question 39, démontrer que

$$\mathbb{P}(|\langle X|Y\rangle| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

N étant un entier naturel non nul, $(X_j^i)_{1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une famille de $n \times N$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{R}$. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on pose $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i, ..., X_n^i)^\top$.

Q 44. Déduire des questions précédentes que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

Q 45. On suppose que $n \geqslant 4\dfrac{\ln N}{\varepsilon^2}$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geqslant \varepsilon\right) < 1.$$

Q 46. En déduire que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille de N vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par ε.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

PSI

2022

4 heures

Calculatrice autorisée

Objectif

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés d'un *opérateur intégral* U défini sur un espace préhilbertien réel E. Cet espace et son produit scalaire sont introduits dans la partie II et l'opérateur U est étudié dans la partie III. Dans la partie IV, on s'intéresse à l'étude d'une famille d'équations différentielles à un paramètre pour lesquelles on recherche des solutions développables en séries entières. Enfin, la partie V fait le lien entre les vecteurs propres de l'endomorphisme U et les solutions des équations différentielles trouvées dans de la partie IV.

Liens entre les différentes parties

— Les parties I et II sont très largement indépendantes à l'exception de la définition de la fonction k_x.

— La partie III utilise les résultats de la partie II ainsi que la condition d'appartenance à E établie dans la partie I.

— La partie IV fait ponctuellement appel à l'espace E défini et étudié dans les parties I et II. Elle est indépendante de la partie III.

— La partie V utilise les résultats des parties III et IV ainsi que le résultat de la question 3.

Notations

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note p_α la fonction $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & t^\alpha\end{array}\right.$.

I Préliminaires : étude de quelques éléments de E

I.A – Des fonctions de E utiles pour la suite

Q 1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, p_α appartient à E.

Q 2. Soit P une fonction polynomiale non identiquement nulle à coefficients réels. Montrer que la restriction de P à $\mathbb{R}_+^*$ appartient à E si et seulement si $P(0) = 0$.

Q 3. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que la fonction $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & a\mathrm{e}^t + b\end{array}\right.$ appartient à E si et seulement si $a = b = 0$.

Q 4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & (\mathrm{e}^t-1)^2\,\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\end{array}\right.$ est intégrable sur $]0, x]$.

Q 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $k_x(t) = \mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1$ où $\min(x, t)$ désigne le plus petit des réels x et t. Représenter graphiquement la fonction k_x. Montrer que k_x appartient à E.

I.B – Une condition suffisante d'appartenance à E

Dans cette sous-partie, on suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0,\\ \exists\, C > 0\ ;\ \forall x > 0, \quad |f'(x)| \leqslant C\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}}.\end{cases}$$

Q 6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Phi(x) = \dfrac{4\sqrt{x}\mathrm{e}^{x/2}}{1+x} - \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{t/2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = 0$ et que, pour tout $x > 0$, $\Phi'(x) \geqslant 0$. En déduire que $\Phi(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

Q 7. Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant 4C\dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{x/2}}{1+x}$.

Q 8. En déduire que $f \in E$.

BY-NC-SA

II Structure préhilbertienne de E

Q 9. Montrer que, si f et g sont deux fonctions de E, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Q 10. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}\big(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour toutes fonctions $f\in E$ et $g\in E$, on pose, $\langle f\mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q 11. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

La norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction $f\in E$ par

$$\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Q 12. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\|k_x\| = 0$. On rappelle que, pour tout $x>0$, $k_x(t) = \mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1$.

Q 13. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = k!$.

Q 14. On rappelle que les fonctions p_α ont été définies dans les notations en tête de sujet. La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle une famille orthogonale de E ?

III Un opérateur sur E

À chaque fonction $f\in E$, on associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x>0$ par

$$U(f)(x) = \langle k_x\mid f\rangle = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1)f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

III.A –

Q 15. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction $f\in E$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} U(f)(x) = 0.$$

Q 16. Montrer que pour toute fonction $f\in E$ et pour tout $x>0$,

$$U(f)(x) = \int_0^x (1-\mathrm{e}^{-t})\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + (\mathrm{e}^x - 1)\int_x^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Q 17. Soit $f\in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie, pour tout $x>0$,

$$\big(U(f)\big)'(x) = \mathrm{e}^x\int_x^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, la dérivée de la fonction $U(f)$ est notée $U(f)'$.

Q 18. Soit $f\in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction $U(f)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}. \tag{III.1}$$

Q 19. Montrer que pour tout $f\in E$ et pour tout $x>0$,

$$|U(f)'(x)| \leqslant \mathrm{e}^x\|f\|\left(\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \|f\|\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}}.$$

BY-NC-SA

Q 20. Déduire de ce qui précède que U est un endomorphisme de E et que, pour tout $f \in E$ et tout $x > 0$,

$$|U(f)(x)| \leqslant 4\|f\| \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x/2}}{1+x}$$

Q 21. En déduire que

$$\|U(f)\| \leqslant 4\|f\|.$$

Q 22. Montrer que U est injectif.

Q 23. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

III.B – On fixe deux fonctions f et g de E. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = -U(f)'(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Q 24. Vérifier que F est une primitive de $x \mapsto f(x)\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Q 25. Montrer que pour tout $x > 0$, $|F(x)U(g)(x)| \leqslant \dfrac{4\|f\|\|g\|}{1+x}$.

Q 26. Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $|F(x)| \leqslant \|f\|\big(\mathrm{e}^{-1} - \ln(x)\big)^{1/2}$.
On pourra utiliser la question 19.

Q 27. Montrer l'existence et calculer les valeurs des limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $t \mapsto F(t)U(g)(t)$.

Q 28. Montrer que $\langle f \mid U(g)\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} U(f)'(t)U(g)'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 29. En déduire que $\langle f \mid U(g)\rangle = \langle U(f) \mid g\rangle$.

IV Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Pour $p \in \mathbb{R}^*$ on note (E_p) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(E_p) : x(y'' - y') + py = 0.$$

Q 30. Soient $p \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence infini. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E_p) si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

IV.A – Recherche de solutions polynomiales

Q 31. Montrer que (E_p) possède des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement si $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'alors, les solutions polynomiales non nulles de (E_p) sont de degré p et appartiennent à l'espace vectoriel E.

On ne demande pas de déterminer explicitement les solutions polynomiales lorsqu'elles existent.

Dans la suite de cette sous-partie, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ soit solution de l'équation (E_p). L'objectif est de déterminer une expression simple de P en fonction du paramètre p.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $h(x) = \mathrm{e}^{-x}P(x)$.

Q 32. Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle $x(y'' + y') + py = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q 33. Justifier que la fonction h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

On note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de h. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. On peut montrer, de la même façon qu'à la question 30 (cette démonstration n'est pas demandée), que ces coefficients vérifient

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ n(n+1)b_{n+1} = -(n+p)b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Q 34. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n+p-1)!}{p!\,n!\,(n-1)!}b_1$.

BY-NC-SA

Q 35. On pose $g_p(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}$. Justifier que $g_p^{(p)}$ est développable en série entière et déduire de la question 34 que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = Cx\mathrm{e}^x g_p^{(p)}(x)$$

où C est une constante réelle dont on précisera l'expression en fonction de b_1 et de p.

IV.B – Solutions développables en séries entières non polynomiales

Dans toute cette sous-partie, on fixe un réel p non nul et on suppose que $p \notin \mathbb{N}^*$.

Q 36. Justifier l'existence de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non identiquement nulles telles que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence infini et telles que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E_p).

On fixe une telle série entière et on pose pour $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q 37. Montrer qu'il existe un entier naturel $q > p$ tel que, pour tout entier $n \geqslant q$,

$$|a_{n+1}| \geqslant \frac{|a_n|}{2(n+1)}.$$

Q 38. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant q$, $|a_n| \geqslant \dfrac{q!|a_q|}{2^{n-q}n!}$.

Q 39. Montrer que la fonction $\psi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=q}^{+\infty} |a_n| x^n \end{array}\right.$ n'est pas un élément de E.

Q 40. En déduire enfin que la fonction f n'est pas un élément de E.

V Éléments propres de U

Q 41. Le nombre réel 0 est-il valeur propre de U ?

Q 42. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On suppose que λ est valeur propre de U. Soit f un vecteur propre associé. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E_{1/\lambda})$.

On suppose que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire qu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence infini telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q 43. Montrer que les seules valeurs propres possibles de U sont de la forme $\lambda = 1/p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Q 44. Soit P une solution polynomiale non nulle de (E_p). Démontrer que la fonction $pU(P) - P$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y'' - y' = 0$.

Q 45. Montrer que P est un vecteur propre de U pour la valeur propre $1/p$.

Q 46. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, on pose $P_p(x) = x\mathrm{e}^x g_p^{(p)}(x)$, où $g_p(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}$. On rappelle que P_p est une fonction polynomiale de degré p et que $P_p \in E$. Montrer que les polynômes P_p sont deux à deux orthogonaux dans E.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

PC

2022

4 heures

Calculatrice autorisée

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On utilisera les notations matricielles classiques :

— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles à n lignes ;

— 0_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls ;

— $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques ;

— $\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1, ..., a_n$ dans cet ordre ;

— $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A ;

— $\mathrm{sp}(A)$ désigne le spectre réel de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

Les éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont assimilés à des réels.

Avec ces notations, le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $(U \mid V) = U^\top V$.

On note $\|U\|$ la norme euclidienne canonique de $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour tout $p \in]0,1[$, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes définies sur Ω.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, on note $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$ respectivement l'espérance de X, la variance de X et la covariance de X et Y, lorsqu'elles sont définies.

On rappelle la formule

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Définition

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthodiagonalisable* s'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^\top$.

Orthodiagonaliser A revient à déterminer un couple de telles matrices (D, P).

I Généralités sur les matrices symétriques réelles

Q 1. Démontrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

I.A – Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Q 2. En observant la première et la dernière colonne de A_1, déterminer un vecteur propre de A_1 et la valeur propre λ_1 associée.

Q 3. Déterminer le sous-espace propre de A_1 associé à la valeur propre λ_1 et en déduire le spectre de A_1.

Q 4. Orthodiagonaliser A_1.

I.B – Un exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q 5. Montrer que l'application $\phi : (P,Q) \mapsto \phi(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q 6. Écrire la matrice H de ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire la matrice de terme général $h_{i,j} = \phi(X^i, X^j)$ où les indices i et j varient entre 0 et $n-1$.

Q 7. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer le produit $U^\top HU$ à l'aide de ϕ et des coefficients de U.

Q 8. Montrer que H appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont strictement positives.

BY-NC-SA

I.C – Rayon spectral

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de spectre non vide, le *rayon spectral* de A, noté $\rho(A)$, est défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|.$$

Q 9. Montrer que, si A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0_n$, alors le rayon spectral de A est nul.

Q 10. On note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$. Démontrer que C est une partie fermée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 11. En déduire que l'application : $U \mapsto |U^\top AU|$ admet un maximum sur C.

Q 12. Montrer que $\rho(A) \leqslant \max_{U \in C} |U^\top AU|$.

I.D – Rayon spectral d'une matrice symétrique

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Q 13. Démontrer que $\rho(A) = \max_{U \in C} |U^\top AU|$.

On suppose de plus que les valeurs propres de A sont toutes positives.

Q 14. Montrer alors que $\rho(A) = \max_{U \in C} (U^\top AU)$.

Q 15. Démontrer que l'application ρ définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

II Matrice de covariance

Dans la suite du problème, on considère n variables aléatoires discrètes $Y_1, ..., Y_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles et on définit la fonction Y de Ω dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{pmatrix}.$$

Un tel vecteur aléatoire est dit *constant* si la fonction Y est constante.

Si chacune des variables aléatoires discrètes Y_i admet une espérance finie, on définit le vecteur espérance de Y en posant

$$\mathbb{E}(Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y_n) \end{pmatrix}.$$

Si toutes les covariances existent, la *matrice de covariance* de Y est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée Σ_Y, de terme général $\sigma_{i,j} = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$.

La *variance totale* de Y est définie par $\mathbb{V}_T(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i)$.

Dans la suite du problème, on suppose que $\mathbb{E}(Y)$ et Σ_Y sont bien définies.

II.A –

On admet que Y est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On admet aussi que $\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)^\top$ est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont l'espérance, par définition, est également calculée terme à terme.

Q 16. Vérifier que Σ_Y est une matrice symétrique, que

$$\Sigma_Y = \mathbb{E}\Big(\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)^\top\Big)$$

et que, si U est un vecteur constant dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y.$$

Q 17. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $Z = MY$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Justifier que Z admet une espérance et exprimer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$. Montrer que Z admet une matrice de covariance Σ_Z et que

$$\Sigma_Z = M\Sigma_Y M^\top.$$

BY-NC-SA

II.B – Propriété des valeurs propres

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base orthonormée formée de vecteurs propres de Σ_Y.

On définit la variable aléatoire discrète $X = P^\top Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

Q 18. Démontrer que Σ_X est une matrice diagonale.

Q 19. En déduire que les valeurs propres de Σ_Y sont toutes positives.

Q 20. Démontrer que la variance totale de X est égale à celle de Y.

II.C – Étude de la réciproque

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux λ_i sont tous positifs.

Q 21. Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète Z à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Z = D$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives.

Q 22. Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A$.

II.D –

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $X = U^\top Y$.

Q 23. Montrer que X admet une variance et que

$$\mathbb{V}(X) = U^\top \Sigma_Y U.$$

II.E – Image de Σ_Y

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\mathbb{P}\big(Y - \mathbb{E}(Y) \in \mathrm{Im}\, \Sigma_Y\big) = 1.$$

On note r le rang de la matrice de covariance de Y.

Q 24. Traiter le cas où $r = n$.

On suppose maintenant $r < n$.

Q 25. Démontrer que le noyau et l'image de Σ_Y sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $d = \dim \ker \Sigma_Y$ et on considère une base orthonormée $(V_1, ..., V_d)$ de $\ker \Sigma_Y$.

Q 26. Démontrer que

$$\forall j \in [\![1, d]\!], \quad \mathbb{V}\Big(V_j^\top \big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = 0.$$

Q 27. En déduire que $\mathbb{P}\Big(V_j^\top \big(Y - \mathbb{E}(Y)\big) = 0\Big) = 1$.

Q 28. Conclure.

III Maximisation de la variance

Les notations sont celles de la partie II. On cherche un vecteur U unitaire tel que la variance de $U^\top Y$ soit maximale.

Comme en I.C, on note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$.

On note q_Y l'application de C dans $\mathbb{R}$ définie par $q_Y(U) = \mathbb{V}(U^\top Y)$.

III.A – Un exemple dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On pose $A_2 = \mathrm{diag}(9, 5, 4)$.

Q 29. Justifier l'existence d'un vecteur aléatoire dont A_2 est la matrice de covariance.

Q 30. Dans cette question uniquement, on suppose que Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A_2$. Déterminer le maximum de q_Y sur C.

III.B – Cas général

Q 31. Dans le cas général, démontrer que la fonction q_Y admet un maximum sur C. Préciser la valeur de ce maximum ainsi qu'un vecteur $U_0 \in C$ tel que

$$\max_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y) = \mathbb{V}(U_0^\top Y).$$

BY-NC-SA

III.C – Étude d'un exemple

On suppose, dans cette sous-partie III.C uniquement, que Σ_Y vérifie

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sigma_{i,i} = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \sigma_{i,j} = \sigma^2\gamma$$

où σ et γ sont deux réels strictement positifs.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Q 32. Démontrer que $\gamma \leqslant 1$ et exprimer Σ_Y en fonction de J.

Q 33. Déterminer les valeurs propres de J et la dimension de chaque sous-espace propre associé. Déterminer également un vecteur propre associé à sa valeur propre de module maximal.

Q 34. Préciser un vecteur U_0 unitaire tel que la variance de $Z = U_0^\top Y$ soit maximale.

Q 35. Calculer le pourcentage de la variance totale représenté par Z, c'est-à-dire le rapport $\dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{V}_T(Y)}$.

III.D – On suppose, dans cette dernière sous-partie, que Σ_Y présente n valeurs propres distinctes qu'on classe par ordre strictement décroissant $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n$.

On se munit d'un vecteur U_0 tel que $\mathbb{V}(U_0^\top Y) = \max\limits_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y)$.

On note

$$C' = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1 \text{ et } U_0^\top U = 0\}.$$

Q 36. Justifier que q_Y admet un maximum sur C'.

Q 37. Déterminer la valeur de ce maximum et préciser un vecteur $U_1 \in C'$ tel que

$$\max_{U \in C'} \mathbb{V}(U^\top Y) = \mathbb{V}(U_1^\top Y).$$

Q 38. Calculer la covariance des variables aléatoires discrètes $U_0^\top Y$ et $U_1^\top Y$ (pour simplifier l'écriture, on pourra supposer Y centrée, c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y) = 0$).

Ces questions de maximisation de la variance sont à la base de la méthode statistique d'analyse en composantes principales. Il s'agit de déterminer, à partir d'un certain nombre de variables aléatoires, des combinaisons linéaires (composantes principales) concentrant le maximum d'information et décorrélées entre elles.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2022

4 heures

Calculatrice autorisée

Ce sujet en trois parties étudie la convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange sous différentes hypothèses et aborde le phénomène de Runge.

La partie I est consacrée à l'étude de deux familles de polynômes, les polynômes de Lagrange et les polynômes de Tchebychev.

La partie II donne des résultats généraux de convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$; elle utilise également quelques résultats de la partie I.

Enfin la partie III présente le phénomène de Runge. Elle s'appuie sur les sous-parties III.A et III.B, qui portent sur une intégrale généralisée et sont indépendantes des parties I et II.

Notations

Si k_1 et k_2 sont deux entiers tels que $k_1 \leqslant k_2$, on note $[\![k_1, k_2]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$. Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

I Étude de deux familles de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on note L_i le polynôme de degré $n-1$ défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}. \tag{I.1}$$

On dit que $L_1, ..., L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $a_1, ..., a_n$.

I.A – Polynômes de Lagrange

On définit l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array} \right.$$

Q 1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q 2. Montrer que, pour tout i et k dans $[\![1, n]\!]$,

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 3. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\langle L_i, P \rangle = P(a_i).$$

Q 4. Montrer que la famille $(L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q 5. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i.$$

Q 6. Montrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)} = 0.$$

BY-NC-SA

I.B – Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p}(1-X^2)^p.$$

Q 7. En développant $(1+x)^n$ pour deux réels x bien choisis, montrer que

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.$$

Q 8. Montrer que T_n est un polynôme de degré n. Expliciter le coefficient dominant de T_n.

Q 9. Montrer que T_n est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

Q 10. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $y_{k,n} = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Montrer que

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \Big(X - y_{k,n}\Big)$$

I.C – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et W un polynôme unitaire de degré n. L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \tag{I.2}$$

puis d'étudier dans quel cas on a égalité.

Q 11. Montrer que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$. En déduire un polynôme unitaire de degré n réalisant le cas d'égalité dans (I.2).

On pose $Q = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n - W$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Q 12. Montrer que Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Q 13. Dans cette question, on montre (I.2) par l'absurde.

— Si on suppose que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$, montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$.

— En déduire une contradiction et conclure.

On suppose maintenant que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Q 14. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (z_k - z_j)} \geqslant 0.$$

Q 15. En déduire que $Q = 0$, puis que $W = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$.

On pourra considérer la somme des inégalités de la question précédente et exploiter la question 6 appliquée à des données convenables.

II Interpolation et convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

II.A – Interpolation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et I est un segment $[a, b]$, où $a < b$. On considère n nombres réels distincts $a_1 < \cdots < a_n$ de I.

On note $L_1, ..., L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $a_1, ..., a_n$ définis par (I.1) et on note $W = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - a_i)$.

BY-NC-SA

Pour toute fonction f définie sur I, le polynôme

$$\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) L_i \tag{II.1}$$

est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On l'appelle polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à $a_1, ..., a_n$.

Q 16. Soit r une une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et s'annulant en $n+1$ points distincts de I. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$.

Q 17. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $P = \Pi(f)$ le polynôme interpolateur de f associé aux réels $a_1, ..., a_n$, comme défini en (II.1) ci-dessus. Pour tout $x \in I$, montrer qu'il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} W(x).$$

Pour x distinct des a_i, on pourra considérer la fonction r définie sur I par

$$r(t) = f(t) - P(t) - KW(t)$$

où le réel K est choisi de façon que $r(x) = 0$.

Q 18. En déduire que

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M_n (b-a)^n}{n!}$$

où $M_n = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$.

II.B – Suites de polynômes interpolateurs

On considère encore un segment I et une fonction f définie sur I.

De plus, pour tout entier naturel non nul n, on suppose donnés des réels distincts $a_{1,n} < \cdots < a_{n,n}$ de I et on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à ces réels $a_{1,n}, ..., a_{n,n}$.

En notant $L_{1,n}, L_{2,n}, ..., L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associés à $a_{1,n}, ..., a_{n,n}$, on a donc

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i,n}) L_{i,n} \tag{II.2}$$

et $\Pi_n(f)$ est l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n(a_{i,n}) = f(a_{i,n})$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On s'intéresse à la convergence uniforme sur I vers f de la suite de polynômes $\big(\Pi_n(f)\big)$ pour divers exemples de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

II.B.1) Convergence uniforme vers la fonction exponentielle

Dans cette section, $I = [a, b]$, où $a < b$, et f est la restriction à I de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \exp(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur comme défini par (II.2).

Q 19. Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur I.

Q 20. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers f sur I et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction Q_n ne coïncide avec f en aucun point de I, sauf peut-être en zéro :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I \setminus \{0\}, \qquad Q_n(x) \neq \exp(x)$$

II.B.2) Convergence uniforme vers une fonction rationnelle

Dans cette section, a est un réel strictement positif et $I = [-a, a]$. Soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

Q 21. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$f^{(k)}(\tan t) = k! \cos^{k+1}(t) \cos\big((k+1)t + k\pi/2\big).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de f sur I défini par (II.2).

Q 22. Montrer que, si $a < \dfrac{1}{2}$, la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

BY-NC-SA

II.B.3) Cas de la somme d'une série entière

Soit $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Q 23. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1, 1[, \qquad g^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

Q 24. Soit $r \in]0, R[$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |c_k| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

Q 25. En déduire que pour tout $x \in]-r, r[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, rC}{(r-|x|)^{n+1}}.$$

Q 26. On suppose que $a < R/3$. Montrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(\Pi_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

II.B.4) Interpolation aux points de Tchebychev

Cette section reprend l'étude des deux sections précédentes dans le cas de points d'interpolation particuliers, liés aux racines des polynômes de Tchebychev. On considère $a > 0$ et $I = [-a, a]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points de Tchebychev d'ordre n dans I sont :

$$a^*_{k,n} = a\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!].$$

On pose $W^*_n(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a^*_{k,n})$.

Si f est une fonction définie sur I et si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit comme au (II.2) le polynôme interpolateur $P^*_n = \Pi^*_n(f)$ de f aux points de Tchebychev d'ordre n.

C'est l'unique polynôme $P^*_n \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$ tel que $P^*_n(a^*_{k,n}) = f(a^*_{k,n})$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Q 27. Pour tout $x \in [-a, a]$, montrer que $|W^*_n(x)| \leqslant 2\left(\frac{a}{2}\right)^n$.

Q 28. On reprend dans cette question la fonction f étudiée dans la section II.B.2 : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, si $a < 2$, la suite $(\Pi^*_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Q 29. On reprend dans cette question la fonction f somme de série entière étudiée dans la section II.B.3. Montrer que, si $a < 2R/3$, la suite $(\Pi^*_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

III Phénomène de Runge

III.A – Étude d'une intégrale généralisée

Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère la fonction $h_\alpha : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\right)$.

Q 30. Montrer que h_α est une fonction continue décroissante intégrable sur $[0, 1[$.

On pose $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 31. Justifier que $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t$.

Q 32. En déduire que $J_\alpha = 2\ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

Q 33. Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in]0, \gamma[$, $J_\alpha > 0$.

BY-NC-SA

III.B – Application à une somme de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $]0,1[$ les points $a_{k,n}$ donnés, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, par $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$ et on pose

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n}\left(h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + h_\alpha\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right).$$

Q 34. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant S_n(h_\alpha) \leqslant \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 35. En déduire que la suite $\left(S_n(h_\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers J_α.

Q 36. Montrer que, pour $\alpha \in]0,\gamma[$, la suite $\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

III.C – Le phénomène de Runge

Dans cette sous-partie $I = [-1,1]$ et $\alpha > 0$. On considère

$$f_\alpha : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\alpha^2+x^2} \end{array}\right.$$

On reprend les points $a_{k,n}$ définis dans la sous-partie III.B :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad a_{k,n} = \frac{2k+1}{2n}.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ le polynôme interpolateur de f_α aux $2n$ réels $\{\pm a_{k,n} \in I \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Autrement dit, R_n est l'unique polynôme de degré au plus $2n-1$ qui coïncide avec f_α aux points

$$-\frac{2n-1}{2n}, -\frac{2n-3}{2n}, ..., -\frac{3}{2n}, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, ..., \frac{2n-3}{2n}, \frac{2n-1}{2n}.$$

On pose $Q_n(X) = 1 - (X^2+\alpha^2)R_n(X)$.

Q 37. Montrer que R_n est un polynôme pair et déterminer $Q_n(\alpha\mathrm{i})$.

Q 38. Montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [-1,1], \qquad Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2).$$

Q 39. En déduire que, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+\alpha^2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{x^2-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}.$$

Q 40. On suppose que $\alpha < \gamma$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI 2022

4 heures Calculatrice autorisée

Notations

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I_n la matrice identité d'ordre n à coefficients réels et 0_n la matrice nulle d'ordre n.

$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ désigne l'application identité sur $\mathbb{R}^n$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de A par

$$\begin{cases} A^0 = I_2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = A\,A^n. \end{cases}$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, on dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si chacune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n & \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n \end{pmatrix}.$$

On note $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}\right.$ la fonction exponentielle réelle.

Objectif

L'objectif de ce problème est d'étudier des extensions de cette fonction à différents ensembles et d'en traiter quelques applications.

Il est demandé aux candidats de mentionner clairement les résultats qu'ils utilisent pour répondre aux différentes questions du problème.

I L'exponentielle réelle

I.A – Une équation fonctionnelle

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} f(1) = \mathrm{e}, \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t). \end{cases} \tag{I.1}$$

Q 1. Justifier que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de (I.1).

On se propose de démontrer que c'est la seule solution.

Pour cela, on suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (I.1).

Q 2. Pour tout nombre réel x, calculer $f(x)f(1-x)$.

Q 3. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, puis que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Démontrer que $f(0) = 1$.

Q 5. Justifier que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad f'(s+t) = f'(s)f(t).$$

Q 6. En donnant à s une valeur bien choisie, démontrer qu'il existe une constante k réelle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = k\mathrm{e}^{f'(0)t}.$$

Q 7. Déterminer les valeurs de k et de $f'(0)$ et justifier que f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = y(t). \end{cases} \tag{I.2}$$

BY-NC-SA

Q 8. En déduire que le problème (I.1) a une solution unique que l'on donnera.

Q 9. Donner le développement en série entière en 0 de cette solution et préciser le rayon de convergence de la série entière.

I.B – Un problème de probabilité faisant intervenir l'exponentielle réelle

Q 10. Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 + x$ et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \mathrm{e}^{-x} > 1 - x.$$

Dans cette sous-partie, θ et α sont deux nombres réels strictement positifs et on pose

$$p = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}.$$

Q 11. Justifier que $p \in]0, 1[$.

On pose $q = 1 - p$.

Un service d'urgences médicales de capacité supposée illimitée reçoit des patients entre l'instant 0 et l'instant θ inclus. On modélise le nombre de patients arrivés dans le service au cours de l'intervalle de temps $[0, \theta]$ par une variable aléatoire N_θ suivant la loi de Poisson de paramètre θ.

On rappelle que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N_\theta = k) = \dfrac{\theta^k}{k!}\mathrm{e}^{-\theta}$.

On suppose par ailleurs qu'un patient arrivé dans le service entre les instants 0 et θ a la probabilité p d'être toujours présent dans le service au-delà de l'instant θ. On fait l'hypothèse que les instants aléatoires de sortie des urgences sont mutuellement indépendants. On note R_θ le nombre de patients arrivés entre les instants 0 et θ qui sont encore présents dans le service au-delà de l'instant θ.

Q 12. Pour $(s, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}\big((R_\theta = k) \mid (N_\theta = s)\big)$, probabilité conditionnelle de $(R_\theta = k)$ sachant $(N_\theta = s)$. On distinguera les cas $k \leqslant s$ et $k > s$.

Q 13. Pour tous entiers s et k tels que $k \leqslant s$, démontrer que

$$\mathbb{P}\big(R_\theta = k) \cap (N_\theta = s)\big) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}(p\theta)^k(q\theta)^{s-k}}{k!\,(s-k)!}.$$

Q 14. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbb{P}(R_\theta = k)$ en fonction de k, p et θ.

Q 15. Reconnaitre la loi de probabilité de R_θ et donner la valeur de son espérance $\mathbb{E}(R_\theta)$.

II Forme exponentielle des fonctions trigonométriques

On rappelle que l'exponentielle est définie sur l'ensemble des nombre imaginaires purs par l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t).$$

Dans le plan complexe, on considère la courbe paramétrée Γ formée par l'ensemble des points $M(t)$ d'affixe

$$z(t) = \frac{1}{3}\big(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\big),$$

où t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$. Le point $M(t_0)$ est dit stationnaire si $z'(t_0) = 0$.

Q 16. Pour tout nombre réel t, exprimer en fonction de $z(t)$ les nombres $z(t + 2\pi)$ et $z(-t)$.

Q 17. En déduire un intervalle de la forme $[0, \gamma]$ (avec $0 < \gamma < 2\pi$) et une transformation géométrique simple permettant d'obtenir la courbe Γ toute entière à partir de sa restriction à l'intervalle $[0, \gamma]$.

Q 18. Déterminer trois nombres réels $t_1 < t_2 < t_3$ appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ tels que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont des points stationnaires de Γ.

Q 19. Préciser la nature du triangle formé par ces trois points.

Q 20. Pour tout nombre réel t, exprimer $z\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ en fonction de $z(t)$.

Q 21. En déduire une transformation géométrique laissant globalement invariante la courbe Γ.

Q 22. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ sur un intervalle bien choisi. On admet que la tangente au point stationnaire $M(t_2)$ est l'axe des abscisses. En déduire les tangentes aux points $M(t_1)$ et $M(t_3)$, puis tracer la courbe Γ.

Q 23. Calculer la longueur de la courbe Γ.

BY-NC-SA

III Exponentielles de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique et est orienté par la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

III.A – On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Q 24. Démontrer que $F_1 = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $F_2 = \ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires. Préciser un vecteur directeur u_1 de F_1 et un vecteur directeur u_2 de F_2.

On note q_1 le projecteur sur la droite F_1 parallèlement à la droite F_2 et q_2 le projecteur sur la droite F_2 parallèlement à la droite F_1.

Q 25. Déterminer la matrice Q_1 de l'endomorphisme q_1 dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice Q_2 de l'endomorphisme q_2 dans cette même base.

Q 26. Justifier les égalités

$$Q_1^2 = Q_1, \qquad Q_2^2 = Q_2, \qquad Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0_2, \qquad Q_1 + Q_2 = I_2 \qquad \text{et} \qquad A = Q_1 + 2Q_2.$$

Q 27. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$.

Q 28. Donner les développements en série entière au voisinage de zéro des fonction cosinus et sinus.

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel t, on note $E_n(t)$ la matrice $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$.

Q 29. Pour tout nombre réel t, justifier que la suite $\left(E_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $E(t) = \mathrm{e}^t Q_1 + \mathrm{e}^{2t} Q_2$.

Q 30. En déduire que

$$\begin{cases} E(0) = I_2, \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, & E(t+s) = E(t)E(s), \\ \forall t \in \mathbb{R}, & E'(t) = AE(t). \end{cases}$$

Q 31. Justifier la notation $E(t) = \mathrm{e}^{tA}$, valable pour tout nombre réel t.

III.B – On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 32. Identifier géométriquement l'endomorphisme g.

Q 33. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer B^{2n} et B^{2n+1} en fonction de n, I_2 et B.

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel t, on note $R_n(t)$ la matrice $R_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k$ et on l'écrit sous la forme

$$R_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_n(t) & \beta_n(t) \\ \gamma_n(t) & \delta_n(t) \end{pmatrix}.$$

Q 34. Démontrer que les quatre suites $\left(\alpha_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\beta_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\gamma_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\delta_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On pourra considérer les suites extraites $(R_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

On note alors $R(t) = \lim_{n\to+\infty} R_n(t)$.

Q 35. Identifier géométriquement la matrice $R(t)$ et donner ses éléments caractéristiques.

CC BY-NC-SA

IV Un système différentiel

Dans cette partie, on identifie tout élément u de $\mathbb{R}^3$ avec la matrice colonne associée.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q 36. Déterminer le rang de la matrice $A - I_3$ et démontrer que les deux vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\ker(A - I_3)$.

Q 37. Déterminer le rang de la matrice $A + I_3$ et démontrer que le vecteur

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de $\ker(A + I_3)$.

Q 38. Justifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q 39. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Q 40. Résoudre le système différentiel linéaire

$$X'(t) = AX(t) \tag{IV.1}$$

où la variable t est réelle et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

On pourra poser $X(t) = PY(t)$ où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

On rappelle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution X de (IV.1) vérifiant

$$X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Q 41. Déterminer une fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ t & \to & M(t) \end{array} \right.$$

telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = M(t) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On pourrait démontrer, ce qui n'est pas demandé dans le cadre de ce problème, que, pour tout nombre réel t, $M(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

TSI

2022

4 heures

Calculatrice autorisée

Notations

Si $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leqslant b$, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers relatifs compris entre a et b.

Si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ désigne son conjugué et $|z|$ son module.

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}$.

$\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille N à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et I_N désigne la matrice identité d'ordre N.

Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ est une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, la matrice $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A.

On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π périodiques et continues sur $\mathbb{R}$.

Rappels

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0_{2\pi}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout entier k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} a_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, \\ b_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Structure et objectifs du problème

Ce problème est composé de cinq parties largement indépendantes.

La première partie consiste à établir quelques calculs utiles dans tout le problème et à étudier le comportement asymptotique des coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ supposée de classe C^1. La partie II traite de questions d'algèbre linéaire ; le résultat de l'une d'elles pourra être utilisé dans la partie III. La partie III s'intéresse à l'échantillonnage d'un signal continu et à une application, appelée transformation de Fourier discrète, qui permet le traitement d'un signal numérique à partir d'un échantillon. La partie IV est consacrée à l'étude d'un algorithme rapide de calcul d'une transformée de Fourier discrète et au calcul de sa complexité. Enfin, la partie V étudie un opérateur sur l'ensemble des suites périodiques et fournit une application des résultats obtenus dans les parties précédentes.

L'algorithme de transformée de Fourier rapide (Cooley et Tukey, 1965) est, entre autres, à la base des techniques de compression numérique ayant conduit au format JPEG.

I Première partie

I.A – Calculs préliminaires

Q 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^N = 1$. On exprimera les solutions à l'aide du nombre ω.

Q 2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs j tels que $\omega^j = 1$.

Q 3. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\omega^k} = \bar{\omega}^k$.

Q 4. Soit q un nombre complexe et N un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} q^n$. On distinguera les cas $q = 1$ et $q \neq 1$.

Q 5. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{rn}$, dans les trois cas

$$r = 0, \qquad r \in [\![1, N-1]\!], \qquad r \in [\![-(N-1), -1]\!].$$

BY-NC-SA

I.B – Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

À toute fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on associe la suite $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$, à valeur dans $\mathbb{C}$, définie par $c_0(f) = a_0(f)$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} c_k(f) = \dfrac{1}{2}\big(a_k(f) - \mathrm{i}b_k(f)\big), \\ c_{-k}(f) = \dfrac{1}{2}\big(a_k(f) + \mathrm{i}b_k(f)\big). \end{cases}$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

La suite $\big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ s'appelle la suite des *coefficients de Fourier exponentiels* de la fonction f. Cette notation est utilisée tout au long du problème.

Q 7. *Question de cours* : citer le théorème de Parseval pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q 8. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $|c_k(f)|^2$ et $|c_{-k}(f)|^2$ en fonction de $a_k^2(f)$ et $b_k^2(f)$ et, en utilisant le théorème de Parseval, démontrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k(f) = \lim\limits_{k\to+\infty} c_{-k}(f) = 0$.

Dans les trois questions suivantes, f est une fonction 2π périodique, de classe C^1, à valeurs réelles.

Q 9. Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'existence de $a_k(f')$ et $b_k(f')$.

Q 10. À l'aide d'intégrations par parties, démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\begin{cases} a_k(f') = kb_k(f), \\ b_k(f') = -ka_k(f). \end{cases}$$

En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $c_k(f') = \mathrm{i}kc_k(f)$.

Q 11. En déduire que $|c_k(f)| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et $|c_{-k}(f)| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

II Diagonalisation des matrices circulantes

On rappelle que N est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour $(a_0, a_1, ..., a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, on considère la matrice

$$C(a_0, a_1, ..., a_{N-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}).$$

II.A – Étude du cas $N = 3$

On note $G_3 = C(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Q 12. Montrer que G_3 est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Identifier géométriquement l'isométrie canoniquement associée à la matrice G_3 (on précisera ses éléments caractéristiques).

Q 13. Calculer le polynôme caractéristique de G_3. Montrer que la matrice G_3 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q 14. Déterminer une matrice P_3 inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $D_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale telles que $G_3 = P_3 D_3 P_3^{-1}$.

Q 15. Pour tout $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3$ exprimer $C(a_0, a_1, a_2)$ à l'aide de I_3, G_3 et G_3^2 et en déduire que $C(a_0, a_1, a_2)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

II.B – Étude du cas général

On note $G_N = C(0, 1, 0, ..., 0) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_N)$ de $\mathbb{C}^N$ est G_N.

Q 16. Montrer que le polynôme caractéristique de G_N est $X^N - 1$.

Q 17. G_N est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$? Justifier.

BY-NC-SA

On note

$$P_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont, pour tout couple $(r,s) \in [\![1,N]\!]$, le coefficient situé à la ligne r et à la colonne s est égal à $\omega^{(r-1)(s-1)}$.

On rappelle que ω a été défini dans les notations par $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}$.

Pour $k \in [\![1,N]\!]$, on note C_k la k-ième colonne de la matrice P_N.

Q 18. Calculer le produit matriciel $G_N C_k$. Démontrer que ω^k est une valeur propre de G_N et donner un vecteur propre associé.

Q 19. En déduire que la famille des vecteurs colonnes $(C_1, C_2, ..., C_N)$ est libre, puis que la matrice P_N est inversible.

Q 20. Calculer le produit matriciel $P_N\overline{P_N}$ et en déduire que $P_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{P_N}$.

Q 21. Pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, exprimer $g(e_j)$ en fonction des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$. On distinguera le cas $j = 1$.

Q 22. Pour tout $k \in [\![1,N-1]\!]$ et tout $j \in [\![1,N]\!]$, exprimer $g^k(e_j)$ en fonction des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$. On distinguera les cas $j > k$ et $j \leqslant k$.

Q 23. En déduire, pour tout $k \in [\![0,N-1]\!]$, l'expression de G_N^k comme une matrice $C(a_0, a_1, ..., a_{N-1})$ particulière. (On rappelle que $G_N^0 = I_N$).

Q 24. En exprimant $C(a_0, a_1, ..., a_{N-1})$ comme combinaison linéaire de $G_N^0, G_N^1, ..., G_N^{N-1}$ et en utilisant les questions précédentes, justifier que $C(a_0, a_1, ..., a_{N-1})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Donner sa réduite diagonale et une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Q 25. À l'aide du résultat précédent, calculer le déterminant de la matrice $C(a_0, a_1, ..., a_{N-1})$.

III Discrétisation et transformée de Fourier discrète

On appelle échantillon de taille N un N-uplet de $\mathbb{R}^N$.

Pour un signal continu variant dans le temps, l'échantillonnage consiste à prélever un nombre fini de valeurs de ce signal, à intervalles fixes, souvent réguliers.

III.A – Approximation des coefficients de Fourier

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Le N-uplet $\left(f\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\right)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ est un échantillon de ce signal.

On pose $a'_0(N) = c'_0(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a'_k(N) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\cos\left(k\frac{2n\pi}{N}\right)$$

$$b'_k(N) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\sin\left(k\frac{2n\pi}{N}\right)$$

$$c'_k(N) = \frac{1}{2}\left(a'_k(N) - \mathrm{i}b'_k(N)\right)$$

$$c'_{-k}(N) = \frac{1}{2}\left(a'_k(N) + \mathrm{i}b'_k(N)\right)$$

Afin d'alléger les notations, on notera respectivement a_k, b_k et c_k les coefficients de Fourier $a_k(f)$, $b_k(f)$ et $c_k(f)$.

Q 26. Justifier, en explicitant le théorème utilisé, que $\lim\limits_{N\to+\infty} a'_0(N) = a_0$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{N\to+\infty} a'_k(N) = a_k$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} b'_k(N) = b_k$.

Q 27. En déduire que, pour tout entier relatif k, $\lim\limits_{N\to+\infty} c'_k(N) = c_k$.

De ce fait, pour de grandes valeurs de N, on prendra le nombre $c'_k(N)$ comme une approximation du coefficient de Fourier c_k.

CC BY-NC-SA

III.B – Formule d'inversion

Si $u = (u_n)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ est un échantillon de taille N, on définit $\hat{u} = (\hat{u}_k)_{0\leqslant k\leqslant N-1}$ par

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], \qquad \hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi n/N}. \tag{III.1}$$

L'échantillon $\hat{u}$ s'appelle la transformée de Fourier d'ordre N de l'échantillon u.

Q 28. Combien d'opérations (additions et multiplications entre nombres complexes) sont nécessaires pour calculer les N termes de la transformée de Fourier $\hat{u}$, connaissant ceux de l'échantillon u et les nombres $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi n/N}$? Parmi les multiplications, on ne comptabilise pas celles dont l'un des facteurs est égal à 1.

Q 29. Démontrer que

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!], \qquad u_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi n/N}. \tag{III.2}$$

On pourra donner une écriture matricielle des N égalités (III.1) et utiliser la question 20.

Les N égalités (III.2), connues sous le nom de *formule d'inversion de Fourier*, permettent de reconstruire l'échantillon u à partir de sa transformée de Fourier $\hat{u}$.

Q 30. Montrer que, pour tout $\ell \in [\![1, N-1]\!]$, $\overline{\hat{u}}_\ell = \hat{u}_{N-\ell}$.

On suppose dans la question suivante que l'entier naturel N est pair.

Q 31. Combien suffit-il d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes et conjugaison d'un nombre complexe) pour calculer les N termes de la transformée de Fourier $\hat{u}$, connaissant ceux de l'échantillon u de taille N et les nombres $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi n/N}$?

Q 32. Donner un équivalent de ce nombre d'opérations lorsque N tend vers $+\infty$.

IV Transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide est un algorithme dont l'objectif est d'améliorer le temps de calcul des termes de la transformée de Fourier $\hat{u}$, connaissant ceux de l'échantillon u.

Dans cette partie, on suppose que u est un échantillon dont la taille N est une puissance de 2 ; on écrit donc $N = 2^j$, $j \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}$.

Pour tout entier r compris entre 0 et $\dfrac{N}{2} - 1$, on pose $y_r = u_{2r}$ et $z_r = u_{2r+1}$ ce qui définit deux échantillons y et z de taille $\dfrac{N}{2}$.

Q 33. Montrer que $\hat{u}_{N/2} = \hat{y}_0 - \hat{z}_0$.

Q 34. Montrer que,

$$\forall k \in [\![0, \frac{N}{2} - 1]\!], \qquad \begin{cases} \hat{u}_k = \hat{y}_k + \bar{\omega}^k \hat{z}_k, \\ \hat{u}_{k+N/2} = \hat{y}_k - \bar{\omega}^k \hat{z}_k. \end{cases}$$

On note $T(N)$ le nombre d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes) nécessaires pour calculer selon cette méthode les N termes de la transformée de Fourier d'ordre N d'un échantillon u de taille N connaissant les termes de cet échantillon et les $\bar{\omega}^k$.

Q 35. Justifier que $T(2) = 3$ et démontrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2,

$$\forall r \in [\![2, j]\!], \qquad T(2^r) \leqslant 2T(2^{r-1}) + 4 \times 2^{r-1}.$$

Q 36. Démontrer que

$$T(N) \leqslant \frac{2}{\ln 2} N \ln N.$$

On pourra utiliser la suite auxiliaire $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant j}$, définie par $t_k = \dfrac{T(2^k)}{2^k}$.

Q 37. Expliquer pourquoi cette méthode est qualifiée de transformée de Fourier « rapide ».

BY-NC-SA

V Convolution circulaire

Étant donné un échantillon $(u_n)_{0\leqslant n\leqslant N-1} \in \mathbb{R}^n$, on appelle suite périodisée, indexée par $\mathbb{Z}$, de germe $(u_n)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant, pour tout entier relatif n, $u_{n+N} = u_n$.

On admet que la donnée d'un germe $(u_n)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ permet de définir une unique suite périodisée $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

À titre d'exemple, à partir du germe $(2, 4, 7, 9)$, on définit, dans $\mathbb{Z}$, la suite de période 4 $(..., 4, 7, 9, 2, 4, 7, 9, 2, 4, 7, 9, 2, ...)$.

Les définitions de somme, produit par un nombre réel et produit de suites définies sur $\mathbb{N}$ se prolongent naturellement aux suites définies sur $\mathbb{Z}$.

Q 38. Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ périodique de période N, démontrer que, pour tout entier relatif $p \in [\![-N+1, 0]\!]$,

$$\sum_{k=p}^{p+N-1} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k.$$

À deux suites périodiques de même période N, on associe la suite $u * v$, appelée convolée circulaire des suites u et v, définie par $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(u * v)_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k}$.

Q 39. Montrer que la convolée circulaire de deux suites périodiques de période N est une suite périodique de période N.

Q 40. On considère les suites r et s périodiques de période 3, dont les germes sont $r = (1, 2, 3)$ et $s = (6, 5, 4)$. Donner le germe de $r * s$.

Q 41. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont à priori nécessaires pour calculer les N termes $(u * v)_0, (u * v)_1, ..., (u * v)_{N-1}$ à partir de la donnée de $u_0, ..., u_{N-1}$ et $v_0, ..., v_{N-1}$?

On définit la transformée de Fourier discrète d'une suite u périodique de période N comme la suite périodisée de période N dont le germe est la transformée de Fourier discrète $(\hat{u}_0, ..., \hat{u}_{N-1})$ du germe $(u_0, ..., u_{N-1})$ de la suite u.

Q 42. Pour deux suites u et v périodiques de période N, montrer que $\widehat{u * v} = \hat{u}\,\hat{v}$.

Q 43. En utilisant à la fois la transformée de Fourier rapide, le résultat de la question 42 et la formule d'inversion, donner, lorsque $N = 2^j$, un majorant (dépendant de N) du nombre d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes, divisions d'un nombre complexe par un entier naturel) utilisées pour calculer efficacement le germe de la convolée circulaire de deux suites périodiques de période N.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP, MPI

2023

4 heures — Calculatrice autorisée

Sur le calcul ombral

Objectifs

Ce problème introduit le calcul ombral et propose d'en démontrer certains résultats.

Historiquement, ce « calcul » reposait sur un ensemble de manipulations heuristiques sur les indices qui étaient traités comme des puissances. Pour justifier ces règles, une solution consiste à utiliser des endomorphismes agissant sur des polynômes. Ce problème a pour objectif de présenter ces règles et d'en déduire des identités polynomiales non triviales.

Notations

— $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ associées. On identifie de plus les éléments de $\mathbb{K}$ aux polynômes constants.

— Tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où (a_k) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Si p n'est pas le polynôme nul, son degré $\deg(p)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul est -1 (cette convention est inhabituelle).

— Si n est un entier naturel, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

— On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

— On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}[X]$.

— Les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

— Pour $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $p \in \mathbb{K}[X]$, on note $Tp = T(p)$.

— D désigne l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $D(p) = Dp = p'$.

— Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, on définit la suite d'endomorphismes (T^k) par récurrence : $T^0 = I$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^{k+1} = T \circ T^k = T^k \circ T$.

I Étude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

I.A – Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on pose $E_a(p) = E_a p = p(X + a)$.

Q 1. Montrer que E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

I.B – À tout $p \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction $J(p) = Jp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Montrer que J est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q 3. Montrer que J conserve le degré et que J est inversible.

I.C – À tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $L(p) = Lp$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad L(p)(x) = Lp(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} p'(x + t)\,\mathrm{d}t.$$

BY-NC-SA

Q 4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k \,\mathrm{d}t$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ et calculer sa valeur.

Q 5. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il inversible ?

II Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que :

— T est *shift-invariant* si, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ T = T \circ E_a$;

— T est un *endomorphisme delta* si T est shift-invariant et si l'image du polynôme X par T est une constante non nulle : $TX \in \mathbb{K}^*$.

II.A –

Q 6. Soit $a \in \mathbb{K}$. Vérifier que les endomorphismes I et D sont shift-invariants, ainsi que les endomorphismes E_a, J et L définis dans la partie I. Sont-ils des endomorphismes delta ?

Q 7. Montrer que l'ensemble des endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. L'ensemble des endomorphismes delta de $\mathbb{K}[X]$ est-il stable par addition ? par composition ?

II.B –

Q 8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, montrer que l'expression

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$$

a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ l'application de $\mathbb{K}[X]$ qui, à un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, associe le polynôme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$.

Q 9. Montrer que, pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est un endomorphisme shift-invariant.

Q 10. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $q_n = \dfrac{X^n}{n!}$. On se donne T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 11. Montrer que T est un endomorphisme shift-invariant si, et seulement si,

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k.$$

Q 12. Montrer que deux endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ commutent.

II.C – Dans cette sous-partie, on applique le résultat de la question 11 aux endomorphismes de la partie I.

Q 13. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$, montrer, à l'aide de la question 11, que

$$p(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}$$

où $p^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme p. Reconnaitre cette formule.

Q 14. Pour $p \in \mathbb{K}[X]$, exprimer Jp en fonction des dérivées $p^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ de p.

Q 15. Démontrer que l'endomophisme $D - I$ est inversible et exprimer L en fonction de $(D-I)^{-1}$.

II.D – Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme non nul shift-invariant de $\mathbb{K}[X]$.

On rappelle que le degré du polynôme nul est par convention égal à -1.

Q 16. Montrer qu'il existe un entier naturel $n(T)$ tel que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$,

$$\deg(Tp) = \max\{-1, \deg(p) - n(T)\}.$$

Q 17. En déduire $\ker(T)$ en fonction de $n(T)$.

BY-NC-SA

Q 18. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) T est inversible ;

(2) $T1 \neq 0$;

(3) $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(Tp) = \deg(p)$.

Q 19. Si ces conditions sont vérifiées, montrer que T^{-1} est encore un endomorphisme shift-invariant.

II.E – Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme delta de $\mathbb{K}[X]$.

Q 20. Montrer qu'il existe une suite de scalaires $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ et $T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k$.

Q 21. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $T = D \circ U$. Préciser U dans le cas $T = D$, puis dans le cas $T = L$.

Q 22. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul, vérifier que $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. En déduire $\ker(T)$ et le spectre de T.

Q 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

Q 24. Déterminer $\mathrm{Im}(T_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que T est surjectif.

III Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

On souhaite montrer que, pour tout endomorphisme delta Q, il existe une unique suite de polynômes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que

— $q_0 = 1$;

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(q_n) = n$;

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n(0) = 0$;

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Qq_n = q_{n-1}$.

Cette suite sera appelée *suite de polynômes associée* à l'endomorphisme delta Q.

III.A – Soit Q un endomorphisme delta.

Q 25. Montrer l'existence et l'unicité de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à Q.

Q 26. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y).$$

III.B – Réciproquement, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(q_n) = n$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y).$$

Q 27. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme delta Q dont $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes associée.

III.C – Soit Q un endomorphisme delta, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q et soit n un entier naturel.

Q 28. Montrer que la famille $(q_0, q_1, ..., q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q 29. D'après la question 23, Q induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ noté Q_n. Donner sa matrice dans la base précédente. En déduire sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique.

III.D – Dans cette sous-partie, on détermine la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à certains endomorphismes.

Q 30. Pour $Q = D$, vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_n = \frac{X^n}{n!}.$$

Q 31. Pour $Q = E_1 - I$, vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad q_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

BY-NC-SA

III.E – Cette sous-partie propose de généraliser la formule de Taylor démontrée dans la partie II. On se donne Q un endomorphisme delta et on note $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q.

Q 32. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, l'expression $\sum_{k=0}^{+\infty}(Q^k p)(0)q_k$ a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, puis que

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty}(Q^k p)(0)q_k.$$

Q 33. En déduire que, pour tout endomorphisme shift-invariant T, on a

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty}(Tq_k)(0)Q^k.$$

III.F –

Q 34. En choisissant $Q = E_1 - I$, démontrer que, si p est un polynôme non constant, alors

$$p'(X) = \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}p(X+j)\right).$$

C'est la *formule de dérivation numérique des polynômes*.

IV Un peu de calcul ombral

Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ on définit sa dérivée de Pincherle, notée T', comme l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ tel que,

$$\forall p \in \mathbb{K}[X], \qquad T'(p) = T(Xp) - XT(p).$$

IV.A – Soient S et T deux endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.

Q 35. Montrer que, s'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de scalaires telle que $T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$, alors $T' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k D^{k-1}$.

Q 36. Si T est un endomorphisme shift-invariant, montrer que T' est encore un endomorphisme shift-invariant.

Q 37. Si T est un endomorphisme delta, montrer que T' est un endomorphisme shift-invariant et inversible.

Q 38. Vérifier que $(S \circ T)' = S' \circ T + S \circ T'$.

IV.B – Soit Q un endomorphisme delta. On rappelle que d'après la partie II, il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $Q = D \circ U$. On note $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q au sens de la partie III.

Q 39. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(Q' \circ U^{-n-1})(X^n) = X\,U^{-n}(X^{n-1}).$$

Q 40. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n!q_n(X) = X\,U^{-n}(X^{n-1})$$

puis que

$$nq_n(X) = X(Q')^{-1}(q_{n-1}).$$

IV.C – Dans cette sous-partie, on applique les résultats de la question 40 à l'endomorphisme L étudié dans les parties I et II. On note $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa suite de polynômes associée au sens de la partie III.

Q 41. Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ell_n' = \ell_{n-1}' - \ell_{n-1}$$

et

$$X\ell_n'' - X\ell_n' + n\ell_n = 0$$

et

$$\ell_n(X) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\frac{X^k}{k!}.$$

CC BY-NC-SA

IV.D – Soient Q un endomorphisme delta de suite de polynômes associée notée $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 42. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme inversible T tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Tq_n = \frac{X^n}{n!}.$$

Q 43. Montrer aussi que $D = T \circ Q \circ T^{-1}$.

IV.E – On fixe $\alpha > 0$ et on définit la fonction W de $\mathbb{K}[X]$ par

$$W : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ p & \mapsto & p(\alpha X) \end{array} \right.$$

Q 44. Montrer que W est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

On pose $P = W \circ L \circ W^{-1}$ où L est l'endomorphisme étudié dans les parties I et II.

Q 45. Montrer que

$$P = \frac{1}{\alpha} D \circ \left(\frac{1}{\alpha} D - I \right)^{-1}.$$

Q 46. Montrer ensuite que P est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = \ell_n(\alpha X).$$

Q 47. Vérifier que $D = L \circ (L - I)^{-1}$ puis que $P = L \circ \big(\alpha I + (1-\alpha)L\big)^{-1}$.

On note T l'unique automorphisme vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T\ell_n = \dfrac{X^n}{n!}$ et on pose $Q = T \circ P \circ T^{-1}$.

Q 48. Montrer que $Q = D \circ \big(\alpha I + (1-\alpha)D\big)^{-1}$. En déduire que Q est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}.$$

Q 49. Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell_n(\alpha X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \ell_k(X).$$

Les endomorphismes W et T étudiés dans la sous-partie IV.E *sont appelés opérateurs ombraux. Les polynômes (ℓ_n) associés à l'endomorphisme L sont connus sous le nom de polynômes de Laguerre (de paramètre -1). La dernière formule démontrée grâce aux opérateurs ombraux est leur formule de duplication.*

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP, MPI

4 heures

Calculatrice autorisée

2023

Notations

— Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.

— Étant donnés deux entiers naturels a et b, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

— Pour deux suites de nombres réels $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, la notation $u_m = O(v_m)$ signifie qu'il existe une suite bornée $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que l'on ait

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall m \geqslant m_0, \quad u_m = M_m v_m.$$

— On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I Résultats préliminaires

I.A – Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

I.A.1)

Q 1. Montrer que

$$I_n \geqslant \frac{1}{2^n}.$$

Q 2. Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

Q 3. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right).$$

On pourra minorer $1 + t^2$ par un polynôme de degré 1.

Q 4. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$I_n \sim K_n.$$

Q 5. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n}K_n$.

Q 6. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

BY-NC-SA

I.A.2)

Q 7. Justifier que

$$\sqrt{n}\, I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u.$$

Q 8. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Q 9. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{puis de} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} \qquad \text{et} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.B – Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. En écrivant que $\varphi(t) \leqslant \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geqslant x$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Q 11. À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 12. En déduire un équivalent simple de $1-\Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.C – Une inégalité maximale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et $Z_1, ..., Z_n$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $R_p = \sum_{i=1}^{p} Z_i$.

On va montrer la propriété

$$\forall x > 0, \qquad \mathbb{P}(\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\}) \leqslant 3 \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}(\{|R_p| \geqslant x\}).$$

On admet que les différentes fonctions intervenant dans cette inégalité sont bien des variables aléatoires discrètes.

Pour simplifier, notons A l'événement $\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\}$. Ainsi,

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \max_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p(\omega)| \geqslant 3x\}.$$

BY-NC-SA

Dans le cas où $n \geqslant 2$, définissons de plus les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geqslant 3x\} \qquad \text{et} \qquad A_p = \{\max_{1\leqslant i\leqslant p-1} |R_i| < 3x\} \cap \{|R_p| \geqslant 3x\}$$

pour $p \in [\![2, n]\!]$.

Q 13. Exprimer l'événement A à l'aide des événements $A_1, A_2, ..., A_n$.

Q 14. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}).$$

Q 15. Justifier que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a l'inclusion

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \ \subset \ A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}.$$

Q 16. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}).$$

Q 17. Conclure.

II Étude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}.$$

De plus, on définit la fonction $B_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les conditions

$$\forall x \in \left]-\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, \qquad B_n(x) = 0$$

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, \quad B_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$$

$$\forall x \in \left[\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[, \qquad B_n(x) = 0$$

L'objectif de cette partie est de montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ, définie dans la partie I. Autrement dit, on souhaite montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Delta_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

L'usage d'une figure pour appréhender la problématique de cette partie sera vivement apprécié.

II.A –

Q 18. Comparer les réels $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$.

Q 19. Justifier l'existence du réel Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 20. Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$\Delta_n = \sup_{x\geqslant 0} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

Q 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que B_n est une application décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra distinguer selon que n est pair ou impair.

Dans la suite de cette partie, on fixe $\varepsilon > 0$. La limite $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ assure de l'existence d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

BY-NC-SA

II.B – Dans cette sous-partie, on va montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

On introduit pour cela l'ensemble

$$I_n = \{k \in [\![0, n]\!] \mid x_{n,k} \in [0, \ell + 1]\}$$

dont on peut vérifier que c'est un intervalle d'entiers.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que n et k varient de sorte que $k \in I_n$.

Q 22. Montrer que l'on a

$$k!(n-k)! = 2\pi \mathrm{e}^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pour n tendant vers l'infini.

On pourra utiliser la formule de Stirling rappelée en début d'énoncé.

Q 23. En déduire que, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}.$$

Q 24. En déduire que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}$$

puis que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Q 25. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1$,

$$\sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

II.C –

Q 26. Pour tout $\ell > 0$, montrer qu'il existe un entier naturel n_2, tel que, pour tout $n \geqslant n_2$,

$$B_n(\ell) \leqslant 2\varphi(\ell).$$

Q 27. Conclure que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

III Applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X. On définit alors

$$S_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On admettra que pour tout $n \geqslant 1$, S_n est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

BY-NC-SA

III.A – Théorème central limite

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f également continue par morceaux sur I.

Q 28. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (respectivement $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est une suite de nombres réels appartenant à I qui converge vers $u \in I$ (respectivement $v \in I$), montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ et $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Q 29. Montrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\{T_n = j\}) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $x_{n,j}$ a été défini dans la partie II.

Considérons un couple (u, v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{ j \in [\![0, n]\!] \mid \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leqslant j \leqslant \frac{n + v\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

Q 30. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left\{ u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v \right\} \right) = \sum_{j\in J_n} \mathbb{P}(\{T_n = j\}).$$

Q 31. En déduire que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v \right\} \right) = \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right\} \right) = 1 - \Phi(u)$$

où les applications φ et Φ ont été définies dans la partie I.

III.B – Critère de tension

Dans cette dernière sous-partie, on fixe $\varepsilon \in]0, 1[$.

Q 32. Montrer qu'il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que l'on ait

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_x, \quad x^2\mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon.$$

Q 33. Pour x_0 et x comme à la question précédente, on fixe $N \geqslant \frac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geqslant N$. Montrer qu'alors

$$x^2\mathbb{P}(\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\}) \leqslant 3\varepsilon.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2023

Notations et rappels

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à n lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et par 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle image de M, notée $\operatorname{Im} M$ l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et on appelle noyau de M, noté $\ker M$, le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\mathrm{rg}(M)$ son rang, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace, χ_M son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On rappelle que M et $M^\top$ ont le même rang et le même déterminant.

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice M associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f. On définit la suite des puissances de f en posant

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad f^{k+1} = f \circ f^k. \end{cases}$$

Si $\Pi = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que $\Pi(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.

Lorsque $M_1, ..., M_k$ désignent des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, ..., n_k$, on note $\mathrm{diag}(M_1, ..., M_k)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + ... + n_k$, diagonale par blocs, égale à

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

— conserve le rang si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}\big(\Phi(M)\big) = \mathrm{rg}(M)$;

— conserve le déterminant si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\big(\Phi(M)\big) = \det(M)$;

— conserve la trace si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\big(\Phi(M)\big) = \mathrm{tr}(M)$;

— conserve le polynôme caractéristique si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(M)} = \chi_M$.

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

I Résultats préliminaires

I.A – On suppose que $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Q 1. *Question de cours.* Démontrer que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\,\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

Q 2. En déduire qu'il existe deux matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = P\,\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f)\,Q.$$

I.B – On suppose que M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout entier naturel k, $M^k X = \lambda^k X$.

BY-NC-SA

Q 4. En déduire que, si $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de M, alors toute valeur propre complexe de M est une racine dans $\mathbb{C}$ de Π.

II Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note Γ_A l'application

$$\Gamma_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

Q 5. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Γ_A appartient à $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

Q 6. Démontrer que, si A appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors Γ_A conserve le rang.

Q 7. Démontrer que l'application

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big) \\ A & \mapsto & \Gamma_A \end{array} \right.$$

est linéaire et injective.

Dans la suite de cette sous-partie II.A, A est un élément fixé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 8. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$.

Q 9. En déduire que, pour tout polynôme Π de $\mathbb{R}[X]$, $\Gamma_{\Pi(A)} = \Pi(\Gamma_A)$.

Q 10. À l'aide du résultat précédent, démontrer que A est diagonalisable si et seulement si Γ_A est diagonalisable.

Q 11. Démontrer que χ_A est un polynôme annulateur de Γ_A et que χ_{Γ_A} est un polynôme annulateur de A.

Q 12. En déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

II.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable

Pour toutes matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\Phi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array} \right.$$

$$\Psi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM^{\top}Q \end{array} \right.$$

On admet que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \Phi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2 \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{ \Psi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2 \right\}.$$

Q 13. Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall (\Theta, \Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2, \qquad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

II.B.1) Soient P et Q deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Q 14. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs applications réciproques.

Q 15. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

Q 16. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.

Q 17. Montrer que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.

II.B.2) Dans cette section, on prend $n \geqslant 2$.

Q 18. Montrer que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$.

Q 19. En déduire que les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

BY-NC-SA

III Endomorphismes de rang donné

On suppose que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Son noyau est noté $\ker(f)$.

III.A – On suppose dans cette sous-partie que f est un isomorphisme. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}'$ la base

$$\mathcal{B}' = \big(f(e_1), ..., f(e_n)\big).$$

Q 20. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

III.B – On suppose dans cette sous-partie que f n'est pas l'endomorphisme nul et que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f)$, que l'on complète (à gauche) en une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_k, \mathcal{B}_2)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q 21. Montrer que la famille $\big(f(e_1), ..., f(e_k)\big)$ est libre.

Q 22. Justifier que $k < n$.

On complète la famille $\big(f(e_1), ..., f(e_k)\big)$ en une base $\mathcal{B}' = \big(f(e_1), ..., f(e_k), f_{k+1}, ..., f_n\big)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q 23. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

III.C – Dans toute la suite du problème, pour tout entier entier naturel $r \in [\![0, n]\!]$, on note

$$J_{n,r} = \mathrm{diag}(I_r, 0_{n-r})$$

en convenant que $J_{n,n} = I_n$ et $J_{0,n} = 0_n$.
Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.

Q 24. Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \Phi_{P,Q}(J_{n,r}).$$

III.D – On suppose dans cette sous-partie que $n = 2$ et que A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1. On suppose que $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{Im}\, B$ sont distinctes.

Q 25. Montrer qu'il existe deux matrices P_2 et Q_2 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \qquad \text{et} \qquad B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

où α et β sont des réels, non tous deux nuls.

IV Endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 2$.
On désigne par $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.A –

Q 26. Expliciter la matrice de la transposition $\mathcal{T}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cette matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sera notée T.

Q 27. Justifier sans calcul que T est diagonalisable

Q 28. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\mathcal{T}$.

On se donne deux éléments P et Q de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Q 29. Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi_{P,Q}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix},$$

où U est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.

BY-NC-SA

On suppose dans la suite de cette partie que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang.

IV.B –

Q 30. Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 31. Déterminer les rangs de $\Phi(B_1)$, $\Phi(B_4)$, $\Phi(B_1+B_4)$. En déduire l'existence de deux matrices P_1 et Q_1 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, telles que :

$$\Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi(B_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi(B_4)=\begin{pmatrix}0&0\\\alpha&\beta\end{pmatrix}$$

où α et β sont des réels tels que $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

On adopte alors les notations suivantes : $\Phi'=\Phi_{P_1,Q_1}\circ\Phi$, $M'=\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}}(\Phi')$.

Pour tout $j\in\{1,2,3,4\}$, $B'_j=\Phi'(B_j)$ et $C_j=(a_j,b_j,c_j,d_j)^\top$ désigne la j-ième colonne de la matrice M'.

Q 32. Déterminer C_1 et C_4.

Q 33. Démontrer que $\forall i\in\{1,2,3,4\}$, $a_id_i-b_ic_i=0$.

Q 34. En considérant le rang des matrices $B'_1+B'_2$ et $B'_1+B'_3$, démontrer que $d_2=d_3=0$.

On déduit des deux questions précédentes que $b_2c_2=b_3c_3=0$.

IV.C – On suppose dans cette sous-partie que $c_2=0$.

Q 35. En étudiant $\det(M')$, démontrer que les nombres b_2, c_3, d_4 sont tous trois non nuls.

Q 36. En utilisant les résultats de la question précédente et en considérant les rangs des matrices $B'_3+B'_4$, $B'_2+B'_4$ et $B'_1+B'_2+B'_3+B'_4$, démontrer que

$$M'=\begin{pmatrix}1&a_2&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&c_3&c_4\\0&0&0&d_4\end{pmatrix}$$

avec $c_4=a_2c_3$ et $d_4=b_2c_3$.

Q 37. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_1$.

IV.D – On suppose à présent que $c_2\neq0$.

Q 38. Démontrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi'\circ\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à

$$\begin{pmatrix}1&a_3&a_2&0\\0&b_3&0&0\\0&c_3&c_2&c_4\\0&0&0&d_4\end{pmatrix}.$$

Q 39. Démontrer que $c_3=0$.

Q 40. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_2$.

On a ainsi démontré, pour $n=2$, qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il appartient à $\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$.

On admet que ce résultat est encore valable lorsque n est un entier strictement supérieur à 2.

V Endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le déterminant ou le polynôme caractéristique

V.A – On suppose dans cette sous-partie que $n=2$ et que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le déterminant.

On considère une matrice A non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi(A)=0_2$.

Q 41. Montrer que A est de rang 1.

La partie III assure l'existence de deux éléments P et Q de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$A=PJ_{2,1}Q.$$

On pose alors $N=P(I_2-J_{2,1})Q$.

Q 42. En calculant de deux manières différentes $\det(A+N)$, aboutir à une absurdité et conclure que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

Q 43. En discutant selon les valeurs possibles du rang, démontrer que Φ conserve le rang.

On a ainsi démontré que tout endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang. On admet que ce résultat s'étend au cas où n est un entier naturel non nul quelconque.

Q 44. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant.

V.B – On revient au cas général où n est un entier naturel non nul.

V.B.1) Propriétés de la trace

Q 45. Démontrer que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array}\right.$$

est une forme linéaire vérifiant

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Q 46. Montrer que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}(A^\top B) \end{array}\right.$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 47. En déduire que, si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{tr}(AM) = 0,$$

alors $A = 0$.

V.B.2) Application à la caractérisation des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le polynôme caractéristique

Q 48. Démontrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve le polynôme caractéristique conserve également le déterminant et la trace.

Q 49. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI 2023

4 heures Calculatrice autorisée

Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Q 4. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

Q 7. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 8. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Q 9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n.

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

BY-NC-SA

Q 10. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{R}$, $f_n(y)=\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

Q 11. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y\in\mathbb{R}$, préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$.

Pour $x\in\,]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ on pose $q(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

Q 12. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on convient de noter également q.

Q 13. Démontrer que, pour tout $x>-1$, $q(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u$.

Q 14. En déduire que q est une fonction décroissante sur $]-1,+\infty[$ et démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\forall y\in\mathbb{R}^+,\quad f_n(y)\leqslant(1+y)\mathrm{e}^{-y}\qquad\text{et}\qquad \forall y\in\mathbb{R}^{-*},\quad f_n(y)\leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

Q 15. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

II.C – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n=\frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}\qquad v_n=\ln(u_n)\qquad w_n=v_{n+1}-v_n.$$

Q 16. Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

II.C.1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

Q 17. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n\geqslant n_0,\quad (1-\varepsilon)b_n\leqslant a_n\leqslant(1+\varepsilon)b_n.$$

Q 18. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Q 19. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n^2}$.

Q 20. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n\to+\infty$.

II.C.3)

Q 21. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n\to+\infty$.

Q 22. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right).$$

BY-NC-SA

III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in]0, 1[\text{ et } q = 1 - p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

L'abscisse S_n du point à l'issue du n-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geqslant 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$).

On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \quad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

III.A –

Q 23. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.

Q 24. Écrire une fonction Python qui prend en argument le nombre n de lancers et renvoie le nombre de retours au point à l'origine.

> On pourra utiliser la fonction Python `random.random()` qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

Q 25. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

Q 26. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

Q 27. Pour quelles valeurs de p l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$?

Q 28. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

III.B –

Q 29. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

Q 30. En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de x elle est valable.

BY-NC-SA

Q 31. Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$ pour x dans un intervalle à préciser.

Q 32. Pour quelles valeurs de p l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

III.C –

Q 33. En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p-q|$.

IV Loi de l'arcsinus

Dans cette partie, on reprend les notations de la partie III et on se place dans le cas particulier $p = q = 1/2$. Dans ce cas tous les « chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \mathbb{P}\big([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \cdots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n]\big) = \frac{1}{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse désormais au moment de la *dernière visite* en 0 de la marche aléatoire au cours des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire T_n définie par

$$T_n = \max\big\{0 \leqslant k \leqslant 2n \;\big|\; S_k = 0\big\}.$$

On admet dans la suite que T_n est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

IV.A – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *chemin de longueur* n toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0)$, $(1, S_1)$, ..., (n, S_n).

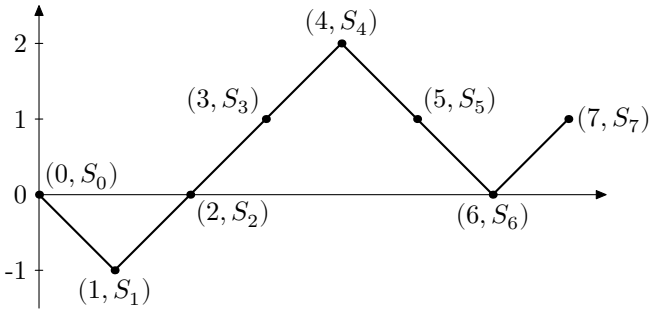


Figure 1 Un chemin de longueur 7

Dans cette sous-partie IV.A, n, x et y sont des entiers naturels tels que $n \neq 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

IV.A.1) On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0, 0)$ au point (n, x).

Q 34. Vérifier que si $x \in [\![-n, n]\!]$ et $n - x$ est un entier pair alors

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n+x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

Q 35. En déduire $\mathbb{P}(S_n = x)$.

Q 36. Retrouver ce résultat à l'aide d'une variable aléatoire bien choisie.

IV.A.2) Principe de réflexion

Q 37. Montrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à (n, y), tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à (n, y).

IV.A.3)

Q 38. En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}.$$

BY-NC-SA

Q 39. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]\big) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k-1) - \mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k+1)\Big).$$

Q 40. En remarquant que $[S_{2n} > 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [S_{2n} = 2k]$, démontrer que

$$\mathbb{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

puis que

$$\mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]\big) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

IV.B – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 41. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]\big).$$

Q 42. En déduire que pour $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}.$$

IV.C – Dans cette sous-partie IV.C α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$.

Q 43. On définit la fonction f par $f(t) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[\\ \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\beta) & \text{si } t \in]\beta, 1]. \end{cases}$

En utilisant des sommes de Riemann adaptées à f, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t.$$

Q 44. À l'aide de la partie II justifier qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 1 telle que

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{8n}\right).$$

Q 45. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) = 0.$$

Q 46. Montrer alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi}\Big(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha})\Big).$$

Ce résultat a des conséquences assez surprenantes au premier abord. Par exemple $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ *s'interprète ainsi : si deux personnes parient chacune un euro chaque jour de l'année à un jeu de hasard équilibré, alors avec la probabilité* $1/2$*, un des deux joueurs sera en tête du premier juillet au 31 décembre.*

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2023

4 heures

Calculatrice autorisée

L'objectif de ce sujet est d'établir le théorème de Perron-Frobenius pour une certaine classe de matrices symétriques. Ce théorème étudie les espaces propres d'une matrice associés aux valeurs propres de module maximal. Une application, en conclusion, montre une ouverture à l'analyse spectrale des matrices à coefficients positifs.

— La partie I permet d'obtenir des résultats préliminaires, utiles pour les parties suivantes.

— La partie II examine, à titre d'exemple, le cas des matrices à coefficients strictement positifs de taille deux.

— La partie III s'intéresse au lien entre le rayon spectral d'une matrice et le comportement asymptotique de la suite de ses puissances successives ; elle est indépendante de la partie II.

— La partie IV donne une démonstration du théorème pour une classe de matrices symétriques à coefficients positifs ; elle est indépendante des parties II et III.

Notations et définitions

$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

— On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

— Si $A = (A_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $|A|$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $|A_{ij}|$ $(1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p)$.

— Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). La notation $A \geqslant 0$ (respectivement $A > 0$) signifie que la matrice A est positive (respectivement strictement positive).

— Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $A \geqslant B$ (respectivement $A > B$) signifie que la matrice $A - B$ est positive (respectivement strictement positive). De même, la notation $A \leqslant B$ (respectivement $A < B$) signifie que la matrice $B - A$ est positive (respectivement strictement positive).

— Les propriétés suivantes pourront être librement utilisées (sous réserve que les opérations correspondantes puissent être envisagées) :

- $|A + B| \leqslant |A| + |B|$;
- $|A^\top| = |A|^\top$;
- si $\gamma \in \mathbb{K}$, alors $|\gamma A| = |\gamma||A|$;
- si $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, alors $AB \geqslant 0$.

— On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini, pour tous vecteurs X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par

$$(X \mid Y) = X^\top Y = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

La norme euclidienne (associée à ce produit scalaire) du vecteur X est alors donnée par

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X} = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right)^{1/2}.$$

— Le spectre d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{sp}(A)$.

— Le rayon spectral d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

— On dit qu'une norme $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est sous-multiplicative si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

BY-NC-SA

I Résultats préliminaires

Q 1. Soit n un entier naturel, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{si } A > 0, X \geqslant 0 \text{ et } X \neq 0, \text{ alors } AX > 0,$$

et que

$$|AB| \leqslant |A||B|.$$

Q 2. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que si n est un entier naturel et $z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k||w_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)^{1/2}.$$

Q 3. Soit z un nombre complexe tel que $|1+z| = 1+|z|$. Montrer que $z \in \mathbb{R}_+$. En déduire que, si z et z' sont deux nombres complexes vérifiant $|z+z'| = |z| + |z'|$ et $z \neq 0$, alors

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid z' = \alpha z.$$

Q 4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $z_1, ..., z_n$ des nombres complexes non tous nuls tels que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Montrer que

$$\exists\, \theta \in \mathbb{R} \mid \forall k \in [\![1, n]\!], z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|z_k|.$$

> Dans le cas où $z_1 \neq 0$, on pourra appliquer le résultat de la question précédente aux couples (z_1, z_k) pour $k \in [\![2, n]\!]$.

II Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit a, b, c et d des nombres réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Q 5. Exprimer le discriminant Δ du polynôme caractéristique de A en fonction de a, b, c et d.

Q 6. Montrer que $\Delta > 0$. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ, vérifiant $\lambda < \mu$, tels que A soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Q 7. Montrer que $|\lambda| < \mu$.

Q 8. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice L non nulle si et seulement si $\mu = 1$. En cas de convergence, préciser le rang de L puis montrer que L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

Q 9. Soit α et β deux réels de $]0, 1[$ et B la matrice $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$. Montrer que B est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$ et donner une matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $B = SDS^{-1}$.

Q 10. En déduire que la suite $(B^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice Λ que l'on explicitera.

III Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; rayon spectral

III.A – Exemples de normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pour toute matrice $A = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|\right) \qquad \text{et} \qquad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Q 11. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 12. On admet que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que cette norme est sous-multiplicative.

BY-NC-SA

Q 13. Soit N une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on définit une norme sous-multiplicative ν sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $\nu(A) = N(S^{-1}AS)$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.B – Rayon spectral

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.B.1)

Q 14. Soit S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.

Q 15. Justifier que A est trigonalisable. Comparer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A^k)$ et $\rho(A)^k$ et, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A)$ et $\rho(A)$.

Q 16. Montrer que, pour toute norme N sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leqslant N(A)$.

On pourra fixer une valeur propre λ de A et mettre en évidence une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AH = \lambda H$.

III.B.2)

Le but de cette section est de montrer que, pour tout réel strictement positif $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sous-multiplicative (dépendant de A et de ε), telle que

$$N(A) \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

À cette fin, on introduit, pour tout réel strictement positif τ, la matrice diagonale

$$D_\tau = \mathrm{diag}(1, \tau, ..., \tau^{n-1})$$

et on considère une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 17. Calculer le produit $D_\tau^{-1} T D_\tau$ en précisant, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'expression du coefficient en position (i,j) de la matrice $D_\tau^{-1} T D_\tau$ en fonction de τ et des coefficients de la matrice T.

Q 18. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\tau| \leqslant \delta$, on a $\|D_\tau^{-1} T D_\tau\|_\infty \leqslant \rho(T) + \varepsilon$.

Q 19. Conclure.

III.B.3)

Q 20. Utiliser ce qui précède pour montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.

IV Théorème de Perron-Frobenius pour une classe de matrices symétriques positives

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive (c'est-à-dire à coefficients positifs ou nuls). On pose $r = \rho(A)$.

IV.A –

Q 21. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire des sous-espaces propres de A ?

Q 22. Montrer que $r > 0$.

On note μ la plus grande valeur propre de A.

Q 23. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, unitaire pour la norme euclidienne canonique,

$$X^\top A X \leqslant \mu.$$

On pourra faire le calcul dans une base orthonormée convenablement choisie.

Q 24. Montrer que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

Q 25. Montrer que, pour tout vecteur unitaire X,

$$|X^\top A X| \leqslant |X|^\top A |X| \leqslant \mu.$$

Q 26. En déduire que, pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| \leqslant \mu$, et que $\mu = r$.

IV.B –

Dans cette sous-partie uniquement, on suppose en outre que A est strictement positive.

Q 27. Montrer que, si X est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, alors $|X|$ est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, et que $|X| > 0$.

Q 28. Montrer que $X = |X|$ ou $X = -|X|$.

Q 29. Montrer que le sous-espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1.

On pourra raisonner par l'absurde en considérant deux vecteurs propres de A orthogonaux associés à r.

BY-NC-SA

Q 30. Montrer que la multiplicité de r, en tant que valeur propre, vaut 1 et en déduire que $-r$ n'est pas valeur propre de A.

Ainsi, r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.

Q 31. Montrer que cette propriété n'est pas forcément vérifiée si A est seulement supposée positive.

On pourra chercher des exemples dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

IV.C –

On suppose dans cette sous-partie qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que A^p est strictement positive.

D'après la question 26, r est une valeur propre de A.

Q 32. Montrer que l'espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1, engendré par un vecteur strictement positif.

Q 33. Montrer que r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.

On pourra distinguer deux cas suivant la parité de p.

IV.D – Une application : un théorème de Ky Fan

On admet que les résultats obtenus pour les matrices symétriques strictement positives, ou positives admettant une puissance strictement positive, restent vrais pour une matrice strictement positive. Ainsi, si B est une matrice strictement positive, alors $\rho(B)$ est l'unique valeur propre de B de module maximal, elle est de multiplicité 1 en tant que valeur propre et son espace propre est de dimension 1.

Soit $A = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (B_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice strictement positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 34. Montrer que

$$\mathrm{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}| \right\}.$$

On suppose que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $|A_{ij}| \leqslant B_{ij}$.

Q 35. Montrer que

$$\mathrm{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\; |z - A_{ii}| \leqslant \rho(B) - B_{ii} \Big\}.$$

On pourra considérer un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ de B, strictement positif, associé à la valeur propre $\rho(B)$, et utiliser la matrice $D^{-1}AD$, où $D = \mathrm{diag}(X_1, ..., X_n)$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2023

4 heures

Calculatrice autorisée

Notations

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficient réels.

$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.

Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On a $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi, $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

I Utilisation de séries entières

I.A – Une première formule

Q 1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

Q 2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

Q 3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \tag{I.1}$$

I.B – Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

Q 4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $]-1,1[$.

Q 5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0,\dots,H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

Q 6. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

Q 7. Pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

Q 8. Écrire une fonction Python `alpha` qui prend un couple d'entiers (k,j) en paramètre et qui renvoie la valeur de $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction `binome` telle que `binome(n, k)` renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

BY-NC-SA

Q 9. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}.$$

Q 10. À l'aide de la fonction Python `alpha`, écrire une fonction Python `P` qui prend l'entier k en paramètre et qui renvoie la liste des coefficients de degré 0 à k de P_k.

Q 11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

Q 12. Calculer explicitement P_2 et P_3.

Q 13. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

Q 14. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

Q 15. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k.

I.C – Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

Q 16. Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Q 17. Montrer que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{I.2}$$

Q 18. En déduire que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).$$

Q 19. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}. \tag{I.3}$$

II Étude de sommes doubles

On considère dans cette partie des familles de nombres réels indexées par $\mathbb{N}^2$ c'est-à-dire du type $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$. Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsqu'elles sont définies, sont nécessairement égales.

On rappelle et on admet les deux résultats suivants.

• Si $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, alors les deux sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent dans $[0,+\infty]$ et sont égales. En particulier (cas d'une famille sommable de réels positifs), si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.

• (Cas d'une famille sommable de réels quelconques.) Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|$ est finie, alors les sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

BY-NC-SA

II.A – Applications

II.A.1) Une première application

Soit $x \in]-1,1[$.

Q 20. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$.

Q 21. Montrer que la série $\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

II.A.2) Une seconde application

On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Q 22. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.

Q 23. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

II.B – Contre-exemples

II.B.1) Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$

Q 24. Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q 25. Montrer l'existence de $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q 26. A-t-on $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

II.B.2) Un second contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$

Q 27. Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

Q 28. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

Q 29. Quelle est la nature de la série $\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?

III Probabilités

Dans cette troisième partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

BY-NC-SA

III.A – Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi de Poisson de paramètre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

Q 30. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

Q 31. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{(1-p)k!} f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right),$$

où f_k est la fonction définie en I.B.

Q 32. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$.

Q 33. Montrer que Y admet une espérance finie et calculer cette espérance.

Q 34. Montrer que Y admet une variance et calculer cette variance.

III.B – Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne face ».

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par

— A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;

— B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.

Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ».

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements, et que C est un événement.

Q 35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.

Q 36. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles.

Q 37. Montrer que C est un événement et que $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Q 38. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

Q 39. À l'aide notamment de la formule (I.3), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$

Q 40. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule (I.2)).

Q 41. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

TSI

2023

4 heures

Calculatrice autorisée

Ce problème étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions et l'applique à la résolution d'équations et de systèmes différentiels.

Notations

— On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs complexes.

On admet que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

— Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge. On admet que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Articulation des parties

Le résultat de la partie I est utilisé dans les parties II et III. Certains résultats de la partie II sont utilisés dans la partie IV. Les parties II et III sont indépendantes.

I Question préliminaire

Q 1. Démontrer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées :

> Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\lim_{t\to+\infty}\big(u(t)v(t)\big)$ existe, alors les intégrales $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. En cas de convergence,
>
> $$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$
>
> où $\Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0)$.

II Transformée de Laplace, généralités

II.A –

Q 2. Montrer que, si une fonction f appartient à E alors, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge. On note alors sa valeur $F(p)$.

On définit ainsi une fonction F, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Q 3. Démontrer que l'application

$$\mathcal{L} : \left|\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & F \end{array}\right.$$

est linéaire.

$\mathcal{L}$ s'appelle la *transformation de Laplace* et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f.

II.B – Quelques exemples

Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

II.B.1) Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$.

Q 4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$.

On note alors $F_n = \mathcal{L}(f_n)$.

BY-NC-SA

Q 5. Pour tout nombre réel p strictement positif, calculer $F_0(p)$.

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.

Q 7. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,

$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

II.B.2) Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b, on note $f_{a,b}$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}bt}$.

Q 8. Montrer que $f_{a,b} \in E$ et calculer $F_{a,b} = \mathcal{L}(f_{a,b})$.

Q 9. En déduire que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\cos(bt)$ et $h_{a,b} : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}(h_{a,b})$.

II.B.3)

Q 10. Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartient à E.

Q 11. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ n'appartenant pas à E.

II.C – Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$.

Q 12. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

On suppose, en plus, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f'' \in E$ et que $\lim_{t\to+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q 13. Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

III Approximation de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment par des fonctions polynomiales

L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant :

> Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions polynomiales telle que $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{t\in[0,1]}|\varphi(t) - P_n(t)|\right) = 0$.

III.A – Une famille des fonctions polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, ..., n\}$. On note $B_n^k : \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\end{array}\right.$, où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial k parmi n.

Q 14. Donner le degré de B_n^k.

Q 15. Pour tout $t \in [0,1]$, calculer $\sum_{k=0}^n B_n^k(t)$.

III.B – Deux résultats généraux

Q 16. Montrer que, si Z est une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(Z) \geqslant 0$. En déduire que, si X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Q 17. *Question de cours.* X étant une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, rappeler la définition de sa variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et démontrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$.

Q 18. En déduire que $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$.

III.C – Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $t \in [0,1]$ et S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n,t). On pose $X_n = \varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)$.

Q 19. Rappeler la valeur de l'espérance de S_n ainsi que sa variance.

Q 20. En déduire que $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = 0$ et $\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right) = \frac{t(1-t)}{n}$.

BY-NC-SA

Q 21. En citant de manière explicite les théorèmes utilisés, montrer qu'il existe $M_\varphi \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2, \qquad |\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant M_\varphi |b-a|.$$

Q 22. En utilisant les résultats des questions 18, 21 et 16 puis 20, montrer que

$$|\mathbb{E}(X_n)| \leqslant \frac{M_\varphi}{\sqrt{n}} \sqrt{t(1-t)}.$$

Q 23. En citant le théorème utilisé, en déduire que, pour tout nombre réel $t \in [0,1]$,

$$\left| \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t) \right| \leqslant M_\varphi \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

Q 24. Justifier que la fonction

$$w : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t(1-t) \end{array} \right.$$

admet un maximum et déterminer la valeur de ce maximum.

Q 25. En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la suite $\left(\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)|\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

On admet que ce résultat, démontré dans le cas où la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, est encore valable lorsque la fonction φ est seulement continue sur $[0,1]$. Ce dernier résultat sera utilisé dans la partie IV.

IV Injectivité de la transformation de Laplace et applications

IV.A – On se propose dans cette sous-partie de démontrer que l'application $\mathcal{L}$ est injective sur E, c'est-à-dire que

$$\forall (y_1, y_2) \in E^2, \qquad \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) \implies y_1 = y_2.$$

On considère une fonction f de E vérifiant $\mathcal{L}(f) = 0$.

Pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$.

Q 26. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.

Q 27. Montrer que g est une fonction bornée.

Q 28. Justifier, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'existence de $\mathcal{L}(g)(p)$ et démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1).$$

On note φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{si } 0 < u \leqslant 1, \\ \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t & \text{si } u = 0. \end{cases}$

Q 29. Montrer que φ est continue sur le segment $[0,1]$.

Q 30. En effectuant le changement de variables $t = -\ln u$ et en citant explicitement le théorème de changement de variable dans une intégrale généralisée, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(u) u^{p-1}\,\mathrm{d}u.$$

Q 31. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \varphi(u)u^n\,\mathrm{d}u = 0$ et que, pour toute fonction P polynomiale,

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Q 32. En utilisant le résultat admis à la fin de la partie III, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions polynomiales vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t \right) = 0.$$

BY-NC-SA

Q 33. En déduire que $f = 0$.

Q 34. Démontrer que $\mathcal{L}$ est injective.

IV.B – Le but de cette sous-partie est de résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{IV.1}$$

IV.B.1) Résolution classique

Q 35. Démontrer qu'il existe une solution particulière de l'équation $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1$ de la forme $y(t) = at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Q 36. Résoudre alors le problème (IV.1).

IV.B.2) Résolution utilisant la transformation de Laplace

On suppose que y est une solution du problème (IV.1) vérifiant en plus les hypothèses de la sous-partie II.C.

Q 37. Démontrer que, pour tout réel p strictement positif, $(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2}$.

Q 38. Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \frac{1 + p + p^2}{p^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{(p + 1)^2 + 1}.$$

Q 39. En déduire une expression de $\mathcal{L}(y)$, puis de y en utilisant l'injectivité de $\mathcal{L}$ et les résultats de la sous-partie II.B.

Q 40. Réciproquement, vérifier que la fonction y ainsi trouvée est bien solution du problème (IV.1).

IV.C – Le but de cette sous-partie est de déterminer les fonctions x et y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ solutions du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 7y(t) \end{cases} \tag{IV.2}$$

et vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

IV.C.1) Résolution classique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de sorte que le système (IV.2) s'écrit matriciellement

$$X'(t) = AX(t).$$

Q 41. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telle que

$$A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Q 42. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$. Déterminer les fonctions u et v et en déduire les fonctions x et y vérifiant le système (IV.2) et les conditions initiales imposées.

IV.C.2) Résolution en utilisant la transformation de Laplace

On suppose que x et y sont solutions du problème (IV.2), vérifiant en plus les conditions de la sous-partie II.C.

Q 43. Montrer alors que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \frac{-3}{(p+1)(p+4)} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p+4)} \end{cases}$$

Q 44. Trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+4} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \frac{c}{p+1} + \frac{d}{p+4} \end{cases}$$

Q 45. En déduire une expression de x et de y.

Q 46. Établir la réciproque et conclure.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI 2023

4 heures Calculatrice autorisée

Notations et rappels

Lorsque n et p sont deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée.

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Vect}\big((u_i)_{i\in I}\big)$ le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini par l'égalité $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$, pour tous X, Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_M son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ orienté par sa base canonique, on note $u \wedge v$ le produit vectoriel des deux vecteurs u et v.

Objectif du problème et articulations entre ses différentes parties

Ce problème étudie les trajectoires de certaines équations différentielles et de certains systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

La partie I, consacrée à l'étude d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, est indépendante des parties II et III. Dans les parties II et III, on étudie des trajectoires des solutions $t \mapsto X(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de problèmes de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

selon les propriétés de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de la condition initiale X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I Une équation différentielle linéaire du second ordre

On étudie dans cette partie l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x''(t) + kx(t) = 0 \tag{I.1}$$

où x est une fonction inconnue deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, t une variable réelle et k un paramètre réel non nul.

On appelle *trajectoire* d'une solution x de (I.1) l'arc paramétré du plan défini par

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) = \big(x(t), x'(t)\big) \end{array}\right.$$

où le point $M(t)$ a pour abscisse $x = x(t)$ et pour ordonnée $y = x'(t)$.

On dit qu'une trajectoire est bornée si ses deux fonctions coordonnées sont bornées sur $\mathbb{R}$.

I.A – Conservation de l'énergie

Si x est une solution de (I.1), on appelle énergie la fonction E définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad E(t) = \frac{1}{2}\left(kx(t)^2 + x'(t)^2\right).$$

Q 1. Justifier que la fonction E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

On note $h = E(0)$.

BY-NC-SA

Q 2. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ appartient à la courbe d'équation cartésienne

$$kx^2 + y^2 = 2h.$$

I.B – Cas où k est strictement positif

Dans cette sous-partie, on suppose que k est un nombre réel strictement positif et on note ω la racine carrée positive de k. L'équation (I.1) s'écrit donc $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$.

Q 3. Donner une base de l'espace vectoriel de ses solutions et exprimer la solution correspondant aux conditions initiales $\big(x(0), x'(0)\big) = (a, b)$, où a et b sont deux réels fixés.

Q 4. Démontrer qu'il existe un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x(0) = \dfrac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos\theta$ et $x'(0) = \sqrt{2h}\sin\theta$.

Q 5. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \dfrac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t - \theta)$ et vérifier que les trajectoires sont bornées.

Q 6. Déterminer les solutions dont l'énergie est nulle.

I.C – Cas où k est strictement négatif

Dans cette sous-partie, on suppose que k est un nombre réel strictement négatif et on note ω la racine carrée positive de $-k$.

Q 7. L'équation (I.1) s'écrit donc $x''(t) - \omega^2 x(t) = 0$. Donner une base de l'espace vectoriel de ses solutions et exprimer la solution correspondant aux conditions initiales $\big(x(0), x'(0)\big) = (a, b)$, où a et b sont deux réels fixés.

Q 8. Déterminer toutes les solutions d'énergie nulle et déterminer la nature géométrique de leurs trajectoires.

Q 9. Démontrer que la seule trajectoire bornée correspond à la solution identiquement nulle.

II Étude des trajectoires de systèmes linéaires

II.A – Exemple d'un frottement visqueux en dimension 2

On considère l'équation différentielle

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0 \tag{II.1}$$

où α et ω sont des réels tels que $\alpha > \omega > 0$.

Si x est une solution de (II.1), on lui associe la fonction vectorielle

$$X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On appelle désormais *trajectoire* de x (ou de X) l'arc paramétré $t \mapsto X(t)$.

On dit que la trajectoire de x est *bornée* si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|X(t)\| \leqslant M$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, ce qui revient à dire que les deux coordonnées de X sont des fonctions bornées.

Q 10. Justifier que cette équation différentielle est équivalente au système différentiel

$$X'(t) = AX(t) \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Q 11. Préciser si la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner le cas échéant une base de vecteurs propres.

Q 12. Donner la dimension de l'espace vectoriel formé par les solutions du système différentiel $X' = AX$, où la fonction inconnue X est à valeurs dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et déterminer une base de cet espace. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (II.1) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Sont-elles bornées sur $\mathbb{R}$?

II.B – Résultats préliminaires sur le comportement des trajectoires

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et A est une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

On note w_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. On rappelle qu'il est défini en posant, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $w_A(Y) = AY$. On appelle noyau de A le noyau de l'endomorphisme w_A.

On suppose enfin que X est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

où X_0 est un vecteur dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est stable par une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement par un endomorphisme w) si pour tout $Y \in F$, on a $AY \in F$ (respectivement $w(Y) \in F$).

On admet que, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par w_A et si $X_0 \in F$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in F$.

II.B.1) On suppose, dans les deux questions qui suivent, que X_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre réelle λ.

Q 13. Démontrer que, pour tout nombre réel t, il existe un nombre réel $a(t)$ tel que $X(t) = a(t)X_0$.

On admet que la fonction a est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q 14. En déduire une expression de $X(t)$ en fonction de X_0, λ et t.

Q 15. En déduire que, si la trajectoire de X est bornée sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la condition initiale $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors 0 est la seule valeur propre réelle possible de A.

Dans toute la suite du problème, on admet le résultat suivant :

Proposition 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si la trajectoire de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

est bornée sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la condition initiale $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ ont une partie réelle égale à 0.

II.B.2) Dans cette section, on suppose que X_0 appartient à $\ker(A^2)$ mais n'appartient pas à $\ker A$.

Q 16. Démontrer que la famille (X_0, AX_0) est libre.

On admet que le plan $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$ est stable par l'endomorphisme w canoniquement associé à A et qu'il existe deux fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = a(t)X_0 + b(t)AX_0$.

Q 17. Déterminer les fonctions a et b. En déduire la nature géométrique de la trajectoire de X. Est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

II.C – Étude de certaines trajectoires pseudo-périodiques

On suppose dans toute cette sous-partie II.C que μ est un nombre réel strictement positif, que φ est un nombre réel n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ et que X_0 est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(A^2 - 2\mu\cos\varphi\, A + \mu^2 I_n)X_0 = 0.$$

On note toujours X la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Q 18. Justifier que l'équation $x^2 - 2x\mu\cos\varphi + \mu^2 = 0$, d'inconnue x, n'admet pas de racine réelle.

Q 19. En déduire que la famille (X_0, AX_0) est libre.

Comme dans la question 17, on admet que le plan $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$ est stable par l'endomorphisme canoniquement associé à A et qu'il existe deux fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^1$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = a(t)X_0 + b(t)AX_0$.

Q 20. Démontrer que les fonctions a et b sont de classe $\mathcal{C}^2$ et que

$$\begin{cases} a(0) = 1, \\ a'(0) = 0, \\ a''(t) - 2a'(t)\mu\cos\varphi + \mu^2 a(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

BY-NC-SA

Q 21. En déduire une expression de $a(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On admet que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mu t \cos\varphi}}{\mu \sin\varphi} \sin(\mu t \sin\varphi)$.

Q 22. Montrer que la fonction X est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\cos\varphi = 0$.

On suppose à présent que $\cos\varphi = 0$.

Q 23. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) = \dfrac{1}{\mu}\sin(\mu t)$.

Q 24. Calculer $\|X(t)\|^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q 25. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|X(t)\|^2\big) = 2\cos(2\mu t)\langle X_0, AX_0\rangle + \frac{1}{\mu}\sin(2\mu t)\big(\|AX_0\|^2 - \mu^2\|X_0\|^2\big).$$

Q 26. Montrer que la trajectoire de X est contenue dans un cercle de centre $(0,0)$ si et seulement si $\langle X_0, AX_0\rangle = 0$ et $\|AX_0\| = \mu\|X_0\|$.

On a montré en particulier le résultat suivant qu'on pourra utiliser dans la suite du problème :

Proposition 2

Si X est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

et si X_0 appartient au noyau d'une matrice de la forme $A^2+\mu^2 I_n$, avec $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$, alors la trajectoire de X est dans le plan $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$. Cette trajectoire est tracée dans un cercle du plan $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$ si et seulement si $\langle X_0, AX_0\rangle = 0$ et $\|AX_0\| = \mu\|X_0\|$.

III Étude des trajectoires sphériques

III.A – Cas des matrices antisymétriques

III.A.1)

Q 27. Démontrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout couple (X,Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$,

$$X^\top A Y = Y^\top A^\top X.$$

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *antisymétrique* si $A^\top = -A$.

Q 28. Démontrer que si la matrice A est antisymétrique alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top A X = 0.$$

III.A.2)

Réciproquement, on suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top A X = 0$.

Q 29. Démontrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = -A^\top X$.

On pourra calculer de deux manières différentes $(X+Y)^\top A(X+Y)$.

Q 30. En déduire que la matrice A est antisymétrique.

III.A.3)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une solution de classe $\mathcal{C}^1$ du système différentiel $X'(t) = AX(t)$. On dit que la trajectoire de X est *sphérique* s'il existe $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $r \geqslant 0$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|X(t) - Z\| = r$.

Q 31. On suppose que A est une matrice antisymétrique. Étudier la fonction $t \mapsto \|X(t)\|^2$ et en déduire que la trajectoire de X est sphérique.

III.B – Caractérisation du cas où les trajectoires sont sphériques en dimension 2

Dans cette sous-partie, on suppose que $n = 2$ et on suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est non nulle et que les trajectoires du système différentiel $X' = AX$ sont sphériques, quelle que soit la condition initiale X_0.

BY-NC-SA

Q 32. Justifier que 0 est la seule valeur propre réelle possible pour la matrice A.

On pourra utiliser le résultat de la question 15.

Q 33. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Justifier que la matrice A est trigonalisable et que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. En utilisant le résultat des questions 16 et 17, démontrer que $\ker A = \ker A^2$ et aboutir à une contradiction.

Q 34. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et qu'il existe un nombre réel μ non nul tel que $A^2 = -\mu^2 I_2$.

On pourra utiliser le résultat de la proposition 1.

Q 35. Étant donné un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, justifier l'égalité $\langle X_0, AX_0\rangle = 0$.

On pourra considérer la trajectoire de la solution du système $X'(t) = AX(t)$ vérifiant la condition initiale $X(0) = X_0$ et utiliser le résultat de la proposition 2.

Q 36. En déduire que toutes les trajectoires du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont sphériques si et seulement si la matrice A est antisymétrique.

III.C – Systèmes différentiels à trajectoires sphériques en dimension 3

Dans cette sous-partie, on suppose que $n = 3$ et que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est orienté par sa base canonique.

On dit qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est antisymétrique si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est antisymétrique.

Q 37. On considère un vecteur $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ non nul dans $\mathbb{R}^3$. Démontrer que l'application

$$f_\omega : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & \omega \wedge x \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que cet endomorphisme est antisymétrique.

On considère un vecteur v non nul dans $\mathbb{R}^3$ et orthogonal à ω. On admet que l'application

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & \omega \wedge x + \langle x, \omega\rangle v \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On considère une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = g\big(X(t)\big)$, c'est-à-dire $X'(t) = \omega \wedge X(t) + \langle X(t), \omega\rangle v$.

L'objectif des questions suivantes est de montrer que la trajectoire de X est sphérique.

Q 38. Pour tous vecteurs x, y et z dans $\mathbb{R}^3$, montrer l'égalité $x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$.

On pourra, par exemple, considérer d'abord le cas où la famille (y, z) est liée. Puis, lorsqu'elle est libre, on pourra considérer une base orthonormée (e_2, e_3) du plan $\mathrm{Vect}(y, z)$ choisie de manière à écrire $y = y_2 e_2$ et $z = z_2 e_2 + z_3 e_3$, où y_2, z_2 et z_3 sont des réels. On posera alors $e_1 = e_2 \wedge e_3$ et on écrira $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, où x_1, x_2, x_3 sont des réels.

Q 39. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\langle X(t), \omega\rangle\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et en déduire qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\langle X(t), \omega\rangle = K$.

Q 40. On pose $\alpha = \dfrac{K}{\|\omega\|^2}$ et $a = \alpha(\omega + \omega \wedge v)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|X(t) - a\|^2 = \|X(t)\|^2 - 2\alpha\langle X(t), \omega \wedge v\rangle + C.$$

Q 41. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|X(t) - a\|^2\big) = 2\langle X(t), \omega\rangle\langle X(t), v\rangle - 2\alpha\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v\rangle$.

Q 42. En interprétant $\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v\rangle$ comme un déterminant, justifier l'égalité $\langle \omega \wedge X(t), \omega \wedge v\rangle = \langle X(t), v\rangle\|\omega\|^2$.

Q 43. En déduire que la trajectoire de X est sphérique.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP, MPI

4 heures Calculatrice autorisée

2024

Inégalité de Carleman

On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, alors la série de terme général $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Le problème est constitué de trois parties largement indépendantes. La première partie commence en démontrant un analogue intégral de cette inégalité : l'inégalité de Knopp. La deuxième partie s'intéresse à la démonstration originale de l'inégalité de Carleman, utilisant du calcul différentiel. Enfin, la troisième partie étudie l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

I Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carleman (on justifie cette appellation en fin de partie).

I.A – Deux inégalités intégrales

I.A.1) Inégalité intégrale de Jensen

Q 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J. Démontrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann.

I.A.2) Une autre inégalité intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux, strictement positive et intégrable.
Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

Q 3. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Notant $\mathbb{1}_{[0,x]}$ la fonction indicatrice de $[0,x]$, on pourra remarquer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}tf(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 4. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

I.B – Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue par morceaux, strictement positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Q 5. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

BY-NC-SA

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pourra remarquer que $\ln(f(t)) = \ln(tf(t)) - \ln(t)$.

Q 6. En déduire que $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

I.C – Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs. On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

Q 7. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par

$$\begin{cases} v_k(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \dfrac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k) & \text{si } k \geqslant 2 \\ v_1(x) = \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

Q 8. Démontrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \geqslant \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right).$$

On pourra utiliser la question précédente.

Q 9. En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

Q 10. Expliquer comment on peut retirer l'hypothèse de décroissance.

II Inégalité de Carleman

On démontre dans cette partie l'inégalité de Carleman d'une manière indépendante de la partie I.
La sous-partie II.A établit l'inégalité arithmético-géométrique avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la sous-partie II.B pour démontrer l'inégalité de Carleman.
La sous-partie II.B est indépendante de II.A. L'inégalité arithmético-géométrique sera utilisée dans la partie III.
Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note U_n l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$, est $(\mathbb{R}_+)^n$.

II.A – Inégalité arithmético-géométrique

Soit $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur $\overline{U_n}$ en posant, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \overline{U_n}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{et} \qquad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - s.$$

On note X_s le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s : $X_s = \{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\}$.

Q 11. On admet que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n. Donner l'expression de leur gradient en un point $x = (x_1, ..., x_n)$ de U_n.

Q 12. Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est en fait atteint sur $X_s \cap U_n$.

On pourra vérifier que f est strictement positive en certains points de $X_s \cap U_n$.

On note $a = (a_1, ..., a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.

Q 13. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{f(a)}{\lambda}$.

Q 14. Démontrer alors que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in U_n \cap X_s$, $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique

BY-NC-SA

$$\forall (x_1,...,x_n)\in(\mathbb{R}_+)^n,\qquad \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

II.B – Démonstration de l'inégalité de Carleman

On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1,...,x_n)\in\overline{U_n},\qquad F_n(x_1,...,x_n)=x_1+(x_1x_2)^{1/2}+(x_1x_2x_3)^{1/3}+\cdots+(x_1\cdots x_n)^{1/n}.$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1,...,x_n)\in\overline{U_n},\qquad h_n(x_1,...,x_n)=x_1+\cdots+x_n-1.$$

On admet que F_n et h_n sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n.

On note H_n l'ensemble $H_n=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+\cdots+x_n=1\}$.

Q 15. Déterminer le gradient de F_n et le gradient de h_n en tout point de U_n.

Q 16. Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n}\cap H_n$ admet un maximum.

On admet que le maximum de F_n est en fait atteint sur $U_n\cap H_n$.

On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n}\cap H_n$ et on note $(a_1,...,a_n)$ un point de $U_n\cap H_n$ en lequel il est atteint.

Pour k entre 1 et n, on note $\gamma_k=(a_1a_2\cdots a_k)^{1/k}$.

Q 17. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda>0$ tel que

$$\begin{cases}\gamma_1+\dfrac{\gamma_2}{2}+\cdots+\dfrac{\gamma_n}{n}=\lambda a_1\\ \qquad\dfrac{\gamma_2}{2}+\cdots+\dfrac{\gamma_n}{n}=\lambda a_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad\dfrac{\gamma_n}{n}=\lambda a_n\\ a_1+a_2+\cdots+a_n=1\end{cases}$$

Q 18. En déduire que :

a) $\lambda=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n=M_n$;

b) pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $\gamma_k=\lambda\omega_k a_k$, où

$$\begin{cases}\omega_k=k\left(1-\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right)\text{ si }k\in[\![1,n-1]\!]\\ \omega_n=n\end{cases}$$

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda\leqslant \mathrm{e}$. On suppose par l'absurde que $\lambda>\mathrm{e}$.

Q 19. Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant\left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$.

Q 20. Démontrer que $\omega_1\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et que, pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $\omega_k\leqslant\dfrac{k}{k+1}$.

On pourra démontrer, pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, que $\omega_{k+1}^{k+1}=\dfrac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1-\dfrac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$.

Q 21. Aboutir à une contradiction sur ω_n. En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1,...,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1+\cdots+x_n=1$,

$$\sum_{k=1}^n(x_1x_2\cdots x_k)^{1/k}\leqslant\mathrm{e}.$$

Q 22. En déduire l'inégalité de Carleman.

III Inégalité de Carleman-Yang

Le but de cette dernière partie est d'établir l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

III.A – Un développement en série entière

Soit φ la fonction définie par

$$\forall t\in\,]-1,1[\,\setminus\{0\},\qquad \varphi(t)=(1-t)^{1-1/t}.\tag{III.1}$$

BY-NC-SA

On définit aussi la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} b_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} b_{n-k} \end{cases}$$

Q 23. Justifier que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0. On notera toujours φ ce prolongement.

Q 24. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $|b_n| \leqslant 1$. En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} b_k t^k$.

Q 25. Démontrer que, pour tout t dans $]-1,1[$, $\varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$, où

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \psi(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} t^n, \tag{III.2}$$

puis que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\varphi^{(n)}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2} \binom{n-1}{k} \varphi^{(n-k-1)}(0).$$

Q 26. Conclure alors que

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right). \tag{III.3}$$

III.B – Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

Q 27. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}.$$

Q 28. En considérant $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, en déduire l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n.$$

Q 29. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $b_n \geqslant 0$. En quoi l'inégalité précédente est-elle un raffinement de l'inégalité de Carleman ?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

MP, MPI

4 heures

Calculatrice autorisée

2024

Notations

— Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d.

— On note $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Objectifs du problème

Soit h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si

$$\forall x \in \mathbb{K},\ f(x+1) - f(x) = h(x). \qquad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h).

La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.
La partie II introduit la définition et établit quelques propriétés des fonctions entières.
La partie III définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h), ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.
La partie IV étend la résolution de (E_h) au cas où h est une fonction entière.

I Étude de l'opérateur différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

Q 1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

Q 3. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ.

Q 4. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_d)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Q 5. En déduire $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.

Q 6. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h).

Q 7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme annulateur de Δ_d. L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable ?

BY-NC-SA

II Fonctions entières

On note ω l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0,1]$, par $\omega(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}$.

II.A – Généralités

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développables en série entière de rayon de convergence infini.

Q 8. Justifier que si $(f,g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}$ et $fg \in \mathcal{E}$.

Q 9. Soit $f \in \mathcal{E}$ dont on note $\sum a_n z^n$ le développement en série entière.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II.B – Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Q 10. Vérifier que cette intégrale est bien définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Q 11. Montrer qu'il existe une fonction $\beta \in \mathcal{E}$ et une constante $C \in]0,1[$ telles que, pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$,

$$\mathrm{e}^{\zeta} - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta)) \quad \text{et} \quad |\beta(\zeta)| \leqslant C.$$

Q 12. En déduire que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\zeta^p}{\mathrm{e}^{\zeta} - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j.$$

Q 13. Montrer que $I_0 = 1$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = 0$.

III Polynômes de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\omega(t)}}{(\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1)\omega(t)^{n-1}}\mathrm{d}t.$$

III.A – Lien avec l'équation (E_h)

Q 14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}.$$

En déduire que B_n est un polynôme unitaire de degré n.

Q 15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$.

Q 16. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}.$$

Q 17. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

BY-NC-SA

III.B – Unicité

Q 18. Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

Q 19. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = B_n$.

III.C – Une application analytique

Soit ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit de plus u la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x,t) = \psi(x)\mathrm{e}^{tx}.$$

Q 20. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q 21. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A_n(t) = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)$.

Q 22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = B_n$.

IV Solution entière de l'équation (E_h)

IV.A – Une inégalité de contrôle

On se propose dans cette partie de montrer par l'absurde la propriété $\mathcal{P}$:

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, (|z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^z - 1| \geqslant c)\,.$$

On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.

Q 23. Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et d'une suite de nombres complexes $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\mathrm{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\to} 1 \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ |z_p| = (2n_p+1)\pi$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $a_p = \mathrm{Re}(z_p)$ et $b_p = \mathrm{Im}(z_p)$.

Q 24. Montrer que $a_p \underset{p\to+\infty}{\to} 0$ et $|z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\to} 0$.

Q 25. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$\varepsilon_p = \begin{cases} +1 \text{ si } b_p \geqslant 0 \\ -1 \text{ si } b_p < 0 \end{cases}$$

En étudiant $\exp(z_p - \mathrm{i}\varepsilon_p|z_p|)$, aboutir à une contradiction et conclure.

BY-NC-SA

IV.B – Une solution à (E_h)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit maintenant

$$\gamma_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto (2n+1)\pi e^{2\mathrm{i}\pi t} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, soit

$$Q_n(z) = n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1)\,\gamma_n(t)^{n-1}} \mathrm{d}t.$$

Q 26. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathcal{E}$.

Q 27. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad Q_n(z+1) - Q_n(z) = nz^{n-1}.$$

Q 28. Montrer qu'il existe deux constantes a, $b \in \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|Q_n(z)| \leqslant a\mathrm{e}^{bn|z|}.$$

Q 29. En déduire l'existence d'une solution dans $\mathcal{E}$ à l'équation (E_h) lorsque $h \in \mathcal{E}$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2024

Notations

— On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

— Tout au long du sujet, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sera identifié à sa fonction polynomiale.

— Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue est dite intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge.

— Pour une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle $\mathrm{vect}(\mathrm{P_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N})$ l'espace vectoriel engendré par cette famille, c'est à dire :

$$\mathrm{vect}(\mathrm{P_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}) = \left\{ \mathrm{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \exists (\mathrm{a_0}, ..., \mathrm{a_N}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}+1}, \mathrm{g} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{a_k P_k} \right\}$$

Le sujet illustre des applications du calcul de l'intégrale de Gauss dans différents domaines.

La partie I est consacrée au calcul de cette intégrale.

La partie II est consacrée à la résolution d'une équation différentielle du second ordre à l'aide des séries entières. Elle utilise le résultat final de la partie I. Elle est totalement indépendantes des deux parties suivantes.

La partie III est consacrée à l'étude d'un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}[X]$ et d'une suite de polynômes orthogonaux associés à cet endomorphisme. Elle est indépendante de la partie II.

La partie IV est consacrée à montrer des propriétés sur la famille de polynômes construite à la partie III. Le but est d'établir que c'est une famille totale d'un espace préhilbertien. Ce résultat est en fait un résultat général dans la théorie des espaces de Hilbert.

I Partie I : Intégrale de Wallis et Intégrale de Gauss

I.A – On définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$.

Q 1. Étudier la monotonie de la suite (W_n).

Q 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Q 3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Q 4. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

I.B – On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Q 5. Justifier l'existence de I.

Q 6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n dx = I$.

BY-NC-SA

Q 7. En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin u$, après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

Q 8. En déduire la valeur de I puis de J.

II Partie II : Autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{II.1}$$

II.A –

Q 9. Déterminer les solutions développables en série entière de II.1 sur $\mathbb{R}[X]$.

Q 10. Démontrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée S, telle que $S(0) = 1$.

II.B – On définit, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\,dt$.

Q 11. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Q 12. Montrer que G est solution de II.1 sur $\mathbb{R}$.

Q 13. Montrer que $G = S$.

III Partie III : Étude d'un endomorphisme sur un espace préhilbertien

III.A – Les polynômes d'Hermite.

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{x}^2}\mathrm{w}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x})$, où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.

En particulier : $H_0(x) = 1$.

Q 14. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}, H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.

Q 15. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

Q 16. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, H_n$ est un polynôme de degré n dont vous déterminerez la parité.

Q 17. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de H_n.

III.B – Un produit scalaire.

On note E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)e^{-x^2}\,dx$ converge.

Q 18. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel contenant $\mathbb{R}[X]$.

Q 19. On note $\langle .,. \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui à tout $(f,g) \in E^2$ associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$.

Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.

BY-NC-SA

On notera ||.|| la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

III.C – Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

Q 20. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\left\langle P', H_{n-1} \right\rangle = \langle P, H_n \rangle ,$$

Q 21. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $(P \mid H_n) = 0$.

Q 22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, ..., H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q 23. Montrer : $\|H_n\|^2 = \left\langle H_n^{(n)}, H_0 \right\rangle$.

Q 24. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

III.D – Étude d'un endomorphisme autoadjoint

On note u, v, w les applications définies de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par :

$$u(P) = -P'' + 2\mathrm{XP}' + \mathrm{P}, \quad \mathrm{v(P)} = 2\mathrm{XP} - \mathrm{P}', \quad \mathrm{w(P)} = \mathrm{P}'.$$

Q 25. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u.

Par la suite, on notera u_n l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On admet que v et w sont aussi des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$, et on note Id l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

Q 26. Etablir : $v \circ w = u - \mathrm{Id}$ et $w \circ v = u + \mathrm{Id}$.

Q 27. En déduire : $u \circ v - v \circ u = 2v$.

Q 28. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $u(P) = \lambda P$, alors $u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)$.

Q 29. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, H_k est un vecteur propre de u et déterminer la valeur propre associée.

Q 30. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q 31. Établir, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$:

$$\left\langle P', Q' \right\rangle = \langle u(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q 32. Montrer que u_n est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 33. Justifier, d'une deuxième manière, que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u_n.

Q 34. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n.

IV Partie IV : Une famille totale

Dans cette partie, nous conservons les notations de la partie III. L'espace E muni de son produit scalaire et la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédemment construite. Nous allons montrer que $(\mathrm{vect(H_n, n \in \mathbb{N})})^{\perp} = \{0\}$. On dit dans ce cas là que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans l'espace préhilbertien E ou encore que c'est une base hilbertienne de E.

Q 35. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Pour $\xi \in E$, montrer que $x \longmapsto f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pourra écrire $f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2} = f(x)e^{-x^2/2}e^{-ix\xi}e^{-x^2/2}$.

CC BY-NC-SA

On définit ainsi

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} e^{-t^2}\, dt.$$

$\mathcal{F}$ est une application linéaire sur E, appelée la transformation de Fourier de f sur l'espace préhilbertien E. Nous admettrons pour la suite que $\mathcal{F}$ est injective sur E.

Q 36. Montrer que, pour tout entier naturel p, la fonction $x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note $M_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \exp(-x^2)\, dx$. Déterminer la valeur de M_p.

Q 37. Soit $f \in E$. Justifier que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!}\, dx$$

Q 38. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de la partie, on suppose que $f \in (\mathrm{vect}(\mathbf{H_n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}))^{\perp}$. Le but est de montrer que f est la fonction nulle.

Q 39. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2}\, dx = 0$.

Q 40. En déduire que $\mathcal{F}(f)$ est la fonction nulle.

Q 41. Conclure.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2024

4 heures Calculatrice autorisée

Autour de la série harmonique et de la constante d'Euler

Dans toute ce problème, on désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Le but de ce problème est dans un premier temps de s'assurer de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis d'essayer de déterminer différentes expressions de sa limite, à l'aide d'intégrales.

I Convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q 1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la différence $a_{n+1}-a_n$, puis déterminer la nature de la série numérique $\sum (a_{n+1}-a_n)$.

Q 2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel que l'on notera γ pour toute la suite du problème, puis que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

II Application au problème du collectionneur de vignettes

Pour augmenter ses ventes, un industriel de l'agro-alimentaire qui commercialise des paquets de céréales pour le petit déjeuner décide d'insérer au fond du paquet une figurine de sportifs célèbres. Le modèle de figurine inséré dans le paquet est choisi de manière équiprobable parmi n modèles de référence.

Pour différencier les n modèles de figurines et les identifier de manière unique, on considèrera que chaque modèle de figurine porte un numéro unique entre 1 et n.

Chaque paquet de céréales contient ainsi une figurine à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet. On se demande combien un consommateur, que l'on va appeler ici le " collectionneur ", doit ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n figurines.

On décompose ce nombre de paquets N_n en $N_n = \tau_1+\tau_2+...+\tau_n$ où τ_k est le nombre de paquets supplémentaires nécessaires pour obtenir k figurines différentes quand on en a déjà $k-1$ différentes.

Dans tout ce qui suit, on désignera par $C_k^{(i)}$ lévénénement "le collectionneur découvre dans le k^{e} paquet la figurine numérotée i "

Q 3. Déterminer la loi de N_1.

Q 4. Soit $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Quelle est la probabilité de l'événement C : "le collectionneur obtient toujours la même vignette au cours de ses m premiers achats" ?

En déduire que : $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N_2 > m) = \dfrac{1}{n^{m-1}}$.

Q 5. Déterminer alors la loi de N_2.

BY-NC-SA

Q 6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que τ_k suit une loi géométrique, dont on précisera le paramètre.

Q 7. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n et établir que :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{=} n(\ln(n) + \gamma + o(1)).$$

Q 8. Justifier l'indépendance des variables aléatoires τ_1, τ_2,..., τ_n.

Q 9. On rappelle par ailleurs que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Démontrer que N_n admet une variance et que : $\mathbb{V}(N_n) \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}$.

Q 10. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| > \varepsilon n \ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q 11. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

III Une première expression intégrale de γ

On admettra le résultat suivant : pour tous réels a et b strictement positifs, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est convergente, et on a $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Q 12. Démontrer que : $\forall t > 0,\ \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}$.

Q 13. En déduire que : $\forall t > 0,\ e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\right)$.

Q 14. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$ est convergente et que l'on a :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

IV Une deuxième expression intégrale de γ

Q 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité en 0 de la fonction $t \longmapsto \frac{1-(1-t)^n}{t}$.

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que : $\int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n}$

exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ à l'aide d'une intégrale puis à l'aide d'un changement de variable affine, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u} du - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u} du.$$

BY-NC-SA

Q 17. Soit $x \in [1, +\infty[$. Déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$ de la suite dont le terme général est $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

Q 18. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \begin{cases} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n}{t} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant n \\ 0 & \text{si } n < t \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 19. Démontrer que l'on a : $\forall t \in [0,1[\,,\ \ln(1-t) \leqslant -t$.

Q 20. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du}$.

Q 21. Justifier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ des fonctions f_n définies dans la question précédente.

Q 22. Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général

$$\int_1^n \frac{\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n}{u}\mathrm{du}.$$

Q 23. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du}$.

Q 24. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,1]\,,\ 0 \leqslant \frac{1-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n}{t} \leqslant 1.$$

Q 25. Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général

$$\int_0^1 \frac{1-\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n}{u}\mathrm{du}.$$

Q 26. En déduire que : $\gamma = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}$.

V Deux autres expressions intégrales de γ

Sous réserve que cela ait du sens, on appelle fonction Γ la fonction donnée par :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt}.$$

On désignera par u la fonction de deux variables définie par : $u : \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathrm{R} \\ (x,t) & \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \end{cases}$

Q 27. Montrer que Γ est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

BY-NC-SA

Q 28. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Q 29. Établir que : $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Q 30. On admet la formule de Weierstrass :

$$(W) : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma \mathrm{x}} \prod_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}} \left(1+\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\right)\right)$$

À l'aide de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$, montrer que :

$$\forall x > 0,\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$$

Q 31. En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$, et calculer alors $\Gamma'(2)$.

Q 32. À l'aide d'un changement de variables, montrer que l'on a $\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t))\,\mathrm{dt}$.

VI Recherche d'une valeur approchée de γ

Dans toute cette partie, A désigne un réel strictement positif.

Q 33. Démontrer que : $\gamma = -\ln(A) + \int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du} - \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}$.

Q 34. Établir la convergence de la série numérique $\sum \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}$, puis en donner sa somme à l'aide d'une intégrale.

Q 35. Démontrer que : $\forall x > 0,\ \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{\mathrm{x}} - \int_{\mathrm{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}^2}\mathrm{du}$

Q 36. Déterminer l'expression d'un polynôme R de degré 2 à coefficients réels tel que :

$$\forall x > 0,\ \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du} = \frac{\mathrm{R(x)e^{-x}}}{\mathrm{x}^3} - \int_{\mathrm{x}}^{+\infty} \frac{6\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}^4}\mathrm{du}$$

Q 37. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > A+1$. Justifier alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\gamma - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} - \frac{R(A)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}}{A^3} + \ln(A)\right| \leqslant \frac{A^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} + \frac{6\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}}{A^4}$$

VII Étude d'une série entière aux bornes de son disque ouvert de convergence

L'objet de cette partie du problème est d'étudier le comportement de la somme f de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \ln(n)x^n$ de la variable réelle x aux bornes de son intervalle ouvert de convergence.

BY-NC-SA

VII.A – Rayon de convergence et première expression de la somme.

Q 38. Démontrer que la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \ln(n) x^n$, est de rayon de convergence égal à 1, puis préciser le domaine de définition de la fonction f.

VII.B – Étude de f en 1.

Q 39. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure.

Q 40. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n$ de la variable réelle x dont on note alors g sa somme.

Q 41. À l'aide des deux séries entières $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$$

Q 42. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\quad \forall x \in [0,1[\,,\ |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{M}{1-x}$.

Q 43. En déduire que $f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\sim} g(x)$.

VII.C – Étude de f en -1.

On considère la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est donné par :

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ c_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \end{cases}$$

Q 44. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} c_n x^n$ de la variable réelle x, dont on note alors h sa somme, est égal à 1, puis préciser le domaine de définition de h.

Q 45. Montrer que la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} c_n$ converge vers la constante $-\gamma$.

Q 46. La fonction h est-elle continue en 1 ?

Q 47. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k = \ln\left(\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p\left((2p)!\right)^2}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Q 48. On rappelle que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Montrer que $f(x) \underset{\substack{x \to -1 \\ x>-1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

On pourra au préalable déterminer une relation entre f et h sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

PC

2024

4 heures

Calculatrice autorisée

Ce sujet comporte quatre parties, qui peuvent être traitées indépendamment :

— La partie I étudie deux façons d'approcher le réel $\sqrt{2}$.

— La partie II généralise la méthode de Héron d'Alexandrie étudiée en sous-partie I.B au cadre des matrices symétriques positives.

— La partie III traite le cas général de la méthode de Newton numérique réelle.

— La partie IV s'inspire de la méthode de Newton abordée en partie III pour établir l'existence de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford, par une approche algorithmique et en donne une application à la détermination de la racine carrée de certaines matrices.

Notations

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et q est un entier naturel non nul.
On note $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille q à coefficients dans $\mathbb{K}$; on note I_q la matrice identité dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et P^{T} la transposée d'une matrice P. On note $\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{O}(q)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $P^{\mathrm{T}}P = I_q$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de M.
Pour $a_1, ..., a_q \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{diag}(a_1, ..., a_q)$ la matrice A de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$:

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$.
On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants :
pour toute suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$,

— la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, la suite $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$;

— si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, alors les suites $(AM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_nA)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AM et MA.

I Quelques approximations de $\sqrt{2}$.

I.A – Via un développement en série entière.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k).$$

Q 1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ vaut :

$$R = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Q 2. Donner, sans justification supplémentaire, l'expression de la fonction somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ sur $]-R, R[$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n x^n.$$

BY-NC-SA

Q 4. Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}b_n$.

Q 5. Montrer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}b_n x^n$ converge uniformément sur $[-1,1]$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n$.

Q 6. Montrer que

$$\sqrt{2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_k+\underset{n\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big).$$

I.B – Via la méthode de Héron d'Alexandrie.

Soit $a\in\mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a)=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ c_{n+1}(a)=\dfrac{1}{2}\Big(c_n(a)+\dfrac{a}{c_n(a)}\Big). \end{cases}$$

Q 7. Montrer, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a)>0$.

Q 8. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2-a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2-a)^2$. En déduire que, pour tout $n\geqslant 1$, $c_n(a)\geqslant\sqrt{a}$.

Q 9. Montrer que $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Q 10. Calculer $c_1(2)$. À l'aide de la question Q 8, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$c_n(2)^2-2\leqslant 8\Big(\frac{1}{32}\Big)^{2^{n-1}}.$$

En déduire que

$$\sqrt{2}=c_n(2)+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\Big(\frac{1}{32}\Big)^{2^{n-1}}\right).$$

I.C – Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$: vitesses de convergence.

Q 11. Parmi les deux suites $\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$ et $\left(\Big(\dfrac{1}{32}\Big)^{2^{n-1}}\right)$, déterminer celle qui converge le plus vite vers zéro.

Dans la question suivante, on s'interdit d'utiliser une valeur approchée de $\sqrt{2}$ stockée dans Python. En particulier, on s'interdit l'utilisation de `2**(1/2)`, `math.sqrt(2)` *ou* `numpy.sqrt(2)`.

Q 12. Écrire une suite d'instructions en Python permettant, grâce à la méthode de la question Q 10, d'obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ avec 10 décimales correctes.

II Racine carrée d'une matrice symétrique positive.

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M\in\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^{\mathrm{T}}MX\geqslant 0$ pour toute matrice colonne $X\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M\in\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B\in\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2=M$.

II.A – Racines carrées de la matrice I_2.

Q 13. Rappeler sans démonstration la description des matrices de $\mathrm{O}(2)$.

On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre $\theta\in\mathbb{R}$.

Q 14. Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $\mathrm{O}(2)$. Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?

II.B – Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive.

Q 15. Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.

Q 16. Soit $M\in\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B\in\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2=M$.

Q 17. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M.

BY-NC-SA

II.C – Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle.

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_q$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}(q)$ telle que

$$M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_q)\,P^{\mathrm{T}}.$$

On rappelle de plus que, pour tout réel $a \geqslant 0$, la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ définie en sous-partie I.B, est à valeurs strictement positives et converge vers $\sqrt{a}$. On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(M_n + MM_n^{-1}\right). \end{cases}$$

Q 18. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P\,\mathrm{diag}(c_n(\lambda_1), ..., c_n(\lambda_q))\,P^{\mathrm{T}}.$$

Q 19. En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

III Méthode de Newton numérique.

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que f' ne s'annule pas sur I.

III.A – Convergence de la méthode de Newton.

Q 20. Que dire du nombre du nombre de points d'annulation de f sur I ?

On suppose qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$. Pour tout $r > 0$, on pose $J_r = [c - r, c + r]$.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\begin{cases} c_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = c_n - \dfrac{f(c_n)}{f'(c_n)}. \end{cases}$$

L'objectif de cette sous-partie III.A est de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $J_r \subset I$ et tel que, si $c_0 \in J_r$, alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

Q 21. Soit $r > 0$ tel que $J_r \subset I$. Justifier que $s_r = \sup_{J_r} |f''|$ et $i_r = \inf_{J_r} |f'|$ sont bien définis et que $i_r > 0$.

On note $K_r = \dfrac{s_r}{2i_r}$.

Q 22. Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $0 \leqslant rK_r < 1$.

Dans la suite de cette sous-partie III.A, on fixe $r > 0$ tel que $rK_r < 1$.

Q 23. On suppose que $n \in \mathbb{N}$ et $c_n \in J_r$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|c_{n+1} - c| \leqslant K_r |c_n - c|^2,$$

puis en déduire que $c_{n+1} \in J_r$.

Q 24. Montrer que, si $c_0 \in J_r$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leqslant \dfrac{\left(K_r|c_0 - c|\right)^{2^n}}{K_r}$ et conclure.

III.B – Une implémentation en Python.

Q 25. On désigne dans cette question par `df` la fonction Python représentant f'. Écrire une fonction Python `newton(c0,f,df)` prenant en arguments le réel c_0 et les fonctions f et f' et renvoyant, si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, une valeur approchée de c et la valeur `None` si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

On pourra convenir ici que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si on trouve un $n \leqslant 50$ tel que $|f(c_n)| < 10^{-10}$, et qu'elle diverge sinon.

IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée.

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.

Dans toute cette partie IV, on fixe $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M (avec $s \in \mathbb{N}^*$). On définit alors

BY-NC-SA

$$P(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i).$$

On note P' le polynôme dérivé de P.

Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $Q(M) = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k M^k \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et on pose

$$\mathbb{C}[M] = \{Q(M) | \, Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

On admet alors et on pourra utiliser librement que :

— si $A, B \in \mathbb{C}[M]$, alors A et B commutent, et $A + B$ et AB appartiennent à $\mathbb{C}[M]$;

— si $Q \in \mathbb{C}[X]$ et si $A \in \mathbb{C}[M]$, alors $Q(A) \in \mathbb{C}[M]$.

IV.A – Une méthode de Newton matricielle.

Q 26. Montrer que, pour toute racine complexe μ de P', la matrice $M - \mu I_q$ est inversible. En déduire que $P'(M)$ est inversible.

Q 27. Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de M divise P^q. En déduire que $P(M)$ est nilpotente.

Grâce à ces résultats, on peut définir la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— M_n est bien définie et appartient à $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$;

— il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$;

— la matrice $P'(M_n)$ est inversible.

Q 28. Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Q 29. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices M et M_n commutent.

Q 30. On note A la limite de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que A est diagonalisable.

Q 31. On pose $N = M - A$. Justifier que A et N commutent et que N est nilpotente.

IV.B – Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables

Q 32. En utilisant le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

Q 33. En déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$ lorsque N est une matrice nilpotente.

Pour les questions suivantes, on suppose que M est à coefficients réels et trigonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et que le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

On considère alors les matrices A et N introduites dans la sous-partie IV.A.

Q 34. Justifier que A et N sont à coefficients réels et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Q 35. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q 36. Justifier que la méthode de Héron d'Alexandrie de la sous-partie II.C peut être appliquée à la matrice A afin d'obtenir une racine carrée A' de A. En déduire l'expression d'une racine carrée de M.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2024

4 heures

Calculatrice autorisée

Notations

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

— La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.

— La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.

— La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.

— La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.

— Enfin, la partie V étudie la fonction Γ. Elle utilise quelques résultats des parties I, III et IV.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n\geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

I Résultats préliminaires

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 1. Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right) - 1\right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right) - 1.$$

Q 2. Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

I.B – Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

Q 3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\left|(1+t) - \mathrm{e}^t\right| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}.$$

Q 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.

BY-NC-SA

Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.

Q 5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.

Q 6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^z.

II Exemples de calcul de produit infini

II.A – **Q 7.** Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et de $\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

II.B – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \mathrm{d}u.$$

Q 8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q 9. Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

II.C – On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(A_n)$ diverge.

Q 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\prod_{p=n}^{+\infty}\left(1-\mathbb{P}(A_p)\right) = 0$.

On pourra utiliser l'inégalité démontrée en Q 2.

Q 11. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1$.

III Étude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

— a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.

— $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|), \quad \text{et sous condition d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|.$$

III.A – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0.

Q 12. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|.$$

Q 13. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

BY-NC-SA

Q 14. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) \end{cases}$$

Q 15. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

III.B – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

Q 16. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q 17. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

III.C – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

Q 18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P_n'(x) = P_n(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}.$$

Q 19. En déduire que la fonction

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}.$$

IV Expression de la fonction sinus comme produit infini

IV.A – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\left(1+\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

Dans les questions Q20 à Q23, on fixe un entier naturel n.

Q 20. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

Q 21. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \,|\, k \in [\![0, 2n]\!]\}$.

Q 22. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Q 23. En calculant $P_n'(0)$, montrer que :

$$P_n(X) = X\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

BY-NC-SA

Q 24. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

IV.B – Dans cette sous-partie, on fixe un réel x et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} x\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)(2\lfloor t\rfloor+1)\right)^2}\right) & \text{si } t\geqslant k \\ P_{\lfloor t\rfloor}(x) & \text{si } t<k. \end{cases} \end{cases}$$

Q 25. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geqslant 2$,

$$|v_k(t)-v_{k-1}(t)|\leqslant\frac{x^2}{k^2\pi^2}|v_{k-1}(t)|.$$

Q 26. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $k\in\mathbb{N}^*$,

$$|v_k(t)|\leqslant|x|\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Q 27. En déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}(v_k-v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Q 28. Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v_k(t)$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k(t)$.

Q 29. En déduire que :

$$\sin(x)=x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

IV.C –

Q 30. Montrer que, pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$,

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1}{x}-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2x}{(j\pi)^2-x^2}.$$

Q 31. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

On pourra dans un premier temps déterminer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)}$.

V Autour de la fonction Γ

V.A – Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Q 32. Montrer que Γ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose

$$g_n(x)=\int_0^1 u^{x-1}\left(1-u\right)^n\mathrm{d}u.$$

Q 33. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$g_n(x)=\frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

BY-NC-SA

Q 34. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

Q 35. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

V.B – **Q 36.** Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

V.C – **Q 37.** Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

Q 38. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

TSI

2024

4 heures

Calculatrice autorisée

Dans tout ce sujet, on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n (n entier). Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé et $P^{(j)}$ le polynôme dérivé d'ordre j de P de telle sorte que $P = P^{(0)}$, $P' = P^{(1)}$, $P'' = P^{(2)}$, etc.

On pourra confondre un polynôme et sa fonction polynomiale associée. De même, on pourra confondre le polynôme dérivé P' avec la fonction dérivée de la fonction polynomiale P.

On rappelle également que la partie entière d'un réel x est un entier, noté $\lfloor x \rfloor$, et que celle-ci vérifie la double inégalité $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

I Préliminaires

On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $G_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, G_{n+1} = X\ \left(G_n + (1+X)G_n'\right).$$

Q 1. Justifier que $G_1 = X$ puis donner la forme développée du polynôme G_2.

Q 2. Donner sans justification le rayon de convergence R_0 de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} x^k$ et exprimer sa fonction somme, notée D_0, à l'aide des fonctions usuelles.

Pour tout entier naturel non nul n, on note R_n le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} k^n x^k$ et on note $D_n :]-R_n, R_n[\to \mathbb{R}$ sa fonction somme donnée par $D_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} k^n x^k$.

Q 3. Justifier que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire la valeur de R_n pour tout entier naturel n.

Q 4. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in]-R_n, R_n[$, on a $D_{n+1}(x) = xD_n'(x)$.

Q 5. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout $x \in]-R_n, R_n[$, on a

$$D_n(x) = \frac{1}{1-x} G_n\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

II Nombres de Fubini

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k.$$

II.A – Dénombrement

Q 6. Justifier que $F_1 = 1$ et déterminer les entiers F_2 et F_3.

On rappelle qu'une partition d'un ensemble E non vide est un ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion constitue l'ensemble de départ E. Une partition ordonnée de E est un p-uplet $(X_1, ..., X_p)$ tel que $\{X_1, ..., X_p\}$ est une partition de E.

Par exemple, les trois partitions ordonnées de l'ensemble $\{1,2\}$ sont $(\{1\},\{2\})$, $(\{2\},\{1\})$ et $(\{1,2\})$.

Par convention, on pose qu'il existe une seule partition ordonnée de l'ensemble vide. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, ..., n\}$.

Q 7. Déterminer les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1,2,3\}$, puis leur nombre.

Q 8. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}$. En conclure que les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales. Pour construire une partition ordonnée, on pourra commencer par choisir le cardinal de la première partie formant cette partition.

CC BY-NC-SA

II.B – Majoration des nombres de Fubini

Q 9. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle avec son domaine de validité et justifier que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leqslant 1$ pour tout entier naturel n non nul.

On se propose de prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}$. Pour cela, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété ci-après qui implique l'encadrement voulu :

$$\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0, n]\!], 0 \leqslant \frac{F_k}{k!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^k}.$$

Q 10. Justifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Q 11. On suppose $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour un certain entier n naturel non nul fixé. Montrer que $0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}$ et en conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Le résultat de cette question achève la récurrence et prouve l'encadrement de $\frac{F_n}{n!}$ annoncé.

Q 12. En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!} z^n$.

II.C – Interprétation probabiliste et minoration des nombres de Fubini

Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$.

On peut montrer que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et que ses dérivées successives s'expriment à l'aide des polynômes G_n définis dans la partie Préliminaires sous la forme :

$$\forall x \in]-R, R[, f^{(n)}(x) = G_n\left(\frac{1}{2e^{-x} - 1}\right) f(x).$$

On pourra librement utiliser cette expression admise de $f^{(n)}$ valable pour tout entier naturel n.

Q 13. Rappeler le lien existant entre les dérivées successives de f et les coefficients de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!} x^n$ puis prouver que, pour tout entier naturel n, on a

$$F_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} \tag{II.1}$$

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g_n : t \mapsto t^n e^{-t \ln 2}.$$

Q 14. Rappeler quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et rappeler la valeur de $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Q 15. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que X^n est d'espérance finie puis que $E(X^n) = 2F_n$ en citant le nom du théorème utilisé.

Q 16. Soit a un réel strictement positif que l'on suppose non entier. Montrer que $P(X \geqslant a) = \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}$.

Q 17. Pour n non nul, justifier que g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$, noté M_n, que l'on explicitera.

Q 18. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $E(X^n) \geqslant a^n P(X \geqslant a)$ pour tout réel a strictement positif.

Q 19. En déduire la minoration $F_n \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{n}{e \ln 2}\right)^n$ On pourra admettre que $\ln 2$ n'est pas un nombre rationnel.

BY-NC-SA

III Équivalent de F_n

On rappelle que la fonction g_n a été définie dans la partie II.C pour tout entier naturel n par

$$g_n : \begin{cases} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n e^{-t\ln 2} \end{cases}$$

et que quelques résultats la concernant, qui peuvent directement être réinvestis, ont déjà été établis dans la question 17.

III.A – Valeur d'une intégrale

Q 20. Pour tout entier naturel n, justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge et, à l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

Q 21. Montrer que $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt = \dfrac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$ pour tout entier naturel n.

III.B – Comparaison série/intégrale

Dans toute la suite de cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Q 22. Justifier qu'il existe un entier $N \geqslant 1$, dépendant de n tel que g_n est croissante sur $[0,N]$ et décroissante sur $[N+1,+\infty[$.

Q 23. Justifier que $\sum_{k=0}^{N-1} g_n(k) \leqslant \int_0^N g_n(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{N} g_n(k)$.

Q 24. Justifier que la série $\sum_{k\geqslant N+1}^{+\infty} g_n(k)$ converge puis établir l'encadrement

$$\sum_{k=N+2}^{+\infty} g_n(k) \leqslant \int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)dt \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} g_n(k).$$

Q 25. En utilisant la relation (II.1), déduire des encadrements précédents que

$$-\int_N^{N+1} g_n(t)dt \leqslant 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leqslant g_n(N) + g_n(N+1) - \int_N^{N+1} g_n(t)dt.$$

Q 26. Justifier que $-\dfrac{M_n}{2} \leqslant F_n - \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \leqslant M_n$ pour tout entier naturel non nul puis en déduire l'équivalent de $F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}}$. On pourra utiliser librement la formule de Stirling qui donne l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

IV Une suite d'Appell

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, noté parfois également $P(X)$, on note $P(X+1)$ le polynôme obtenu en substituant l'indéterminée X de P par $X+1$.

À titre d'exemple, si $P(X) = X^2 - 3X + 7$ alors $P(X+1) = (X+1)^2 - 3(X+1) + 7 = X^2 - X + 5$. On pourra admettre que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, les polynômes P et $P(X+1)$ ont le même degré et le même coefficient dominant.

Dans toute cette partie, on considère un entier naturel n fixé.

IV.A – Étude d'un endomorphisme

On note φ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi_n : P \mapsto 2P(X) - P(X+1)$.

Q 27. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 28. Montrer que si λ est une valeur propre de φ_n alors $\lambda = 1$ (on pourra utiliser un vecteur propre associé à la valeur propre λ). En déduire que φ_n est injectif.

Q 29. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?

Q 30. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$. Dans toute la suite du problème, on note P_n cet unique polynôme.

BY-NC-SA

IV.B – Premières propriétés

On rappelle que, par définition, le polynôme P_n vérifie $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$.

Q 31. Justifier que $\deg P_n = n$.

Q 32. Justifier que $\frac{k^n}{2^k} = \frac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \frac{P_n(k+1)}{2^k}$ pour tout entier naturel k et en déduire que $P_n(0) = F_n$.

Q 33. Montrer que $P'_{n+1} = (n+1)P_n$.

Q 34. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k} X^k. \tag{IV.1}$$

IV.C – Structure euclidienne

L'endomorphisme φ_n est celui défini dans la partie IV.A. Dans toute la suite, pour des polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2P^{(j)}(0) - P^{(j)}(1))(2Q^{(j)}(0) - Q^{(j)}(1))}{(j!)^2}.$$

Q 35. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Justifier qu'il existe $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$.

Q 36. Justifier que $\varphi_n\left(P^{(j)}\right) = (\varphi_n(P))^{(j)}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout entier naturel j puis montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 37. Justifier que

$$2P_k^{(j)}(0) - P_k^{(j)}(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ k! & \text{si } j = k \end{cases}$$

pour tout couple d'entiers naturels (j, k) puis montrer que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

Q 38. En déduire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_n(P)^{(k)}(0)}{k!} P_k.$$

Les entiers F_n définis dans ce problème sont appelés nombres de Fubini ou nombres de Bell ordonnés et apparaissent dans des problèmes de combinatoire. La suite (P_n) de polynômes définie à partir de ces nombres vérifie des propriétés communes avec d'autres suites de polynômes (polynômes de Bernoulli, polynômes d'Hermite...) qui sont à l'origine de la notion de suites d'Appell.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI 2024

4 heures Calculatrice autorisée

Fonctions génératrices et applications

I Cas d'un univers fini

On note $\mathbb{R}[T]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de la variable réelle t. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa *fonction génératrice* G_X par :

$$G_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}[T] \\ t \mapsto E(t^X) \end{cases}$$

I.A – Définition et propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}$.

Q 1. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) t^{x_k}$$

et en déduire que G_X est fonction polynomiale en t.

Q 2. Calculer $G_X(1)$.

Q 3. Calculer G_X sous la forme la plus factorisée possible si la variable aléatoire X suit une loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Q 4. Calculer G_X sous la forme la plus factorisée possible si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Q 5. Calculer G_X sous la forme la plus factorisée possible si la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $p \in]0, 1[$.

Q 6. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

I.B – Une application

On jette deux dés à six faces. On note X et Y les variables aléatoires donnant la valeur de la face obtenue par le premier et le second dé. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. On note $Z = X + Y$ la variable aléatoire donnant la somme des deux faces obtenues.

Q 7. Préciser l'univers Ω modélisant cette expérience aléatoire.

Q 8. Calculer $Z(\Omega)$.

On suppose qu'il est possible de piper les deux dés de sorte que la variable aléatoire Z suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

On note alors pour $k \in [\![1, 6]\!]$, $\alpha_k = P(X = k)$ et $\beta_k = P(Y = k)$.

Q 9. Montrer que la fonction génératrice de Z est de la forme $G_Z(t) = t^2 P(t)$ avec P un polynôme de degré 10 à coefficients réels.

Q 10. Proposer une autre écriture de la fonction génératrice de Z de la forme $G_Z(t) = t^2 Q(t) R(t)$ avec $Q \in \mathbb{R}_5[T]$ et $R \in \mathbb{R}_5[T]$.

Q 11. Montrer que $P = QR$ puis que Q et R sont de degré 5.

Q 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\sum_{k=0}^{10} z^k = 0$ et montrer qu'elle n'admet aucune solution réelle.

Q 13. Prouver que Q et R ont chacun au moins une racines réelles.

Q 14. Aboutir à une contradiction. Conclure.

BY-NC-SA

II Cas d'un univers infini

II.A – Définition et propriétés

On considère un univers Ω dénombrable muni d'une probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa *fonction génératrice* G_X par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$$

pour les réels $t \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{k\geqslant 0} P(X=k)t^k$ converge (ce qui revient à dire par le théorème de transfert que t^X admet une espérance finie).

Q 15. Montrer que la série entière définissant la fonction génératrice de X a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1.

Q 16. Montrer que G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.

Q 17. Montrer que si $R > 1$ alors G_X est deux fois dérivable en 1, puis que X admet une espérance et une variance données par :

$$E(X) = G'(1), \quad E\left(X(X-1)\right) = G''_X(1), \text{ et } V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2.$$

Un exemple :

Q 18. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ une variable aléatoire qui suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Montrer que la fonction génératrice G_X de cette loi a un rayon de convergence égal à $R = +\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{t^k\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t}.$$

Q 19. En déduire que X admet une espérance et une variance finie puis l'expression de cette espérance et de cette variance.

II.B – Première application : une loi construite à partir de la loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} X/2 & \text{si } X \text{ est paire} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 20. Montrer que $P(Y=0) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + f(\lambda)\right)$ avec $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Q 21. Montrer que $\forall \lambda > 0$, $f(\lambda) = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$.

Q 22. Déterminer la loi de Y.

Q 23. Calculer l'espérance de Y.

II.C – Seconde application : une loi produit

Soit Ω un univers dénombrable muni d'une probabilité $P : \Omega \to [0,1]$. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω telles que :

— $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$;

— $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$;

— X et Y sont *indépendantes*, ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,1\}$, $P((X=n) \cap (Y=k)) = P(X=n)P(Y=k)$.

On pose $Z = XY$ et on note G_X, G_Y, G_Z les fonctions génératrices de ces trois variables aléatoires.

Q 24. Montrer que $P(Z=0) = q + p\mathrm{e}^{-\lambda}$ où $q = 1-p$.

Q 25. En déduire que $G_Z = G_Y \circ G_X$.

Q 26. Puis calculer l'espérance et la variance de Z.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP, MPI

4 heures — Calculatrice autorisée

2025

Irrationalité de $\zeta(2)$

Notations

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
- Si p est un nombre premier et si $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $v_p(n)$ la valuation p-adique de n, c'est-à-dire le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n.
- Si x est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. En d'autres termes,

$$\pi(x) = \operatorname{card}\left(\{p \text{ premier},\ p \leqslant x\}\right) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} 1$$

où $\operatorname{card}(A)$ désigne le cardinal de l'ensemble fini A.

Partie A – Un encadrement de la fonction π

Le but de cette partie est d'établir l'encadrement suivant de la fonction π :

$$\forall x \in [3, +\infty[\qquad \frac{\ln(2)}{6}\frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant 4\frac{x}{\ln(x)}.$$

I – Calculs préliminaires

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{\substack{n+2 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant \binom{2n+1}{n} \leqslant 4^n.$$

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n.$$

On pourra procéder par récurrence et effectuer l'hérédité en discutant suivant la parité de n.

Q3. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$\prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} p < 4^x.$$

Q4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} < 4^n.$$

Q5. Soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

Q6. En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et p nombre premier : si p^k divise $\binom{2n}{n}$, alors $p^k \leqslant 2n$.

II – Majoration de $\pi(x)$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p \geqslant \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p.$$

Q8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^{(\pi(n)-\pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n.$$

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Justifier que

$$\pi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)},$$

puis en déduire que

$$\pi(n) \leqslant 4\frac{\ln(n)}{n}.$$

On pourra remarquer que $2 > \ln(4)$.

Q10. Soit $x \geqslant 3$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}, +\infty[$, montrer que

$$\pi(x) \leqslant 4\frac{x}{\ln(x)}.$$

III – Minoration de $\pi(x)$

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}.$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que

$$\frac{2n\ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geqslant \frac{n\ln(2)}{\ln(2n)},$$

puis en déduire que

$$\pi(2n) \geqslant n\frac{\ln(2)}{\ln(2n)}.$$

Q13. Soit $x \geqslant 3$. Montrer que

$$\pi(x) \geqslant \frac{\ln(2)}{6}\frac{x}{\ln(x)}.$$

*On pourra poser $n = \lfloor x/2 \rfloor$ et utiliser **Q12**.*

L'inégalité précédente a été asymptotiquement améliorée en 1896, ainsi on admettra dans la suite du problème le (difficile) résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$

Partie B – Une majoration d'un PPCM

I – Une première majoration

Q14. Soit $r \in \mathbb{N}^\star$. Soient $a_1, \dots, a_r$ des entiers naturels non nuls. Justifier qu'il existe un unique entier naturel $d(a_1, \dots, a_r)$ tel que

$$a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} \cap \cdots \cap a_r\mathbb{Z} = d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z}.$$

Q15. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_r$ des entiers naturels non nuls. Montrer que $d(a_1, \dots, a_r)$ est le plus petit entier naturel non nul qui est divisible par $a_1, \dots, a_r$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si $a_1, \dots, a_r$ sont des entiers naturels non nuls, $d(a_1, \dots, a_r)$ s'appelle le *plus petit commun multiple* de $a_1, \dots, a_r$ et on le notera dans la suite $\text{PPCM}(a_1, \dots, a_r)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le PPCM des entiers naturels compris entre 1 et n, autrement dit : $d_n = \text{PPCM}(1, 2, \dots, n)$.

Q16. Calculer d_2, d_3 et d_4, puis montrer que $d_n \leqslant n!$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

II – Une majoration plus fine

Le but de cette sous-partie est d'améliorer la majoration de d_n.

Dans les deux questions suivantes, on fixe un entier naturel non nul n et, pour tout nombre premier p, on note k_p le plus grand entier naturel tel que $p^{k_p} \leqslant n$.

Q17. Montrer que $d_n = \displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{k_p}$.

Q18. Pour tout nombre premier p, montrer que $k_p = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor$. En déduire que $d_n \leqslant n^{\pi(n)}$.

Q19. En déduire qu'il existe un entier naturel N non nul tel que, pour tout $n \geqslant N$, $d_n \leqslant 3^n$.
On pourra utiliser le théorème des nombres premiers mentionné ci-dessus.

Partie C – Un critère d'irrationalité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe deux suites d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{q_n}\right).$$

On suppose en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p_n}{q_n} \neq \alpha$.

Q20. Montrer que α est un nombre irrationnel.

Soit $\beta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$.

Q21. Justifier que β est bien défini, puis montrer que β est un nombre irrationnel.

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est bien défini, puis montrer que l'on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{p_n}{q_n}$$

avec $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n = d_n^2$.

Q23. Peut-on appliquer le résultat de **Q20** à ces suites $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour conclure sur l'irrationalité de $\zeta(2)$?

Partie D – Calcul d'une intégrale double

I – Une intégrale double

Soient r et s deux entiers naturels strictement positifs tels que $r \geqslant s$.

Q24. Soit $y \in]0,1[$. Justifier que la fonction

$$x \mapsto \frac{x^r y^s}{1-xy}$$

est intégrable sur $[0,1]$.

On pose, pour $y \in]0,1[$,

$$f_{r,s}(y) = \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\,\mathrm{d}x.$$

Q25. Montrer que $f_{r,s}$ est continue et intégrable sur $]0,1[$.

On pose

$$J_{r,s} = \int_0^1 f_{r,s}(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Q26. Montrer que

$$J_{r,s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)}.$$

II – Une écriture sous forme de quotients

Dans cette sous-partie, on suppose $r > s$.

Q27. Justifier que

$$\frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1}\right).$$

Q28. En déduire que

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1}\right).$$

Q29. En déduire que

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s}\sum_{k=s+1}^{r} \frac{1}{k}.$$

Q30. En déduire que l'on peut écrire

$$J_{r,s} = \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}}$$

avec $p_{r,s}$ et $q_{r,s}$ des entiers naturels et $q_{r,s}$ divisant d_r^2.

On admettra que $J_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$.

Partie E – Une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$

On définit sur $[0,1]$ la fonction P_n par :

$$\forall x \in [0,1], \qquad P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n \left(x^n (1-x)^n\right)}{\mathrm{d}x^n}.$$

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que P_n est une fonction polynomiale sur $[0,1]$ de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

On pose dans la suite

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
$$(1-y)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k y^k$$

avec pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_k \in \mathbb{Z}$.

Q32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

et montrer que

$$I_n = \sum_{\substack{r,s=0 \\ r \neq s}}^{n} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^{n} a_r b_r J_{r,r}.$$

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire qu'il existe deux entiers relatifs p_n et q_n tels que

$$I_n = \frac{p_n + \zeta(2) q_n}{d_n^2}.$$

On admettra dans toute la suite que p_n et q_n sont non nuls pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $y \in]0,1[$,

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy} \,\mathrm{d}x = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} \,\mathrm{d}x.$$

Q35. En déduire que

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Q36. Montrer que

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2, \qquad \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leqslant \frac{5\sqrt{5}-11}{2}.$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que

$$|I_n| \leqslant \zeta(2) \left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n.$$

Q38. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$0 < |p_n + \zeta(2) q_n| \leqslant \zeta(2) \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

On pourra utiliser, sans la prouver, l'inégalité $9\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2} \leqslant \dfrac{5}{6}$.

Q39. Montrer que $\zeta(2)$ est un nombre irrationnel.

Q40. On admet, uniquement dans cette question, que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Montrer que π est un nombre irrationnel.

◇ Fin ◇

M062 - 28 avril 2025 - 14:52:17

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP, MPI

4 heures — Calculatrice autorisée

2025

Étude d'un modèle probabiliste de ferromagnétisme

Notations et rappels

– Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $E_1,\dots,E_n$ désignent des ensembles finis, et si a est une fonction définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ et à valeurs réelles, alors on note

$$\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n} a(x_1,\dots,x_n) = \sum_{x_1\in E_1}\sum_{x_2\in E_2}\cdots\sum_{x_n\in E_n} a(x_1,\dots,x_n).$$

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que, pour un n-uplet $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires réelles finies sur un univers Ω, la **formule de transfert** s'écrit : pour toute fonction f définie sur $X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$ et à valeurs réelles,

$$\mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_n)\big) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathbb{P}\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\right).$$

– Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on note Λ_n l'ensemble $\{-1,1\}^n$.

– Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices de taille $n\times p$ à coefficients réels. Si $n=p$, on obtient l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de taille n, et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Problématique et objectifs

On étudie un modèle de ferromagnétisme : un matériau est constitué de particules qui peuvent, chacune, être orientées dans un sens ou un autre, Nord $(+1)$ ou Sud (-1). Elles sont soumises, d'une part à un champ magnétique extérieur, d'autre part à une température extérieure qui a tendance à les agiter dans tous les sens, et enfin à une interaction locale qui a tendance à les aligner dans le même sens.

Dans tout le sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et β est un réel strictement positif, qui représente l'inverse de la température.

On considère une matrice symétrique $J_n = (J_n(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice d'interaction. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $J_n(i,j)$ mesure l'interaction entre les particules numérotées i et j.

On définit une fonction H_n sur $\mathbb{R}_+\times\Lambda_n$ par

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\Lambda_n,\quad \forall h\in\mathbb{R}_+,\qquad H_n(h,x) = -\frac{\beta}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} J_n(i,j)\,x_i\,x_j - h\sum_{i=1}^n x_i.$$

Pour tous $x\in\Lambda_n$ et $h\in\mathbb{R}_+$, $H_n(h,x)$ mesure l'énergie de la configuration x couplée avec un champ magnétique extérieur d'intensité h. Le premier terme dans son expression est l'interaction locale des particules.

On définit alors, h étant fixé, un n-uplet de variables aléatoires $\left(X_{n,1},X_{n,2},\dots,X_{n,n}\right)$ tel que, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\Lambda_n$, la probabilité que $\left(X_{n,1},X_{n,2},\dots,X_{n,n}\right)$ prenne la valeur x est proportionnelle à $\mathrm{e}^{-H_n(h,x)}$, c'est-à-dire que, pour tout $x\in\Lambda_n$,

$$\mathbb{P}\Big(X_{n,1}=x_1,X_{n,2}=x_2,\dots,X_{n,n}=x_n\Big) = \frac{1}{Z_n(h)}\,\mathrm{e}^{-H_n(h,x)},$$

où

$$Z_n(h) = \sum_{y=(y_1,\dots,y_n)\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{-H_n(h,y)}.$$

On introduit la variable aléatoire $M_{n,h} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$, puis les fonctions

$$m_n : h \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{E}(M_{n,h}) \qquad \text{et} \qquad \psi_n : h \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{1}{n}\ln\big(Z_n(h)\big).$$

On note enfin, sous réserve d'existence, m et ψ les limites simples des suites de fonctions $(m_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$. La fonction m est appelée magnétisation et la fonction ψ, pression.

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes A et B.

- La partie A consiste en l'étude du spectre de la matrice d'interaction dans plusieurs cas particuliers. Elle est elle-même découpée en cinq sous-parties, lesquelles sont indépendantes, à l'exception de la sous-partie V, qui fait appel à des résultats de la sous-partie IV.
- La partie B utilise des notations introduites dans la première mais en est totalement indépendante. Elle consiste en l'étude de la convergence de la magnétisation. Elle est elle-même découpée en quatre sous-parties.
  - La sous-partie I comporte une seule question préliminaire.
  - La sous-partie II se concentre sur le modèle d'Ising. On y montre que les particules ne conservent pas d'aimantation lorsque l'on retire le champ magnétique extérieur.
  - Les sous-parties III et IV sont indépendantes de la sous-partie II. Elles explorent le cas particulier du modèle de Curie-Weiss. Dans la sous-partie III, on montre que la conservation de l'aimantation dépend de la valeur de β par rapport à 1. Dans la sous-partie IV, on étudie le comportement asymptotique du champ magnétique moyen au point critique $\beta = 1$ et sans champ magnétique extérieur.

Partie A – Étude du spectre de la matrice d'interaction

On fixe $h \in \mathbb{R}_+$.

I – Quelques inégalités générales

Q1. Expliquer pourquoi la matrice J_n est diagonalisable.

Q2. On note $\lambda_{\max}$ la plus grande des valeurs propres de J_n et $\lambda_{\min}$ la plus petite. Montrer que

$$\forall x \in \Lambda_n, \qquad n\,\lambda_{\min} \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} J_n(i,j)\,x_i\,x_j \leqslant n\,\lambda_{\max}.$$

Q3. En déduire que

$$\forall x \in \Lambda_n, \qquad n\left(-h - \beta\,\frac{\lambda_{\max}}{2}\right) \leqslant H_n(h,x) \leqslant n\left(h - \beta\,\frac{\lambda_{\min}}{2}\right).$$

Q4. Donner un encadrement de H_n dans le cas où J_n est de plus une matrice orthogonale distincte de $\pm I_n$.

Plus généralement, l'étude du spectre complet de J_n présente un intérêt physique pour l'étude du modèle. Dans cette partie, on s'intéresse à quelques cas particuliers.

II – Le modèle de Curie-Weiss

On note $J_n^{(\mathrm{C})}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent $\dfrac{1}{n}$, à l'exception de ses coefficients diagonaux, qui sont nuls. Chaque particule interagit donc de la même façon avec toutes les autres particules.

Q5. Déterminer le spectre de $U_n = n\,J_n^{(\mathrm{C})} + I_n$, puis celui de $J_n^{(\mathrm{C})}$.

III – Le modèle sinus

On note $J_n^{(\mathrm{S})}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad J_n^{(\mathrm{S})}(i,j) = \frac{2}{\sqrt{2\,n+1}}\sin\left(\frac{2\,\pi\,i\,j}{2\,n+1}\right).$$

Q6. Montrer que, pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{p} \cos(2\,k\,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\big((2\,p+1)\,x\big)}{\sin(x)} - 1\right).$$

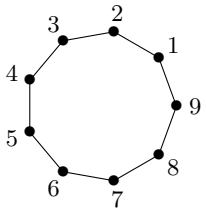
Q7. En déduire que $J_n^{(\mathrm{S})}$ est une matrice orthogonale symétrique.

IV – Le modèle d'Ising unidimensionnel

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $C_{n,k}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad C_{n,k}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i \in [\![1,k]\!] \text{ et } j = i+n-k) \text{ ou } (i \in [\![k+1,n]\!] \text{ et } j = i-k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $C_{n,n} = I_n$. On pose $J_n^{(1)} = C_{n,1} + C_{n,n-1}$.



Q8. Vérifier que, dans le cas où $n = 9$, $J_n^{(1)}$ est la matrice dont, pour tout $(i,j) \in [\![1,9]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si les sommets i et j du graphe ci-contre sont reliés par une arrête et vaut 0 sinon. Cela signifie que chaque particule n'est en interaction qu'avec ses deux voisins les plus proches.

Q9. Écrire, en langage *Python*, une fonction `mat_adj(graphe)` qui prend en argument un graphe de $m \in \mathbb{N}^*$ sommets, orienté ou non, représenté par un dictionnaire ayant pour clefs les entiers de 0 à $m-1$, et pour valeur associée à une telle clef la liste d'adjacence du sommet correspondant, et qui renvoie, en respectant l'énumération des sommets, la matrice d'adjacence de ce graphe.
Ainsi `mat_adj({0: [1, 2], 1: [0], 2: [0, 1, 2]})` doit renvoyer

```
[[0, 1, 1], [1, 0, 0], [1, 1, 1]].
```

Q10. Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $C_{n,1}^k = C_{n,k}$.

Q11. En déduire un polynôme annulateur de $C_{n,1}$, puis son spectre.

Q12. En déduire que $J_n^{(1)}$ admet les valeurs propres suivantes, énumérées avec leur multiplicité :

$$\lambda_k = 2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,k}{n}\right), \qquad k \in [\![0,n-1]\!].$$

V – Le modèle d'Ising bidimensionnel

Soit $(u,v,r,s) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant u \\ 1\leqslant j\leqslant v}} \in \mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$. On définit le produit de Kronecker de A par B, et on note $A \otimes B$, la matrice de $\mathcal{M}_{ur,vs}(\mathbb{R})$ qui est définie par $u\,v$ blocs de taille $r \times s$ de telle manière que, pour tout $(i,j) \in [\![1,u]\!] \times [\![1,v]\!]$, le bloc d'indice (i,j) soit $a_{i,j}\,B$. Autrement dit,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}\,B & a_{12}\,B & \cdots & a_{1v}\,B \\ a_{21}\,B & a_{22}\,B & \cdots & a_{2v}\,B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{u1}\,B & a_{u2}\,B & \cdots & a_{uv}\,B \end{pmatrix}.$$

Outre u, v, r et s, on se donne encore deux entiers naturels non nuls, w et t.

Q13. Montrer que $\otimes$ est une application bilinéaire de $\mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{ur,vs}(\mathbb{R})$.

Q14. Montrer que, pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{R})$, $A' \in \mathcal{M}_{v,w}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ et $B' \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$, $(A \otimes B)\,(A' \otimes B') = (A\,A') \otimes (B\,B')$.

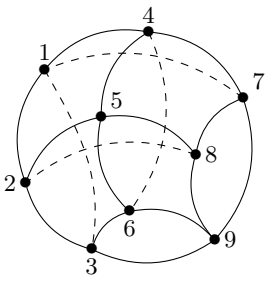
Q15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_u(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ est diagonalisable et

$$\mathrm{Sp}(A \otimes B) = \{\lambda\mu \,|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu \in \mathrm{Sp}(B)\}.$$

On pourra commencer par déterminer l'inverse du produit de Kronecker de deux matrices inversibles.

On pose $N = n^2$ et

$$J_N^{(2)} = I_n \otimes J_n^{(1)} + J_n^{(1)} \otimes I_n \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}).$$



Q16. Vérifier que, dans le cas où $n = 3$, $J_N^{(2)}$ est la matrice telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,9]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si les sommets i et j du graphe ci-contre sont reliés par une arête (les arêtes comptent qu'elles soient en pointillés ou en plein), et vaut 0 sinon.

Q17. On revient au cas général. Montrer que les valeurs propres de $J_N^{(2)}$ sont les $\lambda_j + \lambda_k$, pour $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$.

Partie B – Étude de la convergence de la magnétisation

Cette partie reprend les notations de la précédente mais les résultats sont totalement indépendants.

On se donne $h \in \mathbb{R}_+$.

I – Magnétisation spontanée

Q18. Justifier que la fonction ψ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\psi_n' = m_n$.

On admet que, lorsque ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $(\lim \psi_n)' = \lim \psi_n'$, c'est-à-dire $\psi' = m$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin on note (toujours sous réserve d'existence) $m^+ = \lim\limits_{h \to 0^+} m(h)$ la magnétisation spontanée : il s'agit du champ magnétique moyen lorsque l'on fait tendre le champ magnétique extérieur vers 0. S'il reste strictement positif, les particules conservent une aimantation. Ce n'est pas le cas s'il est nul.

II – Le modèle d'Ising

Dans cette sous-partie, on suppose que $J_n = J_n^{(1)}$, matrice introduite dans la sous-partie A-IV.

On adoptera la convention suivante : pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Lambda_n$, on note $x_{n+1} = x_1$ et $x_0 = x_n$.

Q19. Vérifier que

$$Z_n(h) = \sum_{x \in \Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\beta x_i x_{i+1} + h x_i}.$$

Q20. Montrer que, pour tous entiers naturels p et q supérieurs ou égaux à 2, pour toute matrice $M = (M(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant q} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M^p est

$$\sum_{(k_2,\ldots,k_p) \in [\![1,q]\!]^{p-1}} M(i,k_2) \Big(\prod_{r=2}^{p-1} M(k_r,k_{r+1}) \Big) M(k_p,j),$$

le produit valant 1 dans le cas où $p = 2$.

On pose $A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\beta - h} & \mathrm{e}^{-\beta - h} \\ \mathrm{e}^{-\beta + h} & \mathrm{e}^{\beta + h} \end{pmatrix}$.

Q21. Montrer que $Z_n(h) = \mathrm{tr}\,(A^n)$, où tr désigne la trace d'une matrice carrée.

Q22. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

Q23. Montrer alors que

$$\psi_n(h) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln\Big(\mathrm{e}^{\beta}\ \mathrm{ch}(h) + \sqrt{\mathrm{e}^{2\beta}\ \mathrm{ch}^2(h) - 2\,\mathrm{sh}(2\beta)} \Big).$$

Q24. En déduire une expression de la fonction m et conclure que $m^+ = 0$.

On rappelle que $m = \psi'$ lorsque ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

III – Le modèle de Curie-Weiss

Dans cette sous-partie, on suppose que $J_n = J_n^{(\mathrm{C})}$, matrice introduite dans la sous-partie A-II.

Q25. Pour tout $x \in \Lambda_n$, on pose $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_i$. Vérifier que

$$Z_n(h) = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}} \sum_{x\in\Lambda_n} \exp\Big(\frac{\beta}{2\,n}\,(s_n(x))^2 + h\,s_n(x)\Big).$$

Q26. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge. On admet que sa valeur est $\sqrt{2\,\pi}$.

Q27. Montrer que

$$\forall u \in \mathbb{R},\quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\qquad \mathrm{e}^{\frac{a\,u^2}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{u\,t - \frac{t^2}{2a}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\,\pi\,a}}.$$

Q28. En déduire que

$$Z_n(h) = \sqrt{\frac{n}{2\,\mathrm{e}^{\beta}\,\pi\,\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{x\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{(t+h)s_n(x)}\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2\beta}}\,\mathrm{d}t.$$

Q29. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(t+h)\,x_i} = (2\ \mathrm{ch}(t+h))^n\,.$$

On pose $G_h : x \longmapsto \dfrac{(x-h)^2}{2\,\beta} - \ln(2\,\mathrm{ch}(x))$.

Q30. Montrer que

$$Z_n(h) = \sqrt{\frac{n}{2\,\mathrm{e}^{\beta}\,\pi\,\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,G_h(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Q31. En distinguant les cas selon que $\beta \leqslant 1$ ou $\beta > 1$, montrer que G_h admet un *minimum* sur $\mathbb{R}_+$ atteint en un unique point u_h. Montrer de plus que

(a) si $\beta \leqslant 1$ et $h = 0$, alors $u_h = 0$;

(b) si $\beta > 1$, alors $u_h > 0$;

(c) quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$,

(i) $G_h'(u_h) = 0$;

(ii) $h = \beta\,G_0'(u_h)$;

(iii) $G_h''(u_h) > 0$ lorsque $h > 0$.

On suppose désormais que $h > 0$.

Q32. Justifier que G_h atteint son *minimum* sur $\mathbb{R}$ en un unique point qui est u_h.

Q33. On note $\widehat{G}_h : x \longmapsto G_h(x+u_h) - \min G_h$. Montrer que

$$\psi_n(h) = -G_h(u_h) - \frac{1}{2\,n}\,\ln\big(2\,\mathrm{e}^{\beta}\,\pi\,\beta\big) + \frac{1}{n}\ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\,\mathrm{d}t\right).$$

Q34. On pose $\gamma_h = G_h''(u_h)$ et on note $f_h : x \longmapsto \dfrac{\widehat{G}_h(x)}{x^2}$. Montrer que f_h est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier en posant $f_h(0) = \dfrac{\gamma_h}{2}$.

Q35. Justifier que f_h est minorée par un réel strictement positif c_h (que l'on ne cherchera pas à déterminer).

Q36. Montrer alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{2\,\pi}{\gamma_h}}$$

puis conclure que $\psi(h) = -G_h(u_h)$.

Q37. Montrer que G_0' réalise une bijection continue de $[u_0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$. En déduire que la fonction $u : h \longmapsto u_h$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q38. En déduire que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $m(h) = \dfrac{u(h) - h}{\beta}$ pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Q39. Montrer alors que $m^+ = 0$ si $\beta \leqslant 1$, et $m^+ > 0$ si $\beta > 1$.

IV – Convergence en loi pour la loi de Curie-Weiss au point critique

Dans cette sous-partie, on suppose toujours que $J_n = J_n^{(\mathrm{C})}$. De plus, on suppose que $\beta = 1$ et $h = 0$.

On note $Z_\infty = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right) \mathrm{d}x$ et on considère la fonction

$$\varphi_\infty : x \longmapsto \frac{1}{Z_\infty} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right).$$

Q40. Justifier que, pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$, la quantité

$$E_{n,f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{t}{n^{1/4}} + n^{1/4}\, M_n\right)\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\,\pi}}$$

est bien définie.

Une démonstration analogue à celle de la sous-partie précédente permet alors de montrer que, pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$,

$$E_{n,f} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \varphi_\infty(u)\, \mathrm{d}u.$$

Q41. Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$, et soit f une fonction K-lipschitzienne et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\left|E_{n,f} - \mathbb{E}\left(f\left(n^{1/4}\, M_n\right)\right)\right| \leqslant \frac{2\,K}{n^{1/4}\,\sqrt{2\,\pi}}$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(f\left(n^{1/4}\, M_n\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \varphi_\infty(u)\, \mathrm{d}u.$$

On se donne $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit k un entier naturel non nul tel que $k \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon\, Z_\infty}$. On définit la fonction

$$f_k : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u \leqslant x \\ 1 - k(u - x) & \text{si} \quad x < u \leqslant x + \frac{1}{k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q42. Montrer que f_k est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Q43. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}\left(n^{1/4}\, M_n \leqslant x\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{x+\frac{1}{k}} \varphi_\infty(u)\, \mathrm{d}u.$$

Q44. Montrer finalement que

$$\mathbb{P}\left(n^{1/4}\, M_n \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\, \mathrm{d}u.$$

◇ Fin ◇

M065 - 2 mai 2025 - 16:05:43

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Conditionnement d'une matrice et applications

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. On note $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par $M^\top$ la transposée d'une matrice M.

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désignera par $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|$, en posant pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ où par définition, pour tout X et Y de $\mathbb{R}^n$, $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\rho(M)$ le réel défini par : $\rho(M) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|$.

On note par ailleurs $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A – Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se propose dans cette partie de montrer que l'application N donnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$N : A \longmapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'en étudier quelques propriétés.

I – Étude de l'application N

Dans toute cette partie, on considère A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note L_1, L_2, …, L_n les n lignes et C_1, C_2, …C_n les n colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. En notant $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|L_i\|$, montrer que :

$$\|AX\| \leqslant M\sqrt{n}.$$

On pourra au préalable s'intéresser à la i^{e} ligne de la matrice AX et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Q2. En déduire que l'application N est bien définie, puis que : $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

Q3. Montrer que l'application N ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q4. En est-il de même pour l'application $S : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ M & \longmapsto & \rho(M) \end{array} \right.$?

Q5. Soit $\Delta \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ dont on note δ_1, …, δ_n les termes diagonaux.

Vérifier que $N(\Delta) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\delta_i|$.

Q6. À l'aide de l'application $X \longmapsto \|AX\|$, démontrer que : $N(A) = \max\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$.

Q7. Établir que : $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\| \leqslant N(A)\,\|X\|$.

Q8. Soit B une autre matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$N(AB) \leqslant N(A)\,N(B).$$

Q9. Montrer que : $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|C_i\| \leqslant N(A)$.

Q10. Déterminer $N(A)$ dans le cas où toutes les colonnes de A sont nulles, sauf la dernière.

En déduire $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II – Cas des matrices orthogonales et symétriques

Dans cette partie, A désigne une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q11. Déterminer $N(U)$.

Q12. Démontrer que $N(UA)$ et $N(A)$ sont égales.

Q13. En considérant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ où $\|X_0\| = 1$ tel que $\|AX_0\| = N(A)$, démontrer que $N(AU) = N(A)$.

Q14. On suppose de plus dans cette question uniquement que la matrice A est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : $N(A) = \rho(A)$.

Q15. Déterminer $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie B – Conditionnement d'une matrice pour la norme N

On définit sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'application notée cond par : $\mathrm{cond} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & N(A)\,N\left(A^{-1}\right) \end{array} \right.$

I – Quelques résultats sur le conditionnement

Dans toute cette sous-partie, A désigne une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer que : $1 \leqslant \mathrm{cond}(A)$.

Q17. Quel lien a-t-on entre $\mathrm{cond}(A)$ et $\mathrm{cond}(\alpha A)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$?

Q18. Démontrer que $\mathrm{cond}(U) = 1$.

Q19. Que dire de $\mathrm{cond}(UA)$, $\mathrm{cond}(AU)$ et de $\mathrm{cond}(A)$?

II – Un exemple de minoration du conditionnement d'une matrice

On suppose dans cette partie uniquement que $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ où : $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 2 & \text{si} \quad j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q20. On considère le vecteur X de $\mathbb{R}^n$ donné par : $X = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} 2^{n-k} E_k$.

Montrer que $AX = E_n$.

Q21. Déduire de ce qui précède que $N\left(A^{-1}\right) \geqslant 2^{n-1}$.

Q22. Justifier $\|AE_2\| > 2$, pour en déduire que $\mathrm{cond}(A) > 2^n$.

Partie C – Conditionnement pour une matrice réelle inversible

Q23. Soit S une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
On considère $\mathcal{C} = (V_1, \ldots, V_n)$ une base diagonalisante orthonormée de $\mathbb{R}^n$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, V_i est un vecteur propre associé à la valeur propre notée λ_i et où l'on suppose que $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ sont les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité.
Montrer que : $N(S) = \max_{\|X\|=1} |\langle SX, X\rangle|$.

Q24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.
Démontrer que la matrice $A^\top A$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour établir que $N\left(A^\top A\right) = N(A)^2$.

Q25. Déduire de ce qui précède que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle : $N(A) = \sqrt{\rho(A^\top A)}$.

Q26. On suppose dans cette question que A est une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
En remarquant que $A^\top A = A^{-1} A A^\top A$, démontrer que les matrices $AA^\top$ et $A^\top A$ ont exactement les mêmes valeurs propres.

Q27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On note μ_m et μ_M respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice $A^T A$ et où l'on suppose que l'on a $0 < \mu_m \leqslant \mu_M$.
Montrer que : $\operatorname{cond}(A) = \sqrt{\dfrac{\mu_M}{\mu_m}}$.

Q28. Exprimer $\operatorname{cond}(A)$ lorsque A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à l'aide des valeurs propres de A en remarquant que $A^\top A = A^2$.

Partie D – Calcul explicite de conditionnement

Dans toute cette partie, on désigne par T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par : $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de cette partie est de déterminer la valeur de $\operatorname{cond}(T)$ en commençant par déterminer les éléments propres de la matrice T.

Q29. Montrer que les valeurs propres de T sont réelles.

Q30. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \notin (n+1)\mathbb{Z}$. On considère le vecteur U_k de $\mathbb{R}^n$ donné par :

$$U_k = \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \ldots, \sin\left(\frac{(n-1)k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right)\right).$$

Montrer que U_k est un vecteur propre de T et préciser la valeur propre associée.

Q31. En déduire l'ensemble des valeurs propres de T.

Q32. Déterminer alors la valeur de $\operatorname{cond}(T)$.

Partie E – Inégalité de Kantorovich

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ l'ensemble de ses valeurs propres où l'on suppose que $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ et comptées avec leur ordre de multiplicité, et on désigne par $\mathcal{C} = (V_1, \ldots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

On se propose d'établir le résultat suivant, appelée inégalité de Kantorovich :

$$(K) : \quad \forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\|^4 \leqslant \langle AX, X\rangle \left\langle A^{-1}X, X\right\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cond}(A)}} + \sqrt{\operatorname{cond}(A)}\right)^2 \|X\|^4.$$

I – Une première démonstration

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ donné par $P = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) X + \lambda_1 \lambda_n$.

Q33. Exprimer $\text{cond}(A)$ à l'aide des valeurs propres de A.

Q34. On admet que l'application $(\cdot,\cdot)_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & \langle AX,Y \rangle \end{array} \right.$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\|^4 \leqslant \langle AX,X \rangle \left\langle A^{-1}X,X \right\rangle$.

Q35. Montrer que : $\quad \forall k \in \{1,\ldots,n\}, P(\lambda_k) \leqslant 0$.

Q36. Déterminer les valeurs propres de la matrice $B = A^{-1}P(A)$ et en déduire que $\langle BX,X \rangle \leqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

Q37. Pour $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, on désigne par f la fonction polynôme de degré 2 définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \langle AX,X \rangle \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 \lambda + \lambda_1 \lambda_n \left\langle A^{-1}X,X \right\rangle \end{array} \right.$$

Vérifier que $f(1) = \langle BX,X \rangle$, montrer que $f(0)f(1) \leqslant 0$, puis établir que :

$$(\star) : \quad (\lambda_1 + \lambda_n)^2 \|X\|^4 - 4 \langle AX,X \rangle \left\langle A^{-1}X,X \right\rangle \lambda_1 \lambda_n \geqslant 0.$$

Q38. Déduire de ce qui précéde l'inégalité de Kantorovich.

II – Une deuxième démonstration

On admet que, pour établir la relation (K), il suffit de la vérifier pour un vecteur X de norme 1.

Dans toute cette partie, $X = (x_1,\ldots,x_n)$ désigne donc un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 dont les coordonnées sont données dans la base $\mathcal{C}$.

On considère alors un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, et on définit la variable aléatoire Z par :

$$Z(\Omega) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \text{ et : } \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \mathbb{P}([Z = \lambda_i]) = x_i^2$$

Q39. Justifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour Z.

Q40. Justifier que Z et $\dfrac{1}{Z}$ admettent une espérance, puis les exprimer en fonction de $\langle AX,X \rangle$ et de $\left\langle A^{-1}X,X \right\rangle$.

Q41. En remarquant que la variable aléatoire $(Z - \lambda_1)(Z - \lambda_n)$ est négative, établir l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{Z} \leqslant \frac{\lambda_1 + \lambda_n - Z}{\lambda_1 \lambda_n}.$$

Q42. En déduire alors que : $\quad \mathbb{E}(Z)\,\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{Z}\right) \leqslant -\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left(\mathbb{E}(Z) - \dfrac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}\right)^2 + \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$.

Q43. Déduire de ce qui précède la seconde partie de l'inégalité de Kantorovich.

◇ Fin ◇

M073 - 28 avril 2025 - 14:51:20

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Attribution d'une valeur à des séries divergentes

Le 23 février 1913 Srinivasa Ramanujan écrivit une lettre au mathématicien Godfrey Hardy dans laquelle il présenta une théorie selon laquelle la somme infinie $1+2+\cdots+n+\cdots$ vaut $-\frac{1}{12}$. S'en est suivi tout un ensemble de recherches sur ce sujet...

L'objectif de ce problème est de présenter quelques situations où l'on attribue une valeur finie à "une somme infinie". On s'interesse en particulier au cas de la série de terme général n. Dans la première partie sont présentées deux situations qui dans les deux cas font apparaître la valeur $-\frac{1}{12}$, ce qui montre que cette valeur ne semble pas être fortuite. La deuxième partie traite plus particulièrement de la façon dont Ramunajan a étudié les sommes infinies en s'appuyant sur la formule de Euler-Maclaurin. La valeur qu'il octroie à ces sommes étant en quelque sorte un terme de compensation entre une somme et une intégrale. Enfin la troisième partie consiste à établir des développements dits tayloriens généralisés.

Notations et définition

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier qui satisfait $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

On dira qu'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ est à support compact dans $\mathbb{R}^+$ lorsqu'il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant K$, $\varphi(t) = 0$.

Partie A – Deux approches pour une valeur à 1+2+$\cdots$+ n + $\cdots$

I – Une première approche

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Q1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer $f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Q2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Q3. À l'aide de développements limités en 0, déterminer trois constantes réelles a, b et c telles qu'au voisinage de 0 $\dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + c + o(1)$.

Q4. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} - \dfrac{1}{x^2} \right)$.

II – Une deuxième approche

On considère dans cette partie une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$ et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit $K > 0$ telle que φ soit nulle sur $[K, +\infty[$. On pose ψ la fonction telle que pour tout $t \geqslant 0$, $\psi(t) = t\varphi(t)$. On peut alors observer que ψ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles sur $[K, +\infty[$.

II.1 – Une généralisation du théorème des sommes de Riemann pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dans cette sous-partie f désigne une fonction définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ et x est un réel strictement positif.

Q5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $a+nx \in]a,b]$.

Q6. Montrer que pour tout $L \geqslant 0$, $\left|L - \left\lfloor \frac{L}{x} \right\rfloor x\right| \leqslant x$.

Q7. Montrer que $x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t)dt = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)dt \right) - \int_{a+\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x}^{b} f(t)dt$.

Q8. Montrer que $\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor} f(a+nx) = \int_a^b f(t)dt$.

II.2 – Un développement asymptotique lorsque x tend vers 0 de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx)$

Soit x un réel strictement positif.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $R_{k,l}(x) = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(s)ds \right) dt$. On admet la formule de Taylor avec reste intégral : pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, pour tout $a \in I$, pour tout $b \in I$, $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Q9. Déterminer $\int_0^K \psi'(t)dt$ ainsi que $\int_0^K \psi''(t)dt$.

Q10. Déterminer $\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} nx\varphi(nx)$ ainsi que les valeurs de $\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(nx)$ et de $\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi''(nx)$.

Q11. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geqslant 0$, $\psi^{(l)}(t) = \int_K^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(l+k+1)}(s)ds$.

Q12. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} \int_{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor x}^{K} \psi^{(l)}(t)dt = 0$.

Q13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} \frac{R_{k,l}(x)}{x^k} = 0$.

Q14. Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi^{(l)}(t) - \psi^{(l)}(nx)dt = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+l)}(nx)dt \right) + R_{p,l+1}(x)$.

Q15. En déduire que
$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx)dt = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(nx) + \frac{x}{6} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi''(nx) + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$.

Q16. Montrer que $x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(nx) = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi'(nx) - \psi'(t)dt - \int_{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor x}^{K} \psi'(t)dt$.

Q17. En déduire que $\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(nx) = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi''(nx) - \frac{R_{1,2}(x)}{x} - \frac{1}{x} \int_{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor x}^{K} \psi'(t)dt$.

Q18. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt$.

Q19. Montrer que $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n\varphi(nx) = \frac{1}{x^2} \int_0^K \psi(t)dt - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt \right) - \frac{1}{x^2} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi(t)dt$.

Q20. En déduire que qu'il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx) = \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)$.

Partie B – Les sommes infinies au sens de Ramanujan

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

I – La formule d'Euler-Maclaurin

On considère la famille de polynômes $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de sorte que $B_0 = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B_p' = pB_{p-1}$ et $\int_0^1 B_p(x)dx = 0$. On admet dans cette partie l'existence et l'unicité des polynômes B_p. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_p = B_p(0)$ et $\widetilde{B}_p$ la fonction 1-périodique de sorte que $\widetilde{B}_p$ soit égale à B_p sur [0,1[. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{B}_p(x) = B_p(x - \lfloor x \rfloor)$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $r_{p,a} = \int_1^a \frac{\widetilde{B}_p(t)}{p!} f^{(p)}(t)dt$.

Q21. Déterminer B_1 et B_2.

Q22. Montrer que pour tout entier naturel p, $B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X)$.

Q23. Montrer que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, $b_p = B_p(1)$ et pour tout $p \geqslant 3$ impair $b_p = 0$.

Q24. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t)dt = \frac{B_{p+1}(1)f^{(p)}(k+1) - B_{p+1}(0)f^{(p)}(k)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{\widetilde{B}_{p+1}(t)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t)dt.$$

Q25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$$f(1) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(t)dt + \frac{f(1)+f(n)}{2} + r_{1,n}.$$

Q26. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f(1) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(t)dt + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \sum_{l=1}^{p} \frac{b_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1) \right) + r_{2p+1,n}.$$

II – La constante de Ramanujan

On suppose dans cette partie qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant q$, $f^{(2p+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $f^{(2p+1)}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On pose, **sous réserve d'existence**,

$C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_1(t)f'(t)dt$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$C_p = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)dt - \sum_{l=1}^{p} \frac{b_{2l}}{(2l)!} f^{(2l-1)}(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\widetilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)dt.$

Q27. Montrer pour tout $p \geqslant q$ que C_p est bien définie et ne dépend pas de l'entier p. On note à présent $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k)$ la valeur de C_p, où $p \geqslant q$.

Q28. Déterminer $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} 1$ ainsi que $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k$ et $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k^2$.

Q29. On suppose dans cette question que $q = 0$ et que la suite $(f(n))$ converge vers 0. Montrer que $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k\geqslant 1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt\right)$. Qu'obtient-on si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge ?

Partie C – Développements tayloriens généralisés

On note E l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme. Si $g \in E$, on note $\|g\|_\infty$ la norme uniforme de g sur E. On admettra qu'une forme linéaire φ est continue sur E si et seulement si il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que, pour tout $g \in E$, $|\varphi(g)| \leqslant C\|g\|_\infty$.

On considère φ une forme linéaire continue sur E vérifiant $\varphi(t \mapsto 1) = 1$. Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = nP_{n-1}$ et $\varphi(P_n) = 0$. On pose de plus, sous réserve d'existence, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_k(x)}{k!}t^k$. f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

I – Les formules de Taylor généralisés

Q30. Montrer que la suite (P_n) existe bien et est unique.

Q31. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_{n+1}\|_\infty \leqslant (n+1)(1+C)\|P_n\|_\infty$.

Q32. Montrer qu'il existe $R > 0$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in]-R,R[$, $S(x,t)$ existe.

Q33. Montrer que pour tout $t \in]-R,R[$, $x \longmapsto S(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Q34. Montrer que pour tout $t \in]-R,R[$ il existe un réel $\alpha(t)$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $S(x,t) = \alpha(t)e^{tx\cdot}$.

Q35. Montrer que pour tout $t \in]-R,R[$, $\varphi(x \mapsto S(x,t)) = 1$. En déduire la valeur de $\alpha(t)$.

Q36. Justifier que la famille de polynômes (B_n) définie en B-I existe et est unique et montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $g : t \mapsto \begin{cases} \frac{te^{tx}}{e^t-1} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que ce développement est $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(x)}{k!}t^k$.

Q37. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{P_k(x)}{k!}f^{(k)}(y) - \frac{P_k(y)}{k!}f^{(k)}(x)\right) + \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!}f^{(p+1)}(t)dt.$$

Q38. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{p}\frac{P_k(x)}{k!}\varphi\left(y \mapsto f^{(k)}(y)\right) + \varphi\left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!}f^{(p+1)}(t)dt\right).$$

Q39. Justifier que l'application linéaire $\varphi : g \mapsto g(0)$ est continue sur E. Qu'obtient-on pour cette application ?

Q40. Soit $j \in \mathbb{N}$. À l'aide de la fonction $x \mapsto f(x+j)$ montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$f(j) = \sum_{k=0}^{p}\frac{P_k(0)}{k!}\varphi\left(y \mapsto f^{(k)}(y+j)\right) - \varphi\left(y \mapsto \int_j^{y+j} \frac{P_p(y-t+j)}{p!}f^{(p+1)}(t)dt\right).$$

II – Formule d'Euler-Boole

Dans la suite φ est définie par, pour tout $g \in E$, $\varphi(g) = \frac{1}{2}(g(0)+g(1))$. Les polynômes P_n sont alors notés E_n et sont appelés polynômes d'Euler. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = E_n(0)$.

Q41. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in]-R,R[$, pour tout $x \in [0,1]$, $\frac{2e^{tx}}{e^t+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{E_k(x)}{k!}t^k$.

Q42. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$.

Q43. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

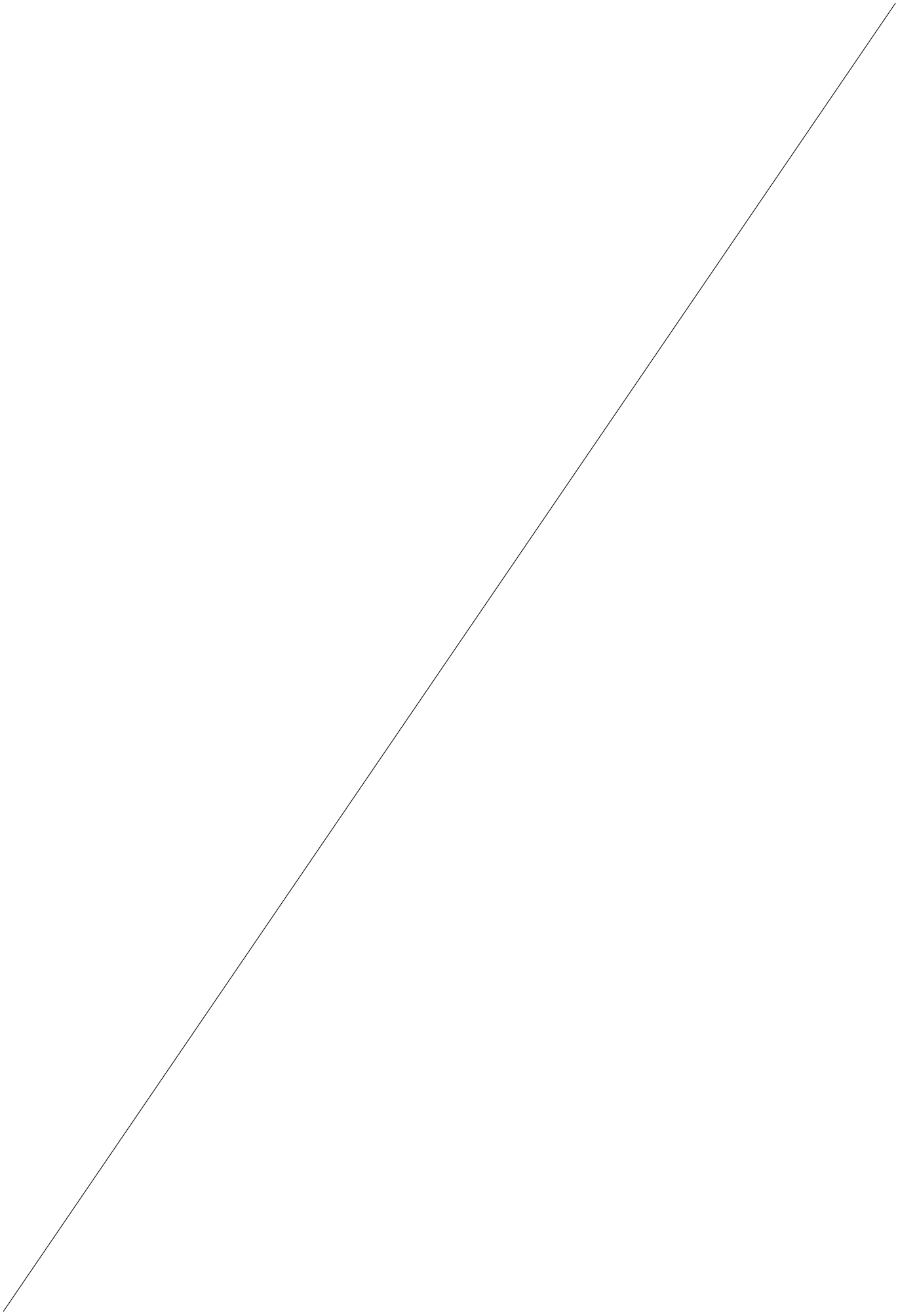
$$f(j) = \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{2}(f^{(k)}(j) + f^{(k)}(j+1)) \frac{e_k}{k!} \right) - \frac{1}{2} \int_j^{j+1} \frac{(-1)^p E_p(t-j)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

Q44. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{E_n}(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor + n} E_n(x - \lfloor x \rfloor)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f(1) - f(2) + \cdots (-1)^{n-1} f(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} f^{(k)}(1) \frac{e_k}{k!} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{k=0}^{p} f^{(k)}(n+1) \frac{e_k}{k!} + \frac{1}{2} \int_1^{n+1} \frac{\widetilde{E}_p(t)}{p!} f^{(p+1)}(t) dt.$$

◇ Fin ◇

M038 - 2 mai 2025 - 16:06:55



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

4 heures — Calculatrice autorisée

2025

Un principe d'incertitude matriciel

Notations

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note Id l'application identité de E. Un nombre complexe λ est valeur propre d'un endomorphisme ϕ de E si $\mathrm{Ker}(\phi-\lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\}$. On note $\mathrm{VP}(\phi)$ l'ensemble des valeurs propres de ϕ. Pour tout $\lambda \in \mathrm{VP}(\phi)$, $\mathrm{Ker}(\phi-\lambda\mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel de E, que l'on note $E_\lambda(\phi)$.

Si $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ est un élément de $\mathbb{R}^N$, on note $\|x\|$ sa norme euclidienne canonique : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.

On note $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille N à coefficients réels.
On note I_N la matrice identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et, si $(\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^N$, on note $\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$.

L'ensemble des valeurs propres d'un élément A de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{Sp}(A)$.
On note $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille N. On note $\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_N^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles positives (resp. définies positives) de taille N.

Partie A – Autour du principe d'incertitude d'Heisenberg

Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables.

I – Valeurs propres de l'opérateur dérivée seconde

Q1. Pour tout $f \in E$, on pose $\ell(f) = -f''$. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme ℓ de E.

Q2. Montrer que $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{VP}(\ell)$. Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$, déterminer une base de $E_\lambda(\ell)$.

II – Cas des fonctions gaussiennes

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $G_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}at^2} \end{cases}$ (gaussienne de paramètre a). On admet la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

On fixe un réel a strictement positif.

Q3. Montrer pour tout réel ξ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}\mathrm{d}t$.

On notera dans la suite $\widehat{G_a} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}\mathrm{d}t \end{cases}$

Q4. Démontrer que l'application $\widehat{G_a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q5. Démontrer que $\widehat{G_a}$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du premier ordre que l'on explicitera.
En déduire que $\widehat{G_a} = \sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}\, G_{1/a}$.

Q6. Démontrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a^2(u)\mathrm{d}u$ sont convergentes et déterminer leurs valeurs.

On définit le réel positif $\sigma_{\mathrm{F}}(G_a)$ (resp. $\sigma_{\mathrm{T}}(G_a)$) par la relation

$$\sigma_{\mathrm{F}}^2(G_a) = \frac{1}{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(u)^2\mathrm{d}u}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\widehat{G_a}(u)^2\mathrm{d}u$$

$$\left(\text{resp. } \sigma_{\mathrm{T}}^2(G_a) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(u)^2\mathrm{d}u}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a(u)^2\mathrm{d}u.\right)$$

Q7. Démontrer l'égalité $\sigma_{\mathrm{T}}^2(G_a) = \gamma(\sigma_{\mathrm{F}}^2(G_a))$, où $\gamma : x \mapsto \frac{1}{4x}$.

Pour f un élément non nul d'une certaine classe de fonctions $\mathcal{S}$, on a $\sigma_{\mathrm{T}}^2(f)\sigma_{\mathrm{F}}^2(f) \geqslant \frac{1}{4}$ (inégalité d'Heisenberg). Si f représente un signal réel, $\sigma_{\mathrm{T}}^2(f)$ représente son étalement dans le domaine temporel et $\sigma_{\mathrm{F}}^2(f)$ son étalement dans le domaine fréquentiel. Le principe d'incertitude d'Heisenberg dit alors qu'on ne peut pas localiser précisément et simultanément un signal dans les deux domaines.
Les multiples des gaussiennes sont les seuls éléments de $\mathcal{S}$ qui réalisent l'égalité dans l'inégalité d'Heisenberg.
L'application $\gamma : x \mapsto \frac{1}{4x}$ vérifie donc $\gamma(x) = \min\limits_{\substack{f\in\mathcal{S}\setminus\{0\}\\ \sigma_{\mathrm{F}}^2(f)=x}} \sigma_{\mathrm{T}}^2(f)$, pour tout réel x strictement positif.

Le but du sujet dans la suite est d'établir pour des signaux discrets (éléments de $\mathbb{R}^N$), un résultat semblable, relativement à une matrice A donnée (principe d'incertitude matriciel). Il s'agira en particulier de définir dans ce contexte les analogues de σ_{T}^2, σ_{F}^2 et γ et d'en étudier certaines propriétés.

Partie B – Laplacien d'une matrice

Dans cette partie B, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille N, à coefficients dans $\{0,1\}$, de diagonale nulle. Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est un élément de $\mathcal{G}$ on définit

$$\delta(A) = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=1}^{N} a_{1,k}, \sum_{k=1}^{N} a_{2,k}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} a_{N,k}\right) \text{ et } L_A = \delta(A) - A.$$

I – Étude d'un élément de $\mathcal{G}$

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q8. Déterminer la matrice L_B. Que vaut $\mathrm{rg}(L_B)$?

Q9. Calculer L_B^2. En déduire $\mathrm{Sp}(L_B)$ et pour tout réel $\lambda \in \mathrm{Sp}(L_B)$, déterminer $\dim(E_\lambda(L_B))$.

Q10. La matrice L_B est-elle élément de $\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$? de $\mathcal{S}_N^{++}(\mathbb{R})$?

II – Étude du noyau des éléments de $\mathcal{G}$

Soit A un élément de $\mathcal{G}$. On note $\mathbb{1}_N$ le vecteur colonne de taille N ne contenant que des 1.

Q11. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(\mathbb{1}_N) \subset \mathrm{Ker}(L_A)$. A-t-on l'égalité ?

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

On rappelle qu'on peut identifier les éléments de $\mathbb{R}^N$ et les matrices colonnes de taille N. Ainsi, dans les questions suivantes, x est identifié à la matrice colonne de taille N dont les coefficients sont x_1, x_2, …, x_N, et sa transposée x^T est identifiée à la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{pmatrix}$.

Q12. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} a_{i,j}x_i^2 = x^T\,\delta(A)\,x.$

Q13. En déduire :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{i,j}(x_i-x_j)^2 = \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2} a_{i,j}(x_i-x_j)^2 = x^T L_A x. \qquad (\star)$$

Q14. En déduire que $L_A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$.

Q15. On dit qu'un élément $A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2}$ de $\mathcal{G}$ vérifie la propriété (Γ) lorsque pour tout $(i,j)\in[\![1,N]\!]^2$ tel que $i\neq j$, il existe un entier $n\geqslant 2$ et des éléments deux à deux distincts $i_1,i_2,\ldots,i_n$ de $[\![1,N]\!]$, vérifiant :

$$i_1=i, \quad \forall k\in[\![1,n-1]\!], a_{i_k,i_{k+1}}=1 \quad \text{et } i_n=j.$$

Dans cette question, on suppose que A vérifie la propriété (Γ). Montrer que $\mathrm{Ker}(L_A)=\mathrm{Vect}(\mathbb{1}_N)$.

Partie C – Région de faisabilité, courbe d'incertitude

Dans la partie C et la partie D, on suppose que $N\geqslant 4$ et on considère l'élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

I – Définitions de σ_{M}^2 et σ_{S}^2

Q16. Montrer que A est un élément de $\mathcal{G}$ vérifiant la propriété (Γ) définie dans la question **Q15**, sous-partie B.II.

Q17. En utilisant la partie précédente, montrer qu'il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)\in(\mathbb{R}_+)^N$ tel que :

$$\mathrm{Sp}(L_A)=\{\lambda_i, i\in[\![1,N]\!]\} \quad \text{et} \quad 0=\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots\leqslant\lambda_N.$$

Q18. Déterminer L_A et $\mathrm{rg}(L_A-I_N)$. En déduire $\mathrm{Sp}(L_A)$. On vérifiera que $\dim(E_{\lambda_N}(L_A))=1$.

On pose $D=\mathrm{diag}(0,1,1,\ldots,1)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$, on définit :

$$\sigma_{\mathrm{M}}^2(x)=\frac{1}{\|x\|^2}\,x^TDx \;\text{ et }\; \sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=\frac{1}{\|x\|^2}\,x^TL_Ax.$$

Q19. Soit $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$. Démontrer que $\lambda_1\leqslant\sigma_{\mathrm{S}}^2(x)\leqslant\lambda_N$.
Montrer que :

i) pour tout $\mu\in\mathbb{R}^*, \sigma_{\mathrm{S}}^2(\mu x)=\sigma_{\mathrm{S}}^2(x)$;

ii) $\sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=\lambda_1$ si et seulement si $x\in E_{\lambda_1}(L_A)$.

On **admet** dans la suite que $\sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=\lambda_N$ si et seulement si $x\in E_{\lambda_N}(L_A)$.

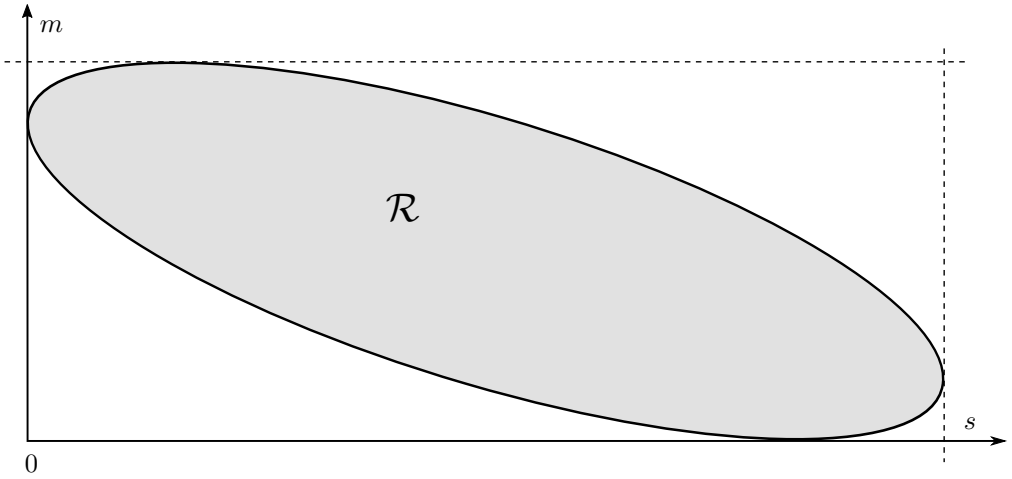
II – Région de faisabilité

On rappelle que la matrice A a été définie au début de la partie C.

On définit la *région de faisabilité* de A et on note $\mathcal{R}$ l'ensemble

$$\mathcal{R}=\left\{(s,m)\in(\mathbb{R}_+)^2 \,|\, \exists x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\},\ \sigma_{\mathrm{S}}^2(x)=s,\ \sigma_{\mathrm{M}}^2(x)=m\right\}.$$

À titre indicatif, la figure ci-après représente $\mathcal{R}$ pour une certaine valeur de N. Le but de cette partie est de démontrer certaines propriétés observables sur cette figure.



Q20. Montrer que $\mathcal{R} \subset [0,\lambda_N] \times [0,1]$.

Q21. Soit $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tel que $\sigma_S^2(x) = 0$. Montrer que $\sigma_M^2(x) = \frac{N-1}{N}$. En déduire que $\mathcal{R}$ intersecte la droite d'équation $s = 0$ en un unique point dont on précisera les coordonnées.

Q22. Démontrer de même que $\mathcal{R}$ intersecte en un unique point dont on déterminera les coordonnées chacune des deux droites suivantes : la droite d'équation $s = \lambda_N$ et la droite d'équation $m = 0$.

III – La courbe d'incertitude γ_-

Q23. Soient $e_1 \in E_{\lambda_1}(L_A)$ et $e_N \in E_{\lambda_N}(L_A)$ tels que $\|e_1\| = 1$ et $\|e_N\| = 1$. On considère $x_t = (1-t)e_1 + te_N$ où $t \in [0,1]$.
Justifier que l'application $\varphi : t \mapsto \sigma_S^2(x_t)$ est définie sur $[0,1]$. Démontrer que, pour tout $s \in [0,\lambda_N]$, il existe $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tel que $\sigma_S^2(x) = s$.

Q24. En déduire l'existence de la quantité $\min\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ \sigma_S^2(x)=s}} \sigma_M^2(x)$ pour tout $s \in [0,\lambda_N]$.

La question **Q24** permet de définir $\gamma_- : \begin{cases} [0,\lambda_N] & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ s & \longmapsto \min\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ \sigma_S^2(x)=s}} \sigma_M^2(x) \end{cases}$.

Q25. On **admet** que $\mathcal{R}$ est un ensemble convexe. Démontrer que γ_- est une fonction convexe sur $[0,\lambda_N]$.

Partie D – Formule explicite pour la courbe d'incertitude γ_-

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit un élément $M(\alpha)$ de $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ par la relation $M(\alpha) = D - \alpha L_A$. On note

$$\mu_\alpha^- = \min\{\mathrm{Sp}(M(\alpha))\} \text{ et } \mu_\alpha^+ = \max\{\mathrm{Sp}(M(\alpha))\}.$$

Q26. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha))$ tel que $\|y\| = 1$. Démontrer que $\sigma_M^2(y) = \gamma_-(\sigma_S^2(y))$.

On fixe $\alpha \neq 0$.

Q27. Montrer que $\mathrm{rg}(M(\alpha) - (1-\alpha)I_N) = 2$. En déduire $\mu_\alpha^- \leqslant 1 - \alpha \leqslant \mu_\alpha^+$.

Q28. Soient a, b et c trois réels vérifiant $a \leqslant b$.
On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les racines du trinôme du second degré $x \mapsto (x-a)(x-b) + \lambda(x-c)$ sont réelles. Démontrer que $a \leqslant c \leqslant b$.

Q29. On note $E_{1,1}$ l'élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui d'indice (1,1) qui vaut 1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $N(\lambda) = M(\alpha) - \lambda E_{1,1}$. Donner une relation entre les polynômes caractéristiques de $N(\lambda)$ et de $M(\alpha)$. En déduire $\mu_\alpha^- < 1 - \alpha < \mu_\alpha^+$.

Q30. Soit $V = \Big\{(v_1,\ldots,v_N) \in \mathbb{R}^N, v_1 = 0 \text{ et } \sum_{i=2}^{N} v_i = 0\Big\}$.

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ dont on déterminera la dimension d et une base.

Q31. Montrer $E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha)) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_2) \in \mathbb{R}^N, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $x(\theta) = \Big(\cos(\theta), \frac{1}{\sqrt{N-1}}\sin(\theta), \ldots, \frac{1}{\sqrt{N-1}}\sin(\theta)\Big)$ un vecteur unitaire de $E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha))$.

Q32. À l'aide de la formule $(\star)$ établie à la question **Q13** sous-partie B.II, démontrer l'égalité :

$$\sigma_{\mathrm{S}}^2(x(\theta)) = \frac{N}{2} + \frac{N-2}{2}\cos(2\theta) - \sqrt{N-1}\sin(2\theta).$$

Q33. En déduire : $-\sin(2\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{N-1}}\left[\sigma_{\mathrm{S}}^2(x(\theta)) + (N-2)\sigma_{\mathrm{M}}^2(x(\theta)) - (N-1)\right]$.

Q34. Démontrer

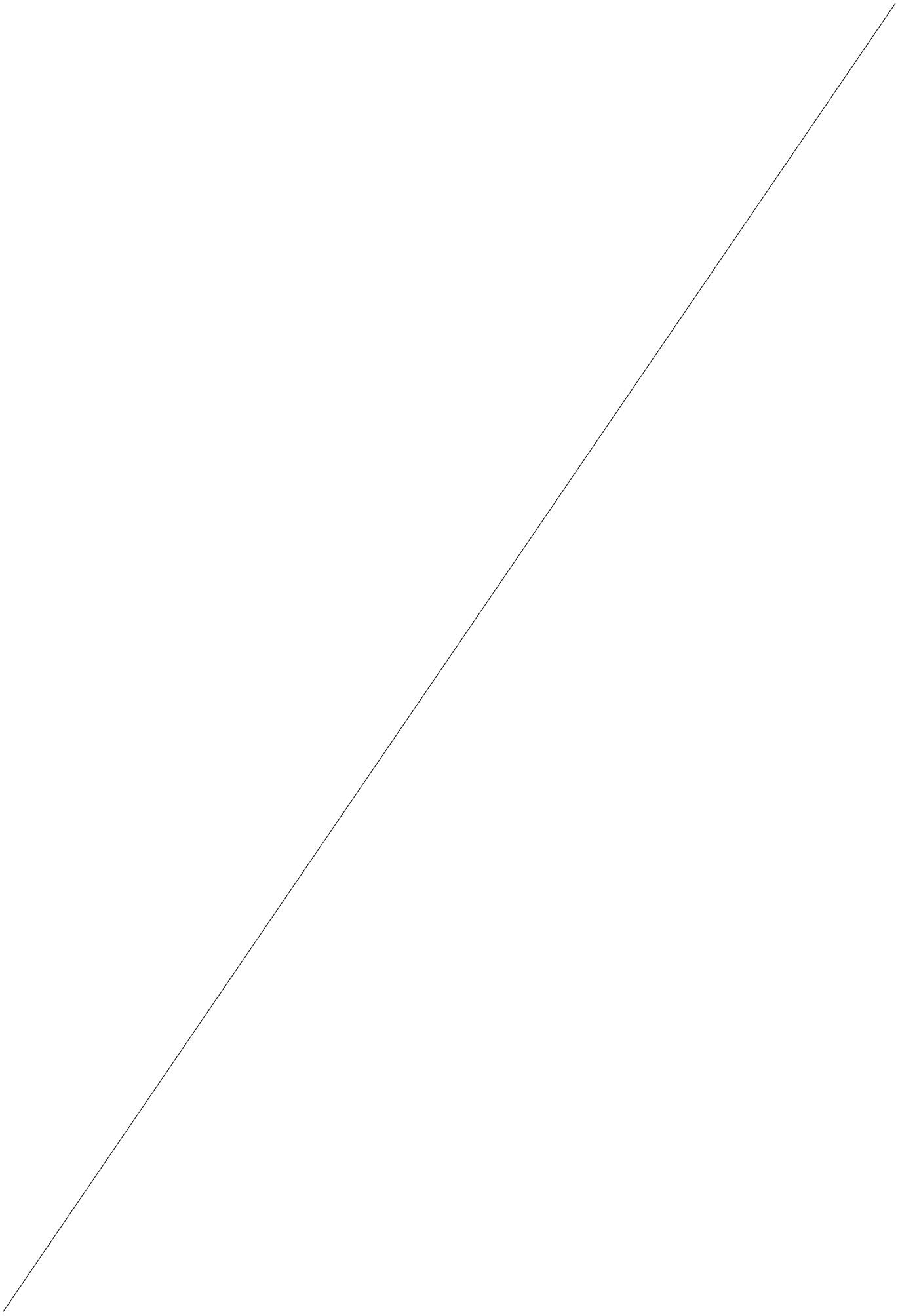
$$(N-1)(1-2\sigma_{\mathrm{M}}^2(x(\theta)))^2 + \left(\sigma_{\mathrm{S}}^2(x(\theta)) + (N-2)\sigma_{\mathrm{M}}^2(x(\theta)) - (N-1)\right)^2 = N-1.$$

Q35. En déduire que :

$$\forall s \in [0,\lambda_N], \gamma_-(s) = \frac{-s(N-2) - N(N-1) - 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}}{N^2}.$$

◇ Fin ◇

M076 - 28 avril 2025 - 14:51:16



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

4 heures — Calculatrice autorisée

2025

Notations

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

où, pour tout $k \in [\![-n,n]\!]$, $c_k \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n. C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 2π-périodiques. Pour $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $h > 0$, on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leqslant h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Partie A – Préliminaires

Q1. Montrer que si g est la fonction sinus, alors, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant h$.

Q2. (a) Montrer que, pour tous $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $h > 0$, $\omega_g(h)$ est un réel bien défini.

(b) On suppose que $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$. Montrer que, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant h\|g'\|_\infty$. En déduire que $\lim\limits_{h\to 0} \omega_g(h) = 0$.

On admet que $\lim\limits_{h\to 0} \omega_g(h) = 0$ *est vrai pour tout* $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q3. Soit h et h' deux réels strictement positifs et soit $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.

(a) Montrer que, si $h \leqslant h'$, alors $\omega_g(h) \leqslant \omega_g(h')$.

(b) Montrer que $\omega_g(h + h') \leqslant \omega_g(h) + \omega_g(h')$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel λ strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leqslant n\omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leqslant (1 + \lambda)\omega_g(h).$$

Q4. Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q5. Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x - t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que Δ définit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

Partie B –

I – La fonction J_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonctions φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q6. Montrer que, pour tout réel t n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4.$$

Q7. Montrer que φ_n et φ_n^2 appartiennent à $\mathcal{T}_n$, puis que f_n appartient à $\mathcal{T}_{2n}$.

Q8. Montrer qu'il existe un réel strictement positif c_n tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose désormais $J_n = c_n f_n$, de sorte que J_n est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

II – Une majoration de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q9. Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} t f_n(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t}$.

Q10. Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}t \leqslant \sin t \leqslant t$.

Q11. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} t f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$.

Q12. En déduire également que $\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$.

Q13. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{n+1}$.

III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $T_n g$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que $(T_n g)$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Q14. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que $|T_n g(x) - g(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,|g(x-t) - g(x)|\,\mathrm{d}t$.

Q15. *Le cas $\mathcal{C}^1$.* On suppose, seulement dans cette question, que g est $\mathcal{C}^1$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leqslant \frac{a\|g'\|_\infty}{n+1},$$

où le réel a a été défini à la question **Q13**.

(b) Conclure que $(T_n g)$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Q16. *Le cas $\mathcal{C}^0$.* Dans cette question, on ne suppose plus que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
On rappelle le résultat admis à la question **Q2** : $\lim\limits_{h\to 0} \omega_g(h) = 0$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels t et x,

$$|g(x-t) - g(x)| \leqslant \big(1 + n|t|\big)\omega_g(1/n).$$

(b) En déduire qu'il existe $b > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leqslant b\,\omega_g(1/n).$$

(c) Conclure que la suite $(T_n g)$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Partie C –

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

I –

Dans cette sous-partie on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note T le polynôme $X^n + 1$.

Q17. Montrer que T admet n racines simples dans $\mathbb{C}$.

On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de T.

Q18. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\prod_{j\neq k}(z_k - z_j) = T'(z_k)$.

Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$. On considère la fonction rationnelle F donnée par $F = \dfrac{X^\ell}{X^n + 1}$.

On rappelle que, par décomposition en éléments simples de F, il y a existence et unicité de $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$ et de E dans $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

Q19. Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mu_k = -\dfrac{z_k^{\ell+1}}{n}$ et que E est soit le polynôme nul, soit le polynôme constant égal à 1.

Q20. Calculer $F'(1)$ et en déduire que $\ell = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}$.

Q21. En déduire que :

(a) pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\quad XP'(X) = \dfrac{n}{2}P(X) + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}$.

II –

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

Q22. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

Q23. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1 et si $z \neq 1$, alors $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ est un réel négatif.

Q24. À l'aide de **Q21**, en déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\| \leqslant n\|P\|$.

Q25. En déduire que pour tout $q \in \mathcal{T}_n$, $\|q'\|_\infty \leqslant 3n\|q\|_\infty$.

Partie D – Fonctions höldériennes

Soit g une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $\alpha \in]0,1]$.
On dit que g est α-höldérienne s'il existe $K > 0$ tel que, pour tous réels x et y de l'intervalle I, $|g(x)-g(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$.

I – Exemples

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

Q26. Soit y un réel positif, montrer que pour tout $x \geqslant y$ on a : $0 \leqslant x^\alpha - y^\alpha \leqslant (x-y)^\alpha$.

Q27. En déduire que h_α est α-höldérienne sur $\mathbb{R}_+$.

Q28. Soit $\beta \in]0,1]$ tel que $\beta \neq \alpha$. Montrer que h_α n'est pas β-höldérienne.

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$k : x \mapsto \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q29. Soit $y \in]0,1]$. Montrer que pour tout $x \in [0,1-y]$, $(x+y)\ln(x+y) - x\ln x \leqslant (y-1)\ln(1-y)$.

Q30. En déduire que k est α-höldérienne sur $[0,1]$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

II – Espace $\mathcal{H}^\alpha_{2\pi}$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans la suite du problème, pour $\alpha \in]0,1[$, on note $\mathcal{H}^\alpha_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions α-höldériennes 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on pose $\delta_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{T}_n} \|f-p\|_\infty$.

Q31. Montrer que $\mathcal{H}^\alpha_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Q32. Montrer que si $g \in \mathcal{H}^\alpha_{2\pi}$, alors $\delta_n(g) \underset{n\to+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$.

III – Étude d'une réciproque

L'objectif de cette sous-partie est d'établir une réciproque à la question **Q32**.

On fixe un réel $\alpha \in]0,1[$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ telle que $\delta_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$. Il existe ainsi un réel $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n(f) \leqslant \dfrac{C}{n^\alpha}$.

Q33. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $q_n \in \mathcal{T}_n$ tel que $\delta_n(f) = \|f - q_n\|_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère un polynôme $p_n \in \mathcal{T}_{2^n}$ tel que $\|f - p_n\|_\infty = \delta_{2^n}(f)$.

Q34. Montrer, en appliquant l'inégalité établie à la question **Q25**, qu'il existe un réel $C' > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty \leqslant C' 2^{n(1-\alpha)}.$$

Q35. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|p'_n\|_\infty \leqslant \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} 2^{n(1-\alpha)}.$$

Q36. En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|p'_n\|_\infty \leqslant A 2^{(1-\alpha)n}.$$

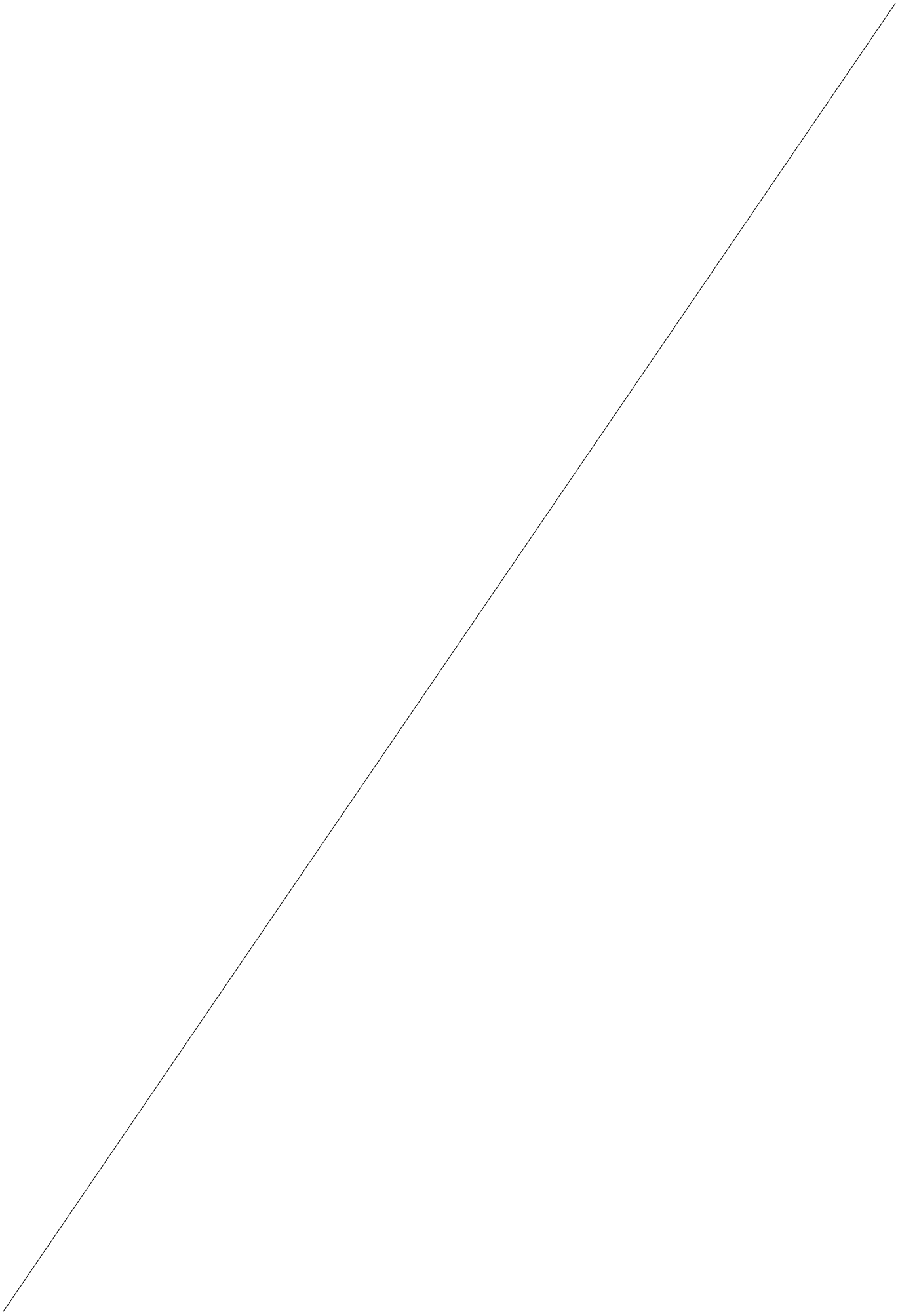
Q37. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leqslant C 2^{1-n\alpha} + A 2^{(1-\alpha)n} |x - y|$.

Q38. En déduire que f est α-höldérienne.

Indication : lorsque $0 < |x-y| \leqslant 1$, on pourra choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant |x-y| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et majorer $|f(x)-f(y)|$ à l'aide de la question précédente.

◇ Fin ◇

M074 - 2 mai 2025 - 16:06:11



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Introduction à l'optimisation convexe

L'optimisation est le domaine des Mathématiques dont le but est d'établir des méthodes pour la recherche de minimum d'une fonction à valeur réelle. Le problème traite de la recherche de minimum pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, et plus spécifiquement sous diverses hypothèses de convexité des applications.

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel $\langle . \mid . \rangle$ et de sa norme associée $\| . \|$. Ainsi, pour $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\vec{v} = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$:

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \cdots + x_n x'_n \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Le vecteur nul est noté $\vec{0}$.

Pour une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ on note l'image par f d'un vecteur $\vec{u} = (x, y)$, soit $f(x, y)$ soit $f(\vec{u})$. Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$, le vecteur gradient de f en $\vec{u}$ est noté $\nabla f(x, y)$ ou $\nabla f(\vec{u})$; c'est le vecteur :

$$\nabla f(\vec{u}) = \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \, , \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \in \mathbb{R}^2$$

On dit que f atteint en $\vec{u}_* \in \mathbb{R}^2$ un minimum $f(\vec{u}_*)$ si pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $f(\vec{u}) \geqslant f(\vec{u}_*)$.
On dit alors que f admet un minimum.

Le problème comporte 4 parties. Les parties 3 et 4 sont indépendantes entre elles.

Partie A – Généralités

On établit quelques résultats préliminaires ainsi que quelques résultats généraux sur l'optimisation que l'on applique pour interpréter la loi de Descartes de réfraction de la lumière.

I – Préliminaires : propriétés de la norme euclidienne

Dans cette partie n désigne un entier naturel non nul.

Q1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$; montrer que $\|\lambda.\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$ et que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$.

Q2. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Q3. En déduire l'inégalité triangulaire : $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \, . \tag{1}$$

Q4. Montrer que : $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\big| \, \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \, \big| \leqslant \|\vec{u} + \vec{v}\| \, .$$

(On pourra appliquer deux fois l'inégalité triangulaire (1) avec $(\vec{u} + \vec{v})$ et $-\vec{v}$ puis avec $(\vec{u} + \vec{v})$ et $-\vec{u}$.)

II – Tout minimum est un point critique

Q5. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable qui atteint son minimum en x_*, c'est-à-dire tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant g(x_*)$. Soient x_1, x_2 deux réels tels que $x_1 < x_* < x_2$. Déterminer les signes des deux taux d'accroissement :

$$\frac{g(x_1) - g(x_*)}{x_1 - x_*} \qquad \text{et} \qquad \frac{g(x_2) - g(x_*)}{x_2 - x_*}$$

En déduire que $g'(x_*) = 0$.

Q6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ atteignant un minimum en $\vec{u}_* = (x_*, y_*)$; montrer que $\nabla f(\vec{u}_*) = \vec{0}$. (On pourra considérer les deux fonctions d'une seule variable réelle $f^{y_*} : x \longmapsto f(x, y_*)$ et $f_{x_*} : y \longmapsto f(x_*, y)$.)

Q7. En considérant la fonction $f : (x, y) \longmapsto (x-y)^3$ montrer qu'un point critique n'est pas nécessairement un point en lequel f atteint un minimum.

III – Fonctions coercives

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **coercive** si :

- f est continue, et
- $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, c'est à dire si : $\forall m \in \mathbb{R}$, $\exists a \geqslant 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\| \geqslant a \implies f(x, y) \geqslant m$

Le but de cette partie est de montrer le résultat :

- Toute fonction coercive admet un minimum.

Soit $\mathscr{A} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leqslant f(0, 0)\big\} = f^{-1}\big(]-\infty; f(0, 0)]\big)$; montrons d'abord que $\mathscr{A}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

Q8. Montrer que $\mathscr{A}$ est un ensemble non vide et borné.

Q9. Soit $\vec{u} \notin \mathscr{A}$; notons $\varepsilon = f(\vec{u}) - f(\vec{0}) > 0$. Justifier l'existence de $r > 0$ tel que :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \|\vec{v} - \vec{u}\| \leqslant r \implies |f(\vec{v}) - f(\vec{u})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En déduire que :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \|\vec{v} - \vec{u}\| \leqslant r \implies f(\vec{v}) - f(\vec{u}) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}$$

Q10. Pour cette valeur de r, soit $B_F(\vec{u}, r) = \big\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{v} - \vec{u}\| \leqslant r\big\}$ la boule fermée centrée en $\vec{u}$ et de rayon r. Déduire de **Q9** que pour tout $\vec{v} \in B_F(\vec{u}, r)$, $f(\vec{v}) - f(\vec{0}) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
En déduire que $B_F(\vec{u}, r)$ est incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{A} = \big\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{v} \notin \mathscr{A}\big\}$.

Q11. En déduire que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{A}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ puis que $\mathscr{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Montrons maintenant que f admet un minimum.

Q12. Justifier que f restreinte à $\mathscr{A}$ y admet un minimum, c'est à dire que $\exists \vec{u}_* \in \mathscr{A}$ tel que $\forall \vec{u} \in \mathscr{A}$, $f(\vec{u}) \geqslant f(\vec{u}_*)$.

Q13. En déduire que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

IV – Application : loi de réfraction de la lumière de Descartes

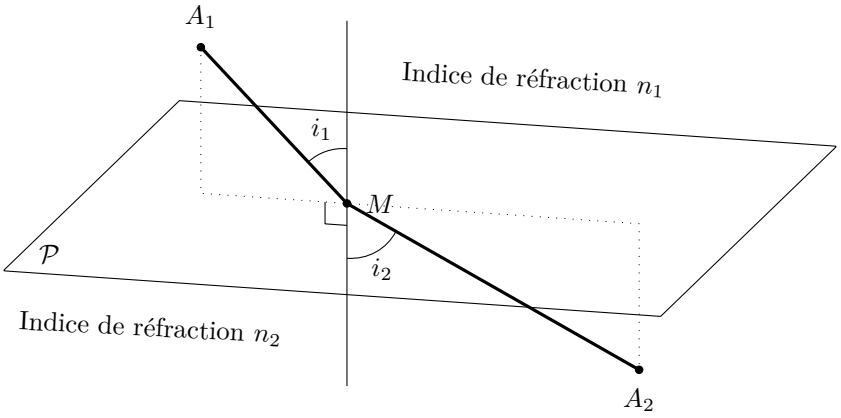


Figure 1 – Loi de réfraction de la lumière

Deux milieux d'indice de réfraction de la lumière homogènes n_1, n_2 sont séparés par un plan $\mathcal{P}$ orienté. Deux points A_1, A_2 sont situés de part et d'autre du plan $\mathcal{P}$. Selon la loi de réfraction de la lumière de Descartes (voir Figure 1), un rayon lumineux reliant les deux points A_1, A_2 se déplace de manière rectiligne dans chacun des deux milieux, et en passant par le point M du plan vérifiant :

- M est situé dans le plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A_1 et A_2,
- $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ où i_1, i_2 désignent les angles entre $\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MA_2}$ avec une normale au plan $\mathcal{P}$.

Nous nous proposons ici de vérifier, en appliquant les résultats établis précédemment, le principe de Fermat selon laquelle ce trajet lumineux de A_1 à A_2 est celui de plus courte durée.

On rappelle que l'indice de réfraction n_i d'un milieu i ($i \in \{1,2\}$) est défini par :

$$n_i = \frac{c}{v_i}$$

où c et v_i désignent respectivement la vitesse de propagation de la lumière dans le vide et dans le milieu i.

Puisque dans un milieu homogène le trajet le plus rapide suit une ligne droite, on supposera que dans chacun des deux milieux le trajet est rectiligne. Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P}$; la durée du trajet lumineux $A_1 - M - A_2$ est donnée par :

$$\frac{A_1M}{v_1} + \frac{A_2M}{v_2} = \frac{n_1A_1M + n_2A_2M}{c}$$

Il s'agit donc de déterminer, s'il existe, le point M du plan où le «chemin optique» $n_1A_1M + n_2A_2M$ atteint un minimum.

Soient M_1 et M_2 les projetés orthogonaux de A_1 et A_2 sur le plan $\mathcal{P}$.

Q14. On suppose dans cette question que $M_1 = M_2$; vérifier que le chemin optique atteint un minimum au point M satisfaisant la loi de Descartes.

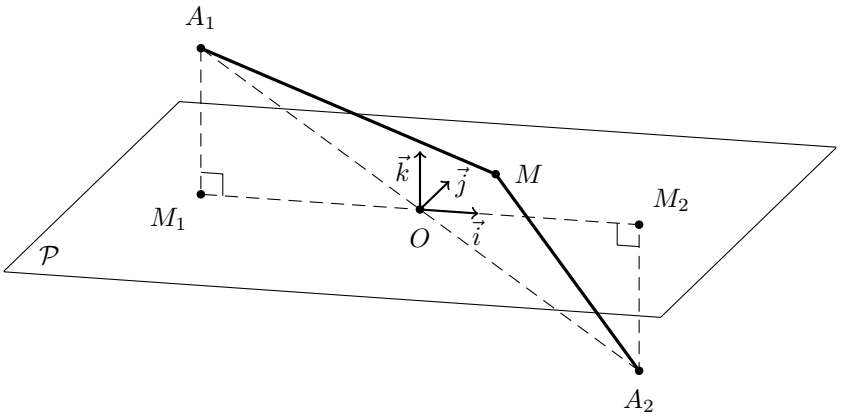


Figure 2

On supposera désormais $M_1 \neq M_2$. On construit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la façon suivante :

- l'origine O est l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (A_1A_2) ;
- le vecteur $\vec{i}$ a même direction que la droite (M_1M_2) ;
- le vecteur $\vec{j}$ est choisi de façon à ce que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$;
- le vecteur $\vec{k}$ est obtenu par le produit vectoriel $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

Ainsi dans ce repère (cf. Figure 2) les points ont pour coordonnées :

$$A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On définit alors :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = n_1 A_1M + n_2 A_2M = n_1\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z_1^2} + n_2\sqrt{(x-x_2)^2+y^2+z_2^2} \end{array}$$

qui donne le chemin optique en fonction de x, y et dont il s'agit de déterminer le point où un minimum est atteint.

Q15. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Q16. Appliquer la question **Q4** pour montrer que $f(x,y) \geqslant n_1 \left| \|\overrightarrow{OM}\| - \|\overrightarrow{OA_1}\| \right| + n_2 \left| \|\overrightarrow{OM}\| - \|\overrightarrow{OA_2}\| \right|$.
En déduire que f est coercive.

Q17. Montrer que si (x,y) est un minimum de f, alors le point M est nécessairement sur le segment $[M_1M_2]$.

Q18. En déduire que si f atteint un minimum en (x,y) alors le point M satisfait :

$$n_1 \frac{M_1M}{A_1M} = n_2 \frac{M_2M}{A_2M}.$$

On appliquera pour cela l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$.

Q19. En déduire qu'au chemin optique minimal, le point M satisfait la loi de Descartes de réfraction de la lumière.

Partie B – Convexités de fonctions

Dans cette partie on introduit trois notions de convexité plus ou moins fortes pour les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et on montre l'intérêt que revêtent ces notions pour la recherche de minimum.

I – Fonction convexes ; strictement convexes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

- f est dite **convexe** si pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u}) \geqslant f(\vec{v}) + \langle \nabla f(\vec{v}) \mid \vec{u} - \vec{v} \rangle$$

- f est dite **strictement convexe** si pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} \neq \vec{v} \implies f(\vec{u}) > f(\vec{v}) + \langle \nabla f(\vec{v}) \mid \vec{u} - \vec{v} \rangle$$

Q20. Montrer que si f est strictement convexe alors f est convexe. Montrer qu'une fonction convexe n'est pas forcément strictement convexe (on pourra considérer une fonction f constante).

Puisque f est $\mathscr{C}^1$, la surface d'équation $z = f(x,y)$ admet en tout point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ un plan tangent.

Q21. Donner l'équation du plan tangent au point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ à la surface d'équation $z = f(x,y)$.
En déduire une interprétation géométrique de f convexe (respectivement de f strictement convexe).

Q22. Montrer que si f est convexe et $\vec{u}_*$ est un point critique (*i.e* $\nabla f(\vec{u}_*) = \vec{0}$), alors f atteint un minimum en $\vec{u}_*$.
Montrer que si de plus f est strictement convexe, alors $\vec{u}_*$ est l'unique point où f atteint un minimum.

Autrement dit, une fonction convexe atteint nécessairement un minimum en un point critique alors que ce n'est forcément le cas pour une fonction quelconque. Pour une fonction strictement convexe, ce point où le minimum est atteint est unique, s'il existe. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y \end{cases}$$

Q23. Soit $a \in \mathbb{R}$; dresser le tableau de variation de l'application

$$g_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a(1+x-a) \end{cases}$$

Q24. Montrer que f est strictement convexe et n'admet aucun minimum.

II – Fonctions fortement convexes

Pour une fonction, être convexe ou strictement convexe n'assure pas de l'existence d'un minimum. Pour cette raison on introduit une notion de convexité plus forte.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit α un réel strictement positif.

- f est dite **α-fortement convexe** si pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u}) \geqslant f(\vec{v}) + \langle \nabla f(\vec{v}) \mid \vec{u} - \vec{v} \rangle + \alpha \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \ ;$$

- f est dite **fortement convexe** si il existe $\alpha > 0$ tel que f soit α-fortement convexe.

Q25. Montrer que si f est fortement convexe alors f est strictement convexe.

Q26. Exemple : Montrer que la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$ est fortement convexe ; pour quelles valeurs de α est-elle α-fortement convexe ?

On se propose de montrer que les fonctions fortement convexes sont coercives.

Q27. Montrer que si f est α-fortement convexe, alors pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u}) \geqslant f(\vec{v}) - \|\nabla f(\vec{v})\| \times (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|) + \alpha \left(\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\right)^2 .$$

(On appliquera pour cela des résultats de la partie **I.1**.)

Q28. En déduire que si f est α-fortement convexe, alors f est coercive, puis que toute fonction fortement convexe admet un minimum atteint en un unique point $\vec{u}_*$, et caractérisé par l'équation $\nabla f(\vec{u}_*) = \vec{0}$.

Partie C – Cas particulier des fonctions quadratiques

Dans cette partie on étudie la cas particulier des fonctions quadratiques, ou polynomiales de degré 2.

On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées ayant deux lignes et deux colonnes et à coefficients réels.

On identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ avec la matrice colonne de leurs coordonnées dans la base canonique ; par exemple le vecteur $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ sera représenté $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Avec cette convention, pour une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, la notation $M\vec{u}$ est définie par le produit matriciel $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et l'application $\vec{u} \longmapsto M\vec{u}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est M.

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **quadratique** s'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique, un vecteur $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ et un réel k tel que

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \quad f(\vec{u}) = \frac{1}{2} \langle M\vec{u} \mid \vec{u} \rangle - \langle \vec{n} \mid \vec{u} \rangle + k.$$

En notant $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$, alors : $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right) - dx - ey + k$.

Q29. Soit f polynomiale de degré 2, $f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + k$ avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, k) \in \mathbb{R}^6$.
Donner la matrice M et le vecteur $\vec{n}$ tels que $f(\vec{u}) = \frac{1}{2}\langle M\vec{u} \mid \vec{u}\rangle - \langle \vec{n} \mid \vec{u}\rangle + k$.

Dans la suite de cette partie, f désignera la fonction quadratique

$$f : \vec{u} \longmapsto f(\vec{u}) = \frac{1}{2}\langle M\vec{u} \mid \vec{u}\rangle - \langle \vec{n} \mid \vec{u}\rangle + k.$$

avec $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$.

Q30. Établir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(\vec{u}) = M\vec{u} - \vec{n}$.

On souhaite maintenant établir des conditions pour que f soit convexe, strictement convexe, ou fortement convexe.

Q31. Montrer que pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\langle M\vec{u} \mid \vec{v}\rangle = \langle M\vec{v} \mid \vec{u}\rangle .$$

Q32. Montrer que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2,\ f(\vec{v}+\vec{x}) - f(\vec{v}) = \langle \nabla f(\vec{v}) \mid \vec{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle M\vec{x} \mid \vec{x}\rangle .$$

Une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique est dite :

- **positive** si $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\langle M\vec{x} \mid \vec{x}\rangle \geqslant 0$;
- **strictement positive** si $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$, $\langle M\vec{x} \mid \vec{x}\rangle > 0$.

Q33. Montrer que f est :
– convexe si et seulement si M est positive ;
– strictement convexe si et seulement si M est strictement positive ;
– α-fortement convexe si et seulement si

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\},\ \langle M\vec{x} \mid \vec{x}\rangle \geqslant 2\alpha\|\vec{x}\|^2.$$

On caractérise maintenant la convexité de f à l'aide du signe des valeurs propres de la matrice M.

Q34. Justifier l'existence d'une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice orthogonale $P \in O_2(\mathbb{R})$ tel que $M = PDP^{-1}$.

Q35. Déduire de **Q33** et **Q34** que f est convexe si et seulement si les valeurs propres de M sont toutes positives.

Q36. Montrer de même que f est strictement convexe si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont strictement positives si et seulement si f est fortement convexe.

Q37. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur la trace $\mathrm{tr}(M)$ et le déterminant $\det(M)$ de M pour que f soit convexe, respectivement strictement convexe, fortement convexe.

Q38. Proposer une méthode n'utilisant que $\det(M)$, $\mathrm{tr}(M)$ et les solution du système $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{n}$ pour déterminer tous les (éventuels) points en lesquels une fonction quadratique f atteint son minimum.

Partie D – Recherche approchée de minimum par une méthode de descente de gradient

Comme on l'a vu, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ fortement convexe admet un minimum atteint en un unique point $\vec{u}_*$ et caractérisé par l'équation $\nabla f(\vec{u}_*) = \vec{0}$.

Mais résoudre cette dernière équation n'est pas toujours facile ni même possible. Aussi ont été inventées des méthodes de résolution approchées : elles consistent à construire une suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers le point $\vec{u}_*$ où f atteint son minimum, c'est-à-dire telle que $\|\vec{u}_n - \vec{u}_*\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La méthode est d'autant meilleure que la convergence est rapide.

Parmi celles-ci, la méthode de descente de gradient (à pas fixe) construit la suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ \begin{cases} \vec{u}_0 \text{ est un point quelconque de } \mathbb{R}^2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n - \rho.\nabla f(\vec{u}_n) \end{cases} \qquad (*)$$

où $\rho > 0$ est un réel strictement positif.

Dans cette méthode, à chaque point $\vec{u}_n$, le point suivant est obtenu en se déplaçant d'un pas fixé ρ dans la direction locale de plus grande descente $-\nabla f(\vec{u}_n)$.

Q39. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\vec{u}_n = (x_n, y_n)$ et $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$; soit $z(\vec{u})$ le réel tel que le point de coordonnées $(x, y, z(\vec{u}))$ appartienne au plan tangent à la surface représentative de f au point de coordonnées $(x_n, y_n, f(x_n, y_n))$.

Exprimer $z(\vec{u})$ en fonction de $\vec{u}_n$, $f(\vec{u}_n)$ et $\nabla f(\vec{u}_n)$.

Soit $r > 0$ fixé et $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|\vec{w}\| = 1$; montrer que si $\nabla f(\vec{u}_n) \neq \vec{0}$ alors $z(\vec{u}_n + r.\vec{w})$ atteint son minimum pour $\vec{w} = -\frac{\nabla f(\vec{u}_n)}{\|\nabla f(\vec{u}_n)\|}$. C'est ce que veut dire que la direction locale de plus grande descente est $-\nabla f(\vec{u}_n)$.

Afin que la suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en $(*)$ converge vers le point où f atteint son minimum, le pas ρ de descente doit être choisi correctement et la fonction f vérifiera une condition supplémentaire.

On établit dans cette partie le résultat suivant :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction α-fortement convexe. Si ∇f est M-lipschitzienne, c'est-à-dire si :

$$\exists M > 0,\ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \|\nabla f(\vec{u}) - \nabla f(\vec{v})\| \leqslant M\,\|\vec{u} - \vec{v}\|$$

alors en choisissant ρ tel que $0 < \rho < \dfrac{4\alpha}{M^2}$, la suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n - \rho.\nabla f(\vec{u}_n)$$

converge vers l'unique point $\vec{u}_*$ où f atteint un minimum, et la convergence est géométrique, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\vec{u}_n - \vec{u}_*\| \leqslant k^n \|\vec{u}_0 - \vec{u}_*\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On se place sous ces hypothèses : on considère dans cette partie une fonction f α-fortement convexe atteignant un minimum en $\vec{u}_*$, telle que ∇f est M-lipschitzienne, ainsi qu'une suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n - \rho.\nabla f(\vec{u}_n)$ avec $\rho > 0$.

Q40. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_* = (\vec{u}_n - \vec{u}_*) - \rho.(\nabla f(\vec{u}_n) - \nabla f(\vec{u}_*))$.

Q41. Montrer que pour toute fonction f, α-fortement convexe :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \langle \nabla f(\vec{u}) - \nabla f(\vec{v}) \mid \vec{u} - \vec{v} \rangle \geqslant 2\alpha\,\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

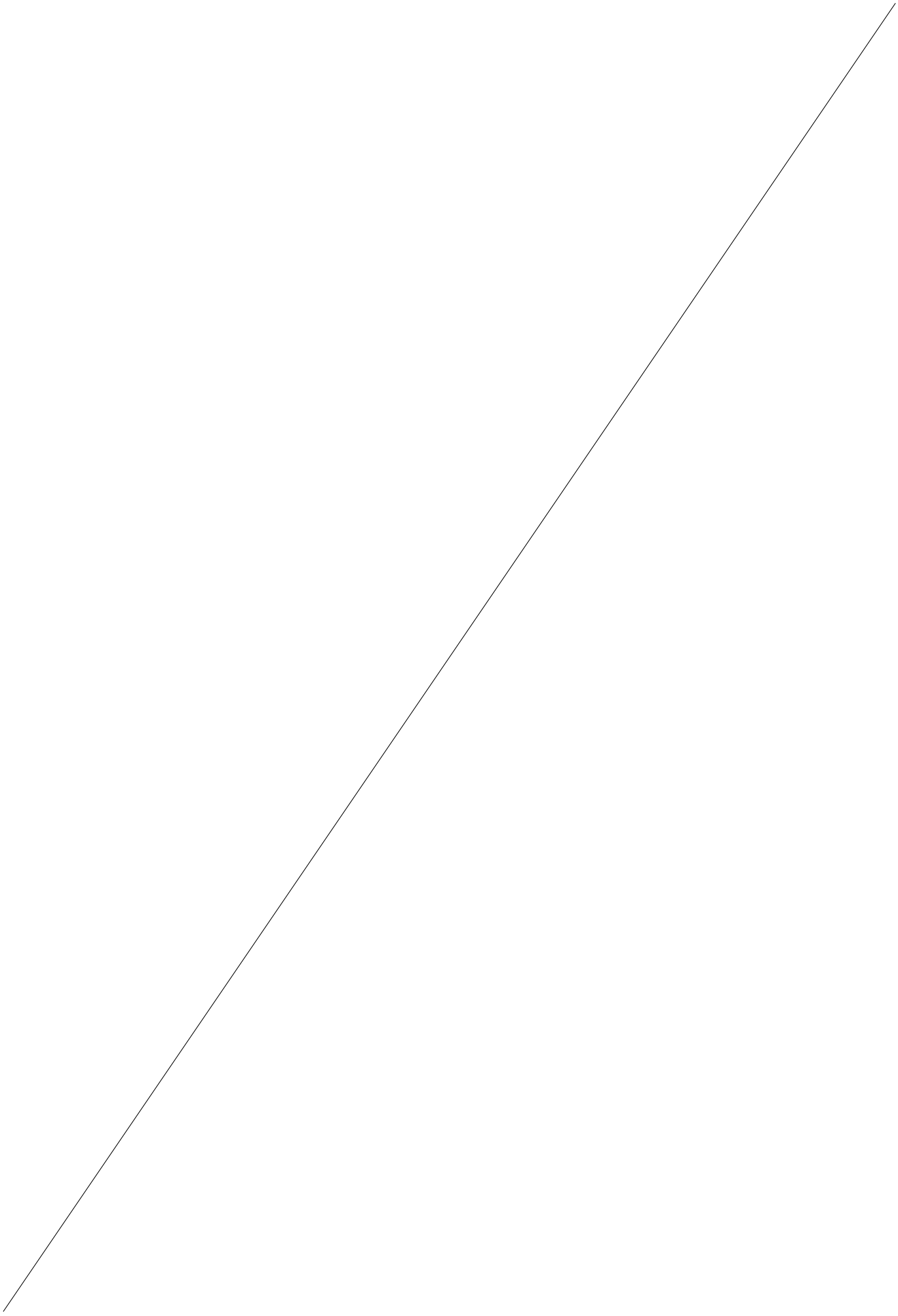
Q42. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_*\|^2 \leqslant \left(1 - 4\alpha\rho + M^2\rho^2\right) \times \|\vec{u}_n - \vec{u}_*\|^2$.

Q43. En notant $t(\rho) = 1 - 4\alpha\rho + M^2\rho^2$, montrer que $t(\rho)$ atteint un minimum en $\dfrac{2\alpha}{M^2}$. En déduire que $\alpha \leqslant \dfrac{M}{2}$.

Q44. Montrer que si $0 < \rho < \dfrac{4\alpha}{M^2}$, alors $0 \leqslant t(\rho) < 1$, puis conclure.

◇ Fin ◇

M092 - 29 avril 2025 - 09:49:54



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Objectif du problème et articulations entre ses différentes parties

L'objectif du problème est d'établir une expression matricielle donnant la solution du problème de minimisation des moindres carrés classiquement utilisée en régression linéaire multiple. Cette expression est utilisée pour établir les formules classiques de la régression linéaire simple.

La partie A donne une description de l'orthogonal de l'image d'une matrice. Elle permet de construire dans la partie B, la matrice de la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. La partie C utilise cette approche dans le contexte de la régression linaire simple. Elle utilise donc des résultats de la partie B qui elle-même utilise des résultats de la partie A.

Notations et Rappels

Lorsque n et p sont deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Par exemple :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ;\ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée.

On rappelle que : $\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2, \quad (MN)^\top = N^\top M^\top$.

On rappelle la définition du noyau et la définition de l'image d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } AX = 0\} \quad ; \quad \mathrm{Im}(A) = \{AX \text{ avec } X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$$

Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par :

$$(X \mid Y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = X^\top Y$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\|$ la norme de X associée à ce produit scalaire, définie par :

$$\|X\| = \sqrt{(X \mid X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^\top X}$$

L'orthogonal d'un sous-espace F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire est défini par :

$$F^\perp = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que : } \forall Y \in F,\ (X \mid Y) = 0\}$$

Partie A – L'égalité $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top)$

Q1. Soient $C_1,\dots,C_p$ les vecteurs colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, déterminer $E_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $C_j = A\,E_j$.
Montrer que la famille $(C_1,\dots,C_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$.

I – Un premier exemple

Dans cette partie, on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

Q2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Q3. Montrer que $(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^{\top})$.

II – Une démonstration

Q4. Justifier que pour tout $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on a $X^{\top}Y = Y^{\top}X$.

Q5. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\top}Y = 0$ alors X est nul.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Q6. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a $X^{\top}AZ = Z^{\top}A^{\top}X$.

Q7. En déduire que : $A^{\top}X = 0 \iff (\forall Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), X^{\top}AZ = 0)$.

Q8. En déduire que $(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^{\top})$.

III – Une application

Dans cette partie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

Q9. Justifier que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(A^{\top})$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q10. Justifier que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A^{\top})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q11. En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $(X',X'') \in \mathrm{Ker}(A^{\top}) \times \mathrm{Im}(A^{\top})$ tel que $X = X' + A\,X''$.
On admet que le couple (X',X'') ainsi associé à X est unique. On note alors u l'application $u : X \mapsto X''$.

Q12. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note B la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q13. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et (X',X'') défini de manière unique en **Q11**.
A l'aide de la définition d'une projection orthogonale et de la question **Q8** montrer que $A\,X''$ est le projeté orthogonal de X sur $\mathrm{Im}(A)$.
En déduire que AB est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.

Q14. Montrer que BA est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A^{\top})$.

IV – Un deuxième exemple

Jusqu'à la fin de cette partie, on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.

On note $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q15. Déterminer le rang de A et le rang de $A^{\top}$.

Q16. Déterminer une base de chacun des espaces $(\mathrm{Im}(A))^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(A^{\top})$.
On exprimera chaque base à l'aide des vecteurs de $\mathcal{B}_c$.

Q17. Vérifier que l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ construit en **Q11**, est l'application :

$$u : X = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto X'' = \sum_{k=1}^{n-1} k x_{k+1} e_k = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ \vdots \\ (n-1)x_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q18. Construire la matrice B de u dans $\mathcal{B}_c$.

Q19. Vérifier le résultat de la question **Q14**.

Partie B – Une expression de la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base quelconque

L'espace $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique rappelé en préambule.

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de dimension k et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_k)$ une base de F.

On note p_F la projection orthogonale sur F et A la matrice de $\mathcal{B}_F$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

La matrice A est donc dans $\mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ et ses colonnes sont les vecteurs $f_1, \cdots, f_k$ exprimés dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice $A^{\top}A$ est inversible et que $A(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}$ est la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Q20. Justifier que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Q21. Montrer que : $X \in \mathrm{Ker}(A^{\top}A) \Rightarrow \|AX\| = 0 \Rightarrow X = 0$.

Q22. Montrer que $A^{\top}A$ est inversible.

Q23. Montrer que $F = \mathrm{Im}(A)$.

Q24. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, il existe $Y \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que : $p_F(X) = AY$ et $X - AY \in \mathrm{Ker}(A^{\top})$.

Q25. En déduire que la matrice $A(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}$ est la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Partie C – Régression linéaire simple

On pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne à n lignes contenant que des 1.

On note $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne donné et **non colinéaire** à u.

Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

Lors d'un processus expérimental d'entrée $a_1 \in \mathbb{R}$, on recueille l'observation $b_1 \in \mathbb{R}$. On répète ce même processus avec l'entrée $a_2 \in \mathbb{R}$, on recueille l'observation $b_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi de suite jusqu'au dernier processus d'entrée $a_n \in \mathbb{R}$, où on recueille l'observation $b_n \in \mathbb{R}$.

On note le vecteur $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ contenant donc les n observations après les n processus expérimentaux d'entrées $a_1, \ldots, a_n$.

On pose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = \left\| A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - b \right\|^2$.

I – Minimisation de g sur un exemple

On prend dans cette sous partie, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Q26. Expliciter la fonction g et justifier qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Q27. Calculer les dérivées partielles de g.

Q28. En déduire que g admet un unique point critique dans $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

Q29. Montrer qu'en ce point g atteint son minimum.
Pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, on écrira $g(x_1,x_2)$ sous la forme $\beta_1(x_1 - \alpha_1)^2 + \beta_2(x_2 - \alpha_2)^2 + m$ où $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$.

II – Minimisation de g via une projection orthogonale

On se place dans les conditions énoncées dans le préambule de la partie C.

Q30. Démontrer que : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_1 + a_i x_2) b_i + \sum_{i=1}^{n}(x_1 + a_i x_2)^2$.

Justifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Q31. Calculer le gradient de g en $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ noté $\nabla g(x_1, x_2)$.

Q32. Montrer que : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla g(x_1, x_2) = -2A^\top b + 2A^\top A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Q33. Justifier à l'aide de la partie B que la matrice $A^\top A$ est inversible.

Q34. Montrer que si g admet un extremum en (α_1, α_2) alors $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (A^\top A)^{-1} A^\top b$.

On note $F = \mathrm{Im}(A)$ et p_F le projecteur orthogonal sur F.

Q35. Justifier que $p_F(b) = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.

Q36. En déduire que $g(\alpha_1,\alpha_2)$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}^2$.

III – Une autre expression de la solution du problème de minimisation de g

On note :

$$m_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad ; \quad m_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

les valeurs moyennes et

$$S_{a,b} = \sum_{i=1}^{n}(a_i - m_a)(b_i - m_b)$$

Q37. Montrer que $S_{a,b} = \sum_{i=1}^{n}(a_i \times b_i) - n \times m_a \times m_b$.

Q38. Montrer que $S_{a,a} = \|a - m_a \cdot u\|^2$ où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q39. Montrer que $S_{a,a} \neq 0$.

Q40. En déduire que la matrice $A^\top A$ est inversible et montrer que $(A^\top A)^{-1} = \dfrac{1}{n \times S_{a,a}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} a_i \\ -\sum_{i=1}^{n} a_i & n \end{pmatrix}$.

Q41. En déduire que : $\alpha_2 = \dfrac{S_{a,b}}{S_{a,a}}$ et $\alpha_1 = m_b - \alpha_2 \times m_a$

Q42. *Un exemple d'application*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g : (x_1,x_2) \longmapsto (x_1 + 2x_2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 2)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 3x_2 - 1)^2$$

Déterminer en quel point le minimum de g sur $\mathbb{R}^2$ est atteint.

IV – Espérance des estimateurs de l'argmin

On suppose que chaque b_i, pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, est une observation d'une variable aléatoire réelle B_i.

On suppose que les variables aléatoires B_i suivent toutes la même loi et sont deux à deux indépendantes.

On modélise le processus expérimental à l'aide du modèle linéaire, c'est à dire on suppose que :

- Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, $B_i = x_1 + x_2\, a_i + \mathcal{E}_i$ où $\mathcal{E}_i$ est une variable aléatoire réelle.
- On suppose que les variables $\mathcal{E}_i$ suivent toutes la même loi, sont centrées et d'écart type noté $\sigma > 0$, et sont deux à deux indépendantes.

On note $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$ le vecteur aléatoire dont les coordonnées sont les variables aléatoires B_i.

De même, on note $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_n \end{pmatrix}$ le vecteur aléatoire dont les coordonnées sont les variables aléatoires $\mathcal{E}_i$.

Q43. Déterminer l'espérance de B_i en fonction des nombres réels x_1, x_2 et a_i.

Q44. Déterminer la variance de B_i en fonction de σ.

On pose $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ le vecteur aléatoire $(A^\top A)^{-1} A^\top B$.

Ainsi définies, X_1 et X_2 sont des variables aléatoires réelles appelées estimateurs des coefficients par la méthode des moindre carrés.

On note : $m_a = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{R}$ et on définit les variables aléatoires

$$m_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B_i \quad ; \quad S_{a,B} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - m_a)(B_i - m_B)$$

Q45. Déterminer l'espérance de m_B en fonction des nombres réels x_1, x_2 et m_a.

Q46. Justifier que $X_2 = \dfrac{S_{a,B}}{S_{a,a}}$ et que $X_1 = m_B - X_2\, m_a$.

Q47. Déterminer l'espérance de X_2.

Q48. Déterminer l'espérance de X_1.

◇ Fin ◇

M083 - 2 mai 2025 - 16:07:10

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP MPI

4 heures — Calculatrice autorisée

2026

Sur quelques sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Dans tout le sujet, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, I_n sa matrice identité.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. définies positives).
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales de déterminant 1.
- La transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée $M^\top$ et sa trace $\operatorname{tr} M$.
- On note $|X|$ le cardinal d'un ensemble X, en convenant que $|X| = +\infty$ si X est un ensemble infini.
- Si $\mathcal{A}$ est une partie finie d'un groupe G, on note $\langle \mathcal{A} \rangle$ le sous-groupe de G engendré par $\mathcal{A}$.

Le problème comporte trois parties indépendantes.

Partie A – Sous-groupes finis de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Soit G un groupe de neutre e. On dit que G est *d'exposant fini* si et seulement si :

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in G \quad x^m = e$$

De plus, si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{tr} G$ la *trace du groupe* G, qui est l'ensemble :

$$\operatorname{tr} G = \{\operatorname{tr} A \ ; \ A \in G\}$$

I – Généralités

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Montrer que si G est fini, alors G est d'exposant fini et $\operatorname{tr} G$ est fini.

Q2. Donner un exemple de sous-groupe infini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont la trace soit finie.

Q3. Donner un exemple (pas nécessairement matriciel) de groupe infini qui soit d'exposant fini.

II – Cas particulier : les sous-groupes finis de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note R_θ et S_θ les matrices :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On pourra utiliser sans démonstration les relations suivantes, valables pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$:

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi} \qquad R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi} \qquad S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta} \qquad S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$$

Q4. Soit $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = R_\theta$.

Q5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans cette question, $G = \langle R_\theta \rangle$.

a) Vérifier que $G = \{R_{k\theta} \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Dans le cas où $\theta = \dfrac{2\pi}{m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer $|G|$.

c) Montrer que G est fini si et seulement si $\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.

d) Montrer que si G est d'exposant fini, alors G est fini.

e) Montrer que si $\operatorname{tr} G$ est fini, alors G est fini.

Q6. Soient θ et θ' deux réels. Dans cette question $G = \langle R_\theta, R_{\theta'} \rangle$.

a) Montrer que $|G| = |(\theta\mathbb{Z} + \theta'\mathbb{Z}) \cap [0, 2\pi[|$.

b) En déduire, pour p et q deux entiers non nuls premiers entre eux, que $\left|\langle R_{\frac{\pi}{p}}, R_{\frac{\pi}{q}} \rangle\right| = 2pq$.

c) Déterminer $\left|\langle R_{\frac{\pi}{p}}, R_{\frac{\pi}{q}} \rangle\right|$ dans le cas général (où p et q ne sont pas forcément premiers entre eux).

Q7. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Montrer que G est monogène.

Q8. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}_m$ le sous-groupe de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ engendré par $R_{\frac{2\pi}{m}}$ et $S_{\frac{\pi}{2}}$.

a) Déterminer le cardinal de $\mathcal{D}_m$.
On pourra montrer que $\mathcal{D}_m \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \langle R_{\frac{2\pi}{m}} \rangle$, puis chercher une bijection entre $\mathcal{D}_m \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}_m \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas inclus dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à $\mathcal{D}_m$.

III – Une caractérisation des sous-groupes finis de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, G est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On désire montrer que :

$$G \text{ fini} \iff G \text{ d'exposant fini} \iff \operatorname{tr} G \text{ fini}$$

Q9. Rappeler le théorème de réduction des matrices orthogonales.

Q10. On suppose dans cette question que G est d'exposant fini. Montrer, en utilisant le théorème de réduction précédent, que $\operatorname{tr} G$ est fini.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose maintenant que $\operatorname{tr} G$ est fini. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel :

$$(A|B) = \operatorname{tr} A^\top B$$

On note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par G et $d = \dim \mathcal{F}$.

Q11. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{B} = (A_i)_{i \in [\![1,d]\!]}$ de matrices de G qui forme une base de $\mathcal{F}$.

Q12. Soit $B = ((A_i|A_j))_{(i,j) \in [\![1,d]\!]^2}$. On considère la matrice C des coordonnées des matrices A_i dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Quelle est la taille de la matrice C ?

b) Montrer que $B = C^\top C$.

c) Montrer que B et C sont de même rang. En déduire que B est inversible.

Q13. Soit $M \in G$. On peut décomposer M dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \sum_{j=1}^{d} x_j A_j$$

On note alors $X_M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ et $Y_M = \begin{pmatrix} (A_1|M) \\ \vdots \\ (A_d|M) \end{pmatrix}$. Montrer que $X_M = B^{-1} Y_M$.

Q14. Montrer que $\{Y_M \mid M \in G\}$ est un ensemble fini. En déduire que G est fini.

Partie B – Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille $n \times 1$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Dans cette partie, on se place dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique noté $(.|.)$ et de sa norme associée $\|.\|$. Pour $r \geqslant 0$, on note $\mathcal{B}(0,r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour cette norme, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0,1)$ la boule unité fermée.

I – Quelques propriétés utiles

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Q15. On pose, pour X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle_A = (AX|Y)$$

Montrer que $\langle ., . \rangle_A$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note alors $\|.\|_A$ la norme associée à ce produit scalaire et $\mathcal{B}_A$ la boule unité fermée pour cette norme. Existe-t-il une matrice A telle que $\mathcal{B}(0,r) = \mathcal{B}_A$?

Q16. Vérifier que $X \mapsto A^{-1}BX$ est autoadjoint pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle_A$. Que peut-on en déduire pour la matrice $A^{-1}B$?

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $B \preccurlyeq A$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(BX|X) \leqslant (AX|X)$.

Q17. Montrer que $B \preccurlyeq A$ si et seulement si $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Q18. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $B \preccurlyeq A$ si et seulement si le spectre de $A^{-1}B$ est inclus dans $]0,1]$.
Pour la réciproque, on pourra utiliser une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle_A$ bien choisie.

Q19. On suppose toujours que A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et que $B \preccurlyeq A$. Montrer que $\det B \leqslant \det A$, avec égalité si et seulement si $A = B$.

Q20. Montrer que $B \preccurlyeq A$ si et seulement si $\mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}_B$.

Q21. Soit $\mathcal{K}$ une partie de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{K}$ est une partie bornée de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $A \in \mathcal{K}$, $A \preccurlyeq \alpha I_n$.

II – Stricte log-concavité de l'application det

Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que φ est *strictement concave* si et seulement si :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{C}^2 \quad \forall t \in [0,1] \qquad \varphi(tA + (1-t)B) \geqslant t\varphi(A) + (1-t)\varphi(B)$$

avec égalité si et seulement si $A = B$ ou $t = 0$ ou $t = 1$.

Q22. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q23. Montrer que $\varphi : A \mapsto \ln(\det A)$ est une fonction strictement concave sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
*On pourra utiliser le résultat de la question **Q16**.*

III – Groupe orthogonal associé à une matrice symétrique définie positive

À toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on associe son *groupe orthogonal* :

$$\mathrm{O}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ M^\top A M = A\}$$

Q24. Montrer que $\mathrm{O}(A)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, isomorphe à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
On pourra montrer qu'il existe une matrice B telle que $A = B^\top B$, et chercher un isomorphisme sous la forme $M \mapsto B^{-1}MB$.

Q25. Montrer que $\mathrm{O}(A)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV – Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, G désigne un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désire montrer que G est alors isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Q26. Montrer que pour tout $M \in G$, $|\det M| = 1$.

Q27. On pose :

$$\mathcal{C} = \{MX \ ; \ (M, X) \in G \times \mathcal{B}\}$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est compact, et que 0 est un point intérieur à $\mathcal{C}$.

Q28. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}_A$ et qui soit de déterminant maximal.
*On pourra commencer par montrer que $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \ ; \ \mathcal{C} \subset \mathcal{B}_A\}$ est non vide, compact et convexe, puis utiliser la question **Q23** pour démontrer l'unicité.*

Q29. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{O}(A)$.

Partie C – Croissance du groupe de Heisenberg discret

I – Croissance d'un groupe

Soit G un groupe de neutre e, engendré par une partie finie $\mathcal{S} = \{s_i\}_{i \in [\![1,N]\!]}$. À tout élément $g \in G - \{e\}$ on associe sa *longueur relativement à $\mathcal{S}$* par :

$$\ell_{\mathcal{S}}(g) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{k} |a_i| \ \middle| \ g = s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k} \ ; \ s_i \in \mathcal{S} \ , \ a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\ell_{\mathcal{S}}(g)$ est le nombre minimal d'éléments de $\mathcal{S}$ permettant d'obtenir g. Par convention, on pose $\ell_{\mathcal{S}}(e) = 0$. On note alors, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p) = \{g \in G \ ; \ \ell_{\mathcal{S}}(g) \leqslant p\}$$

$\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)$ est l'ensemble des éléments de G s'obtenant à partir d'au maximum p éléments de $\mathcal{S}$.

Nous dirons que G est un groupe à *croissance polynomiale de degré $d \in \mathbb{N}$* si et seulement si il existe deux réels strictement positifs α et β tels que, pour tout $p \geqslant 1$:

$$\alpha p^d \leqslant |\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)| \leqslant \beta p^d$$

Q30. Montrer que pour tous g et h dans G, $\ell_{\mathcal{S}}(g^{-1}) = \ell_{\mathcal{S}}(g)$ et $\ell_{\mathcal{S}}(gh) \leqslant \ell_{\mathcal{S}}(g) + \ell_{\mathcal{S}}(h)$.

Q31. Soit Σ une autre partie finie génératrice de G. Montrer qu'il existe deux constantes C et C' strictement positives telle que, pour tout $g \in G$:

$$C\ell_{\mathcal{S}}(g) \leqslant \ell_{\Sigma}(g) \leqslant C'\ell_{\mathcal{S}}(g)$$

En déduire que le fait que G soit un groupe à croissance polynomiale de degré d ne dépend pas du système S de générateurs choisis.

Q32. Soit $p \in \mathbb{N}$. Dénombrer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + y + z \leqslant p$. En déduire que $(\mathbb{Z}^3, +)$ est un groupe à croissance polynomiale et déterminer son degré.

II – Le groupe de Heisenberg discret

Dans cette partie, $n = 3$. On considère les trois matrices suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{A} = \{S, T, U\}$. $\mathbb{H}$ désigne alors le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{A}$.

Q33. Pour tout $(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3$, calculer $S^i T^j U^k$.

Q34. Pour $(i,j,k,i',j',k') \in \mathbb{Z}^6$, déterminer un triplet $(i'',j'',k'') \in \mathbb{Z}^3$ tel que :

$$S^i T^j U^k S^{i'} T^{j'} U^{k'} = S^{i''} T^{j''} U^{k''}$$

Q35. Vérifier que U commute avec tous les éléments de $\mathbb{H}$, et que pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$:

$$S^i T^j U^{ij} = T^j S^i$$

Q36. Le groupe $\mathbb{H}$ est-il commutatif ? Quel est le groupe engendré par (S,T) ?

Q37. Montrer que l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{Z}^3 & \to & \mathbb{H} \\ & & (i,j,k) & \mapsto & S^i T^j U^k \end{array}$$

est bien définie et bijective. Est-ce un isomorphisme de groupe (en munissant $\mathbb{Z}^3$ de sa structure usuelle) ? Peut-on munir $\mathbb{Z}^3$ d'une structure de groupe telle que f soit un isomorphisme ?

Q38. Soit $M \in \mathbb{H}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $\ell_{\mathcal{A}}(M) \leqslant p$, alors il existe $(i,j,k,z) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $M = S^i T^j U^{k+z}$ avec $|i|+|j|+|k| \leqslant p$ et $|z| \leqslant |ij|$. En déduire que $|\mathcal{V}_{\mathcal{A}}(p)| = O(p^4)$ quand p tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser les résultats de la question ***Q35****.*

Q39. Montrer que, pour tout $(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3$, si $|i|+|j| \leqslant p$ et $|k| \leqslant |ij|$, alors $\ell_{\mathcal{A}}(S^i T^j U^k) \leqslant p$.

Q40. Montrer que :

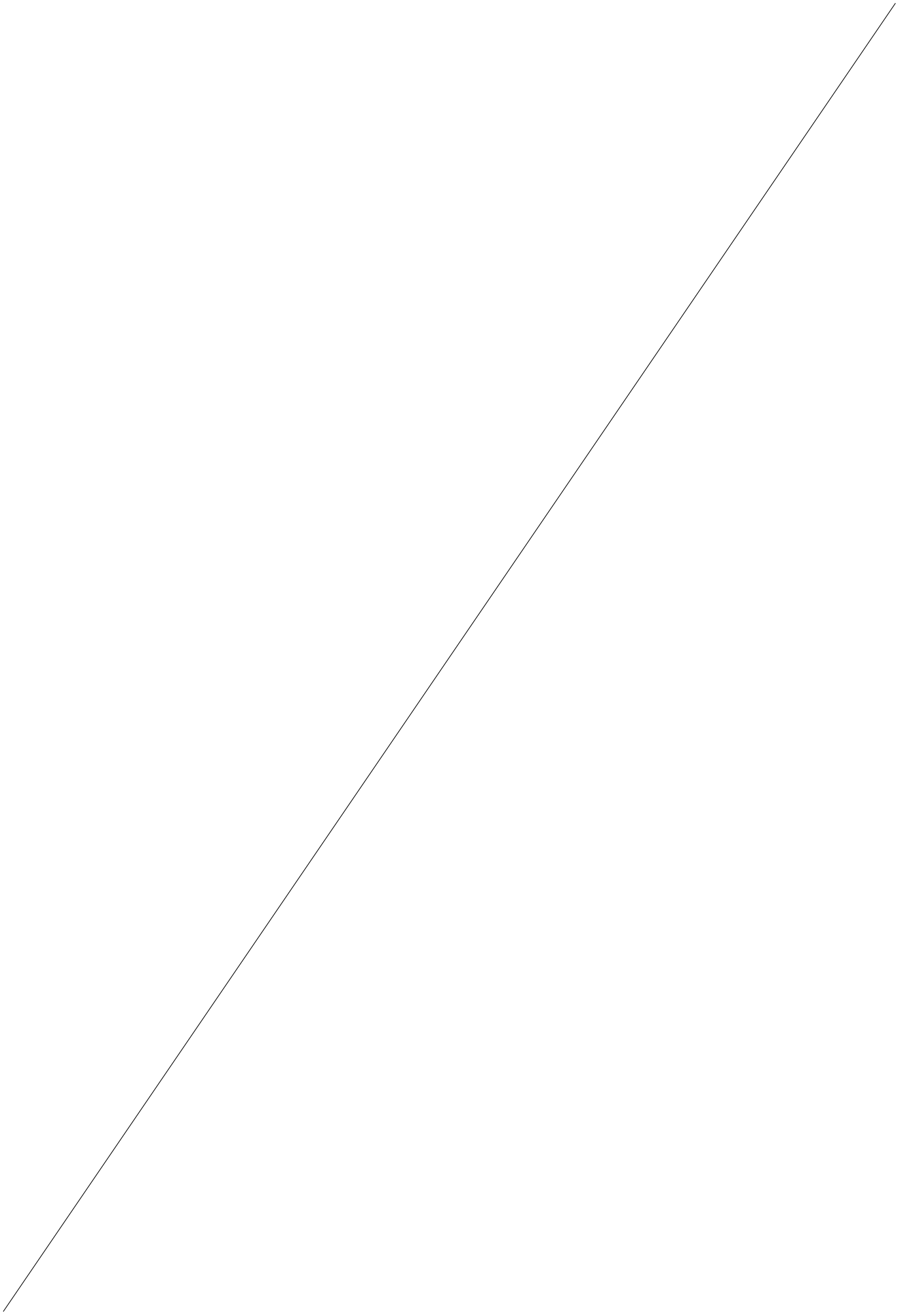
$$\mathrm{card}\{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \ ,\ i+j \leqslant p \text{ et } k \leqslant ij\} \geqslant \frac{p^3}{2} \sum_{i=0}^{p} \frac{i}{p} \left(1 - \frac{i}{p}\right)^2$$

et déterminer un équivalent de cette dernière quantité quand p tend vers $+\infty$.

Q41. En déduire que $\mathbb{H}$ est un groupe à croissance polynomiale de degré 4.

◇ Fin ◇

M098 - 17 février 2026 - 10:47:21



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP MPI

4 heures — Calculatrice autorisée

2026

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique nombre entier pour lequel l'encadrement suivant est satisfait : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Pour s un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$ ses parties réelle et imaginaire respectivement.

Le sujet utilise abondamment la lettre grecque ζ (« zeta »). Pour s un nombre réel strictement supérieur à 1, on note :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Divers prolongements de cette fonction ζ sont étudiés au cours du sujet.

Pour k un entier supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_k sur $]0,1]$ par :

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor.$$

Le problème vise à établir une condition suffisante pour que la fonction ζ ne s'annule pas sur l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ (cette non annulation étant une forme de l'*hypothèse de Riemann*), la condition considérée portant sur la géométrie des fonctions f_k dans un espace *ad hoc*.

Partie A – Questions préliminaires

I – La fonction ζ sur l'intervalle $]1, +\infty[$

Pour k entier naturel non nul, on définit $u_k(s) = \frac{1}{k^s}$ sur $\mathbb{R}$.

Q1. La série de fonctions $\sum_{k \geqslant 1} u_k$ converge-t-elle normalement sur l'intervalle $]1, +\infty[$?

Q2. Montrer que la fonction $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Q3. Montrer que la fonction ζ ne s'annule pas sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Préciser son signe.

II – Cas de la variable complexe

Q4. Soit s un nombre complexe et t un nombre réel strictement positif. On note $t^s = e^{s \ln(t)}$. Exprimer le module $|t^s|$ à l'aide de t et du couple $(\mathrm{Re}(s), \mathrm{Im}(s))$.

Soit s un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Q5. Établir que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^s}$ converge absolument.

On note encore $\zeta(s)$ la somme de cette série : $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.

On note $(p_i)_{i \geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$. On utilisera librement le fait que $\lim_n p_n = +\infty$.

Q6. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n})^s} \right)_{(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{N}^n}$ est une famille sommable et que la somme de cette famille, notée $S_n(s)$, est donnée par

$$S_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}.$$

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la factorisation en nombres premiers ne fait intervenir que les nombres $p_1, \dots, p_n$.

Q7. En considérant la somme $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}_n} \frac{1}{k^s}$, exprimer la limite de $S_n(s)$ lorsque n tend vers $+\infty$ à l'aide d'une valeur de la fonction ζ.

On note x la partie réelle du nombre s. On rappelle qu'on travaille sous l'hypothèse $x > 1$.

Q8. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_i \frac{1}{p_i^x}$. *On pourra justifier et exploiter la convergence de la suite* $(S_n(x))_n$.

On note $a_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^x}{p_i^x + 1}$.

Q9. Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge et que sa limite est un réel strictement positif. *On considérera la suite de terme général* $\ln(a_n)$.

Q10. Pour tout $n \geqslant 1$, établir l'inégalité $|S_n(s)| \geqslant a_n$ et en déduire que le nombre $\zeta(s)$ est non nul.

III – Un calcul d'intégrale

Dans cette question, la lettre s désigne un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

Q11. Établir que la fonction $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est intégrable sur $]0,1]$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |t^{s-1}|^2 \mathrm{d}t$.

IV – Une étude géométrique

Pour tout nombre réel d dans l'intervalle $]0,1[$, on considère Δ_d l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe s satisfait l'inégalité $d^2|s|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$.

Q12. Soit $d \in]0,1[$. Montrer que Δ_d est égal au complémentaire dans le plan complexe d'un disque $\mathcal{D}_d$ dont on précisera le centre O_d et le rayon R_d en fonction de d.

Q13. Pour $d \in]0,1[$, on pose $g(d) = \dfrac{1}{d^2} - \dfrac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$. Déterminer l'image par la fonction g de l'intervalle $]0,1[$. *On pourra procéder par étude des variations.*

Q14. Déterminer l'intersection $\displaystyle\bigcap_{d\in]0,1[} \Delta_d$.

Partie B – Étude analytique

I – Transformée de Mellin des fonctions f_k

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle l'expression :

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor.$$

Q15. Calculer $f_k\left(\dfrac{1}{i}\right)$ pour i entier compris entre 1 et k.

Q16. Pour t dans l'intervalle $]0,1]$, établir l'encadrement :

$$0 \leqslant f_k(t) \leqslant \frac{k-1}{k}.$$

On pourra commencer en utilisant la définition de la partie entière $\lfloor \frac{1}{kt} \rfloor$, *dont on déduira un encadrement de* $\frac{1}{t}$ *qu'on interprétera au vu de la définition de* $\lfloor \frac{1}{t} \rfloor$.

Q17. Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des valeurs prises par f_k sur l'intervalle]0,1].

Q18. Justifier que la fonction f_k est continue par morceaux et intégrable sur]0,1].

Dans les questions suivantes, s désigne un nombre réel strictement supérieur à 1.

Q19. Dans cette question uniquement, on élargit l'étude au cas $k = 1$ (et donc k est un entier naturel non nul). Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1}\mathrm{d}t$ converge.

On note :

$$F(s) = \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1}\mathrm{d}t.$$

Q20. Établir :

$$F(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\zeta(s).$$

Q21. Pour k entier supérieur ou égal à 2 et $s > 1$, établir l'égalité :

$$\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s}\right)\zeta(s).$$

II – Prolongement de la fonction ζ

Soit s un nombre réel strictement positif.

Q22. Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction h sur $]0, +\infty[$ définie par $h(t) = \dfrac{1}{t^s}$. Déterminer le maximum de $|h'(t)|$ sur le segment $[k, k+1]$.

Q23. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s}\right)\mathrm{d}t$ est une série à termes positifs convergente et que sa somme $G(s)$ vérifie :

$$0 \leqslant G(s) \leqslant s\zeta(s+1).$$

Q24. Dans cette question, on suppose $s > 1$. Établir l'égalité :

$$\zeta(s) - G(s) = \frac{1}{s-1},$$

puis l'estimation asymptotique $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + O(1)$ lorsque s tend vers 1 par valeurs supérieures.

On admet que les résultats de cette partie se généralisent, au prix de quelques menues adaptations, au cas où s est un nombre complexe de partie réelle strictement positive. On peut alors *définir* $\zeta(s)$ pour s un nombre complexe distinct de 1 dont la partie réelle satisfait $0 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$ par

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + G(s).$$

III – Intégrale des fonctions f_k

Q25. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t$ lorsque s tend vers 1 par valeurs réelles strictement supérieures.

Q26. En utilisant la question précédente et les questions **Q21** et **Q24**, établir l'égalité :

$$\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln(k)}{k}.$$

Partie C – Étude algébrique et géométrique

On note E l'espace des fonctions continues par morceaux sur]0,1] et à valeurs réelles. On définit en outre le sous-ensemble L^2 des fonctions f de E telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

I – Une forme bilinéaire symétrique positive

Q27. On considère des fonctions continues par morceaux sur]0,1], sans qu'il soit besoin de le spécifier à chaque fois. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie en justifiant complètement :

a) toute fonction bornée sur]0,1] appartient à L^2 ;

b) les ensembles E et L^2 sont égaux ;

c) toute fonction intégrable sur]0,1] appartient à L^2.

Q28. Pour f et g dans l'ensemble L^2, montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, puis établir que l'ensemble L^2 est un sous-espace vectoriel de E (là encore, on ne demande pas de relever le caractère continu par morceaux des fonctions considérées).
On pourra établir et utiliser l'inégalité $|f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\big(f(t)^2 + g(t)^2\big)$.

Q29. Vérifier qu'on définit une forme bilinéaire symétrique positive sur L^2 en posant :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier que ce n'est pas un produit scalaire sur L^2, en fournissant un contre-exemple à l'aspect « défini ».

II – Un espace préhilbertien réel

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $(\lambda_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ une famille de nombres réels tels que :

$$\sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k = 0 \text{ sur }]0,1]\,.$$

Q30. En évaluant la relation précédente pour $t \in \left]\frac{1}{2},1\right]$, établir l'égalité $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k}{k} = 0$.

Q31. Soit ℓ un entier compris entre 2 et $n-1$. En évaluant en un nombre t bien choisi, établir l'égalité :

$$\sum_{k=\ell+1}^{n} \lambda_k \frac{\ell}{k} + \sum_{k=2}^{\ell-1} \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor\right) = 0.$$

Dans le cas $\ell = 2$, la deuxième somme étant indicée pour k allant de 2 à $2-1$, on la considère vide, donc nulle.

Q32. Montrer l'égalité $\lambda_2 = 0$ en combinant le résultat de **Q30** et celui de **Q31** pour $\ell = 2$, puis montrer que tous les scalaires λ_k sont nuls. Quelle propriété de la famille $(f_k)_{k\geqslant 2}$ a-t-on ainsi établie ?

On considère maintenant le sous-espace F de L^2 engendré par les fonctions f_k pour $k \geqslant 2$, et la fonction constante égale à 1, qu'on note $\mathbf{1}$.

Q33. Montrer que (.|.) (voir notation **Q29**) définit un produit scalaire sur F.

III – Distance d'un vecteur à des sous-espaces

On rappelle que $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1. On travaille dans l'espace $F = \mathrm{Vect}\,(\mathbf{1}, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ muni du produit scalaire (.|.) (selon **Q29** et **Q33**).

Q34. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer l'existence d'une unique famille orthonormale $(e_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments de L^2 telle que pour chaque entier p compris entre 2 et n, les sous-espaces engendrés $\mathrm{Vect}\,(e_2,\ldots,e_p)$ et $\mathrm{Vect}\,(f_2,\ldots,f_p)$ sont égaux, et $(e_p|f_p) > 0$.

Pour $n \geqslant 2$ entier, on note d_n la distance de la fonction $\mathbf{1}$ au sous-espace engendré par $(f_2, \ldots, f_n)$.

Q35. Montrer l'égalité :

$$d_n^2 = 1 - \sum_{k=2}^{n} (\mathbf{1}|e_k)^2.$$

Q36. Montrer que la suite $(d_n)_n$ converge.

Partie D – Synthèse

On admet que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'étend aux fonctions continues par morceaux sur]0,1] de carré intégrable, dans le cas de fonctions à valeurs complexes, sous la forme suivante (les fonctions f et g ci-dessous sont donc supposées vérifier les conditions précédentes, en particulier, f^2 et g^2 sont supposées intégrables sur]0,1]) :

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right|^2 \leqslant \int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \times \int_0^1 |g(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q37. Soit $(\lambda_k)_{2 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de nombres réels. Soit s un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Justifier l'inégalité :

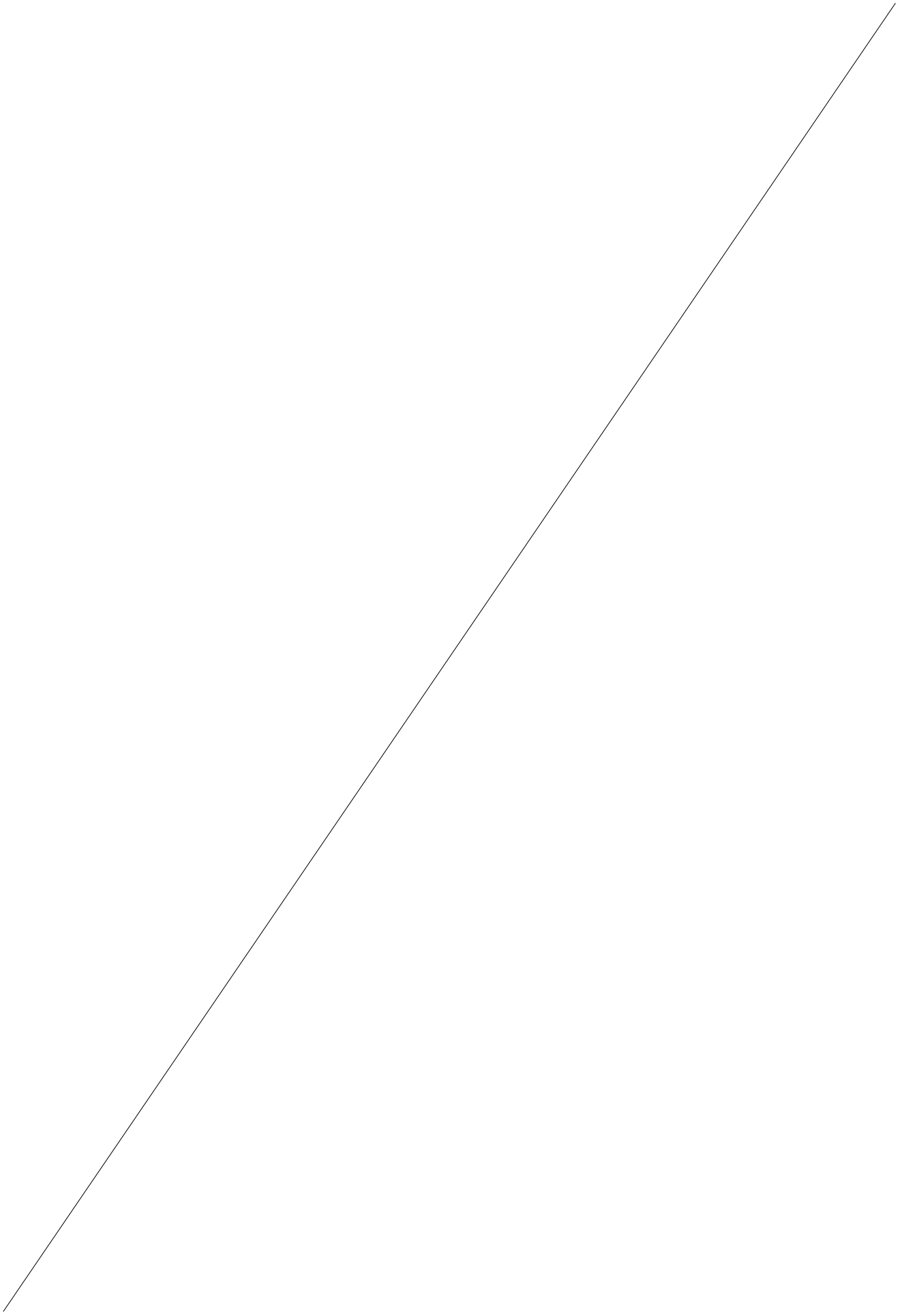
$$\left| \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\right) t^{s-1} \mathrm{d}t \right|^2 \leqslant \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\right)^2 \mathrm{d}t \times \int_0^1 |t^{2(s-1)}| \mathrm{d}t.$$

On souhaite maintenant démontrer que, si la suite $(d_n)_n$ admet pour limite 0, alors la fonction ζ, prolongée selon la Partie BII, ne s'annule en aucun nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Pour cela, on procède par l'absurde, et on suppose que s est un nombre complexe distinct de 1 tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et $\zeta(s) = 0$. On admet que l'égalité **Q21** est encore vraie pour tout nombre complexe s distinct de 1, de partie réelle strictement positive.

Q38. Établir l'inégalité $d_n^2 |s|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$, puis, en supposant $\lim_{n \to +\infty} d_n = 0$, conclure.

◇ Fin ◇

M104 - 15 janvier 2026 - 10:44:51



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrice autorisée

2026

Obtention de piles successifs lors de lancers d'une pièce.

Dans ce sujet, nous étudions la probabilité d'apparition de n côtés pile successifs lors du lancer d'une pièce. Ce type de problème a notamment servi de modèle pour des études effectuées dans les années 2010 visant à améliorer la performance des transmissions d'informations dans certains types de réseaux informatiques sans fil appelé OLSR [1]. Ces derniers ont des applications dans l'utilisation des mini-drones de reconnaissance, ou bien lors de communications d'unités de secours pour la prévention des catastrophes naturelles.

Dans les trois premières parties, nous étudions la probabilité d'apparition pour la première fois de n côtés pile successifs lors de lancers d'une pièce. La première partie s'intéresse aux cas où $n = 1$ et $n = 2$; la deuxième au cas où $n = 3$. Puis le cas général est étudié dans la troisième partie. La dernière partie, quant à elle, traite du problème de l'apparition d'une succession d'au moins n côtés pile consécutifs lorsqu'une pièce est lancée k fois.

Notations et définition

On dispose d'une pièce non nécessairement équilibrée. On note $p \in]0,1[$ la probabilité que le résultat d'un lancer donne le côté pile et $q \in]0,1[$ celle qu'il soit face. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire X_n de sorte que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, X_n prend la valeur k lorsque l'on obtient pour la première fois n côtés piles consécutifs à la suite de k lancers d'une pièce et $X_n = +\infty$ si cet événement ne se produit jamais. On admet dans tout le sujet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) sur lequel est définie X_n. On note f la fonction définie par, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = t^n - q\sum_{i=1}^{n} p^{i-1}t^{n-i}$ et $\mathcal{R}e(z)$ la partie réelle de tout nombre complexe z.

A – Les cas où $n = 1$ et $n = 2$

I – Le cas où $n = 1$

Q1. Donner explicitement la loi de X_1.

Q2. Donner directement la fonction génératrice de X_1, son espérance et sa variance.

Q3. Démontrer les résultats donnés dans la question 2.

II – Le cas où $n = 2$

Q4. Déterminer $P(X_2 = 1)$ et $P(X_2 = 2)$.

Q5. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$. On suppose que X_2 prend la valeur k. Déterminer l'ensemble des résultats possibles pour les deux premiers lancers.

Q6. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, $P(X_2 = k) = qP(X_2 = k-1) + pqP(X_2 = k-2)$.

Q7. Montrer que le trinôme $X^2 - qX - pq$ admet deux racines r_1 et r_2 dans $]-1,1[$ vérifiant $r_2 < r_1$ et $|r_2| < |r_1|$.

Q8. Déterminer le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\sum_{k=2}^{+\infty}(r_1^{k-1} - r_2^{k-1})z^k$.

Q9. Exprimer $P(X_2 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$.

Q10. Déterminer l'événement $(X_2 = +\infty)$ en fonction des événements $(X_2 \geqslant k)$, où $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $P(X_2 = +\infty) = 0$.

Q11. Montrer que la fonction génératrice de X_2, notée G_{X_2}, est telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $G_{X_2}(z) = \dfrac{p^2 z^2}{1 - qz - pqz^2.}$.

Q12. Montrer que X_2 admet une espérance et une variance.

Q13. Calculer l'espérance de X_2 puis montrer que sa variance vaut $\dfrac{1}{p^4} + \dfrac{2}{p^3} - \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{1}{p}$.

B – Le cas où $n = 3$

On s'intéresse dans cette partie au cas où $n = 3$.

I – Étude générale à l'aide de l'algèbre linéaire

Q14. Donner pour tout $k \in \{1,2,3\}$, $P(X_3 = k)$.

Q15. Montrer à l'aide d'un système complet d'événements adéquat que pour tout $k > 3$,

$$P(X_3 = k) = qP(X_3 = k-1) + pqP(X_3 = k-2) + qp^2P(X_3 = k-3).$$

Q16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose la matrice colonne $U_k = \begin{pmatrix} P(X_3 = k+2) \\ P(X_3 = k+1) \\ P(X_3 = k) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{k+1} = MU_k$.

Q17. Déterminer le polynôme caractéristique noté χ_M de M.

Q18. Montrer que χ_M admet une unique racine dans $]0,1[$.

Q19. Vérifier que $(X - p)\chi_M(X) = X^4 - X^3 + qp^3$ puis montrer que χ_M admet une seule racine réelle.

Q20. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Q21. On note $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ et $D \in M_3(\mathbb{C})$ une matrice diagonale d'ordre 3 telles que $M = QDQ^{-1}$. Sans calculer Q, montrer qu'il existe $(A,B,C) \in \mathbb{C}^3$, $\lambda_1 \in]0,1[$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$P(X_3 = k) = A\lambda_1^{k-1} + B\lambda_2^{k-1} + C\overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

Q22. Déterminer uniquement la valeur de A en fonction de λ_1 et λ_2.

Q23. On note θ un argument de λ_2 et r son module. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_3 = k) = a\lambda_1^{k-1} + br^{k-1}\cos((k-1)\theta) + cr^{k-1}\sin((k-1)\theta)$

Q24. Montrer que : $q < \lambda_1$, $\mathcal{R}e(\lambda_2) < 0$, $|\lambda_2 - 1| > 1$ puis que $|\lambda_2| < \lambda_1$.

Q25. En déduire l'existence d'un réel $m > 0$, que l'on calculera en fonction de λ_1 et λ_2, tel que $P(X_3 = k) \underset{k \to +\infty}{\sim} m\lambda_1^k$.

II – Un cas particulier

Dans cette partie B.II, on suppose que $p = 3/4$.

Q26. Déterminer dans $\mathbb{N}$ une racine du polynôme $\chi_M(\frac{X}{4})$.

Q27. En déduire toutes les racines de χ_M.

Q28. Déterminer un équivalent de $P(X_3 = k)$.

C – L'étude générale par le calcul de la fonction génératrice

On s'intéresse au cas où apparaît pour la première fois une succession de n côtés pile lors du lancer d'une pièce, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Q29. Quelles sont les valeurs de $P(X_n = k)$, où $k \in \{1, \cdots, n\}$?

Q30. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > n$,

$$P(X_n = k) = qP(X_n = k-1) + qpP(X_n = k-2) + \cdots + qp^{n-1}P(X_n = k-n).$$

Q31. On rappelle que la fonction f a été définie dans l'introduction du sujet. Calculer $f(1)$ puis montrer qu'il existe $t \in]p,1[$ tel que $f(t) \geqslant 0$. On considère dans la suite de cette partie C un tel réel t.

Q32. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = k) \leqslant t^k$.

Q33. Montrer que la fonction génératrice de X_n, notée G_{X_n}, est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{t}$ et que $G_{X_n}(z) = \dfrac{p^n z^n (1-pz)}{qp^n z^{n+1} - z + 1}$.

Q34. Montrer que X_n admet une espérance et calculer $E(X_n)$.

Q35. On admet qu'il existe $a \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ n nombres complexes de module strictement supérieur à 1 et deux à deux distincts et $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tout z tel que $|z| < \dfrac{1}{t}$, $G_{X_n}(z) = a + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{z - \lambda_i}$. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = k)$ en fonction des nombres a_i et λ_i.

D – Obtenir une succession de pile à la suite de lancers d'une pièce

Dans cette partie, on effectue des lancers successifs de la même pièce, on rappelle que la probabilité d'obtenir le côté pile est $p \in]0,1[$. Au bout de $k \in \mathbb{N}^*$ lancers, on s'intéresse à l'apparition d'une succession d'au moins n côtés pile consécutifs. Par exemple, on lance 100 fois la pièce et on regarde si la série de cinq côtés pile : "pile,pile,pile,pile,pile" est apparue dans ces 100 lancers, mais il n'est pas interdit d'avoir une série de plus de cinq piles côte à côte. On note $A_{n,k}$ l'événement : " avoir une succession d'au moins n côtés pile au bout de k lancers de la pièce". On admettra que pour tout $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad u_i = b_i \quad \text{et} \quad \forall k > n, \quad u_k = qu_{k-1} + qpu_{k-2} + \cdots + qp^{n-1}u_{k-n} \quad (\star).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q36. Quelles sont les valeurs de $P(A_{n,k})$, où $k \in \{1, \cdots, n\}$?

Q37. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > n$,

$$P(A_{n,k}) = p^n + qP(A_{n,k-1}) + qpP(A_{n,k-2}) + \cdots + qp^{n-1}P(A_{n,k-n}).$$

Q38. Écrire une fonction Python ayant comme variables d'entrée p, k et n et qui donne en sortie la liste des $P(A_{n,l})$ pour $l \in \{1, \cdots, k\}$.

Q39. Déterminer une suite constante $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k > n, v_k = p^n + qv_{k-1} + qpv_{k-2} + \cdots + qp^{n-1}v_{k-n}.$$

Q40. Déterminer $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ telle que la suite (u_k) vérifiant la condition $(\star)$ est telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n,k}) = 1 - u_k$.

Q41. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geqslant n$, $0 < u_k < 1$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q42. On pose $M = max\left\{ \dfrac{u_{i+1}}{u_i} ; i \in \{n, \cdots, 2n-1\} \right\}$. En utilisant la fonction f définie en introduction puis en raisonnant par récurrence d'ordre n à partir du rang $n+1$, montrer qu'il existe $\alpha \in [M,1[$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geqslant n+1$, $u_k \leqslant \alpha^{k-n}$.

Q43. Déterminer $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{n,k}\right)$ puis justifier l'affirmation : lorsque l'on effectue une succession de lancers d'une pièce, presque sûrement on obtiendra à un moment une série d'au moins 10000 côtés pile consécutifs.

Q44. On suppose dans cette question $n = 5$ et $p = 1/2$. On admet que l'on peut prendre $\alpha = 0{,}9827$ et que l'on a $0{,}9827^{95} \leqslant 0.193$. Justifier l'affirmation suivante : on lance 100 fois une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir au moins cinq cotés pile consécutifs est au moins de 0,8.

Q45. En s'inspirant de la méthode de la partie B, proposer une démarche expliquée en quelques étapes et sans faire les calculs et qui permettrait de montrer l'existence de $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ avec pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|\mu_i| < 1$ et de $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n,k}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i^k$.

Références

[1] Evgeny KHOROV et al. « Analytical study of neighborhood discovery and link management in OLSR ». In : *2012 IFIP Wireless Days*. 2012, p. 1-6. DOI : 10.1109/WD.2012.6402849.

◇ Fin ◇

M103 - 6 janvier 2026 - 16:57:48

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

4 heures — Calculatrice autorisée

2026

Polynômes de Jacobi

L'objectif de ce problème est de définir les polynômes de Jacobi et d'étudier quelques-unes des propriétés de ces polynômes.

La première partie de ce sujet est consacrée à la définition d'un produit scalaire sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Dans une deuxième partie, on se propose de démontrer la célèbre formule de Vandermonde sur les coefficients binomiaux et d'introduire la notion de coefficient binomial généralisé. Les troisième et quatrième parties proposent la définition des polynômes de Jacobi ainsi que certaines de leurs propriétés les plus classiques. Enfin, la cinquième partie permet de présenter les polynômes de Legendre, en tant que cas particulier des polynômes de Jacobi.

Partie A – Un produit scalaire

Soit $\delta \in \mathbb{R}$.

Q1. Rappeler sans démonstration la condition de convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\delta} dt$ et donner sa valeur lorsqu'elle converge.

Q2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante sur δ pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{(a-t)^\delta} dt$ converge.

Dans toute la suite de ce problème, sauf mention contraire, α et β désignent deux réels strictement supérieurs à -1.

Q3. Démontrer que, pour toute fonction f continue sur le segment $[-1,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta f(t) dt$ est convergente.

Q4. Pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta P(t)Q(t) dt$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. On a donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\,,\ \|P\| = \sqrt{\langle P,P\rangle}$$

I – Un premier exemple

On suppose, dans cet exemple uniquement, que $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Le produit scalaire est donc ici défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2\ ,\ \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Q5. Calculer le produit scalaire $\langle 1, X\rangle$.

Q6. Calculer les normes $\|1\|$ et $\|X\|$.

II – Un second exemple

On suppose, dans cet exemple uniquement, que $\alpha = \beta = 0$. Le produit scalaire est donc ici défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \, , \, \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Q7. Calculer, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j$, le produit scalaire $\langle X^i, X^j\rangle$.

Q8. Calculer, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la norme $\|X^i\|$.

Partie B – Autour des coefficients binomiaux

Dans cette partie, complètement indépendante de la précédente, on se propose tout d'abord de démontrer la formule de Vandermonde :

$$\forall (k,m,p) \in \mathbb{N}^3 \, , \, k \leqslant m+p \, , \, \binom{m+p}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{p}{j}$$

Q9. Démontrer cette formule. On pourra pour cela considérer $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, $k \in [\![0, m+p]\!]$, $\mathcal{F}$ un ensemble constitué de $m+p$ éléments et on pourra partitionner judicieusement $\mathcal{F}$.

On introduit, dans toute la suite du problème, une nouvelle notation. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_\ell^\lambda = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-\ell+1)}{\ell!} & \text{si } \ell > 0 \\ 1 & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

Par exemple : $B_3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) \times \left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \dfrac{1}{16}$.

Q10. Lorsque k et n sont deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$, comparer les deux nombres $\binom{n}{k}$ et B_k^n.

On admettra que la formule de Vandermonde précédemment démontrée se généralise aux coefficients B_ℓ^λ sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N} \, , \, \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \, , \, k \leqslant s+t \, , \, B_k^{s+t} = \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}^s B_j^t$$

Partie C – Une famille de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on note encore $\langle .,. \rangle$ la restriction à E du produit scalaire défini dans la question **Q4**.
L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une base orthonormale $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E relativement à ce produit scalaire et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(i) \qquad \forall k \in [\![0,n]\!] \, , \, \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$$
$$(ii) \qquad \forall k \in [\![0,n]\!] \, , \, \langle P_k, X^k\rangle > 0$$

I – Premières propriétés des P_k

Q11. Démontrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme P_k est de degré k.

Q12. Démontrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, le polynôme P_k appartient à $\text{Vect}\left(1, X, \dots, X^{k-1}\right)^\perp$.

Q13. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On considère $Q \in \text{Vect}\left(1, X, \dots, X^{k-1}\right)^\perp$ tel que $\deg(Q) = k$.
Démontrer que : $\exists \alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \alpha_k P_k$.

II – Une relation entre P_{k-1}, P_k et P_{k+1}

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Q14. Démontrer qu'il existe $a_k \in \mathbb{R}$ tel que $P_{k+1} - a_k X P_k$ soit de degré inférieur ou égal à k.

Q15. Démontrer qu'il existe $(b_k, c_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_{k+1} = (a_k X + b_k)P_k + c_k P_{k-1}$.

III – Racines des polynômes P_k

On considère $k \in [\![1, n]\!]$ et on s'intéresse aux racines de P_k. On note m le nombre de racines réelles de P_k qui se situent dans l'intervalle $]-1, 1[$, comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. On désigne par $\mathcal{R} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble, éventuellement vide, constitué par ces racines.

Q16. Quelle inégalité relie k et m ?

Q17. On considère le polynôme $S = (X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_m)$ si $m \geqslant 1$ et $S = 1$ si $\mathcal{R} = \emptyset$.
Que peut-on dire du signe de la fonction polynomiale $x \mapsto P_k(x)S(x)$ sur $]-1, 1[$?

Q18. En déduire que $\langle P_k, S\rangle \neq 0$.

Q19. Que peut-on conclure sur m ?

Partie D – Polynômes de Jacobi

Dans cette partie, on se place à nouveau dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on continue de noter $\langle ., .\rangle$ la restriction à E du produit scalaire défini dans la question **Q4**.

I – Définition

On pose, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$g_k(x) = (1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k} \qquad \text{et} \qquad J_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} g_k^{(k)}(x)$$

Q20. Donner l'expression de g_0 et g_1. En déduire l'expression de J_0 et J_1.

Q21. Soient $p \in \mathbb{N}$ et j un nombre réel, pas nécessairement entier. Déterminer l'expression de la dérivée p-ième de la fonction $x \mapsto (1-x)^j$ sur $]-1, 1[$ en utilisant la notation B_p^j.

Q22. En déduire une expression de $g_k^{(k)}(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Q23. Démontrer alors que, pour $k \geqslant 2$:

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ J_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k} B_{k-i}^{k+\alpha} B_i^{k+\beta} (x-1)^i (x+1)^{k-i}$$

Q24. Démontrer que la fonction J_k est polynomiale de degré k et proposer une expression simple de son coefficient dominant à l'aide de la formule de Vandermonde.

Les polynômes J_k associés aux fonctions polynomiales $x \mapsto J_k(x)$ sont appelés *polynômes de Jacobi*. Nous allons en étudier une propriété fondamentale

II – Orthogonalité des polynômes de Jacobi

Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![0, k-1]\!]$.

Q25. Démontrer la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^i g_k^{(k)}(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{i-1} g_k^{(k-1)}(x)dx$ puis prouver que :

$$\int_{-1}^{1} x^i g_k^{(k)}(x)dx = -i \int_{-1}^{1} x^{i-1} g_k^{(k-1)}(x)dx$$

Q26. En déduire que $\langle J_k, X^i \rangle = 0$.

Q27. Démontrer que la famille $(J_0, J_1, \ldots, J_n)$ est une base orthogonale de E.

Q28. Expliquer, sans faire les calculs, comment il serait possible d'en déduire une base orthonormale de E.

Partie E – Le cas particulier $(\alpha, \beta) = (0, 0)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on se place, comme dans l'exemple des questions **7** et **8**, dans le cas où $\alpha = \beta = 0$. On rappelle que le produit scalaire est alors donné par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2 \ , \ \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Nous admettrons alors que la base orthonormale obtenue dans la question **28** vérifie toutes les hypothèses de la famille de polynômes étudiée dans la **partie C**. Ces polynômes sont appelés *Polynômes de Legendre*, et à ce titre notés L_k. Ils sont donc donnés par la formule suivante :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \, , \, L_k = \frac{1}{2^k k!} \left[(X^2 - 1)^k \right]^{(k)}$$

I – Premières propriétés des polynômes L_k

Q29. Calculer L_k pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$.

Q30. Calculer les racines des polynômes L_k pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$ et vérifier, dans ces cas particuliers, la conclusion de la question **19**.

Q31. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, retrouver le degré de L_k sans utiliser les résultats de la partie C, puis calculer le coefficient dominant de L_k.

Q32. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la parité des polynômes L_k.

Q33. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $L_k(1)$ et $L_k(-1)$.

II – Une équation différentielle vérifiée par les L_k

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On reprend la définition de la fonction g_k qui est ici donnée par :

$$\forall x \in]-1, 1[\, , \, g_k(x) = (1 - x^2)^k$$

Q34. Exprimer, pour tout $x \in]-1, 1[$, la quantité $(1 - x^2)g_k'(x)$ à l'aide de $g_k(x)$.

Q35. En déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, que le polynôme L_k est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k + 1)y = 0$$

III – Une majoration des L_k sur $[-1, 1]$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Q36. Étudier la monotonie sur $[0, 1]$ de la fonction f_k définie par :

$$\forall x \in [0, 1] \, , \, f_k(x) = (L_k(x))^2 + \frac{1 - x^2}{k(k + 1)} \left(L_k'(x) \right)^2$$

Q37. En déduire la majoration : $\forall x \in [-1, 1] \, , \, |L_k(x)| \leqslant 1$.

IV – Relation entre L_{k-1}, L_k et L_{k+1}

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. L'objectif de sous-partie est de préciser le résultat des questions **14** et **15** dans le cas des polynômes de Legendre.

Q38. En reprenant les notations de la question **14**, déterminer l'expression de a_k.

Q39. Démontrer que : $L_{k+1} = \dfrac{2k+1}{k+1} X L_k - \dfrac{k}{k+1} L_{k-1}$.

V – Un developpement en série entière faisant intervenir les L_k

Les polynômes L_k ont été définis pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. On pourrait démontrer qu'il est possible d'étendre leur définition afin de disposer de L_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que toutes les propriétés précédemment démontrées, notamment l'égalité de la question **39**, restent valables.

Considérons un réel $x \in [-1, 1]$ et intéressons-nous à la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} L_k(x) t^k$.

Q40. Démontrer que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1. On pose, pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x) t^k$$

Q41. Établir, grâce à la question **39**, que :

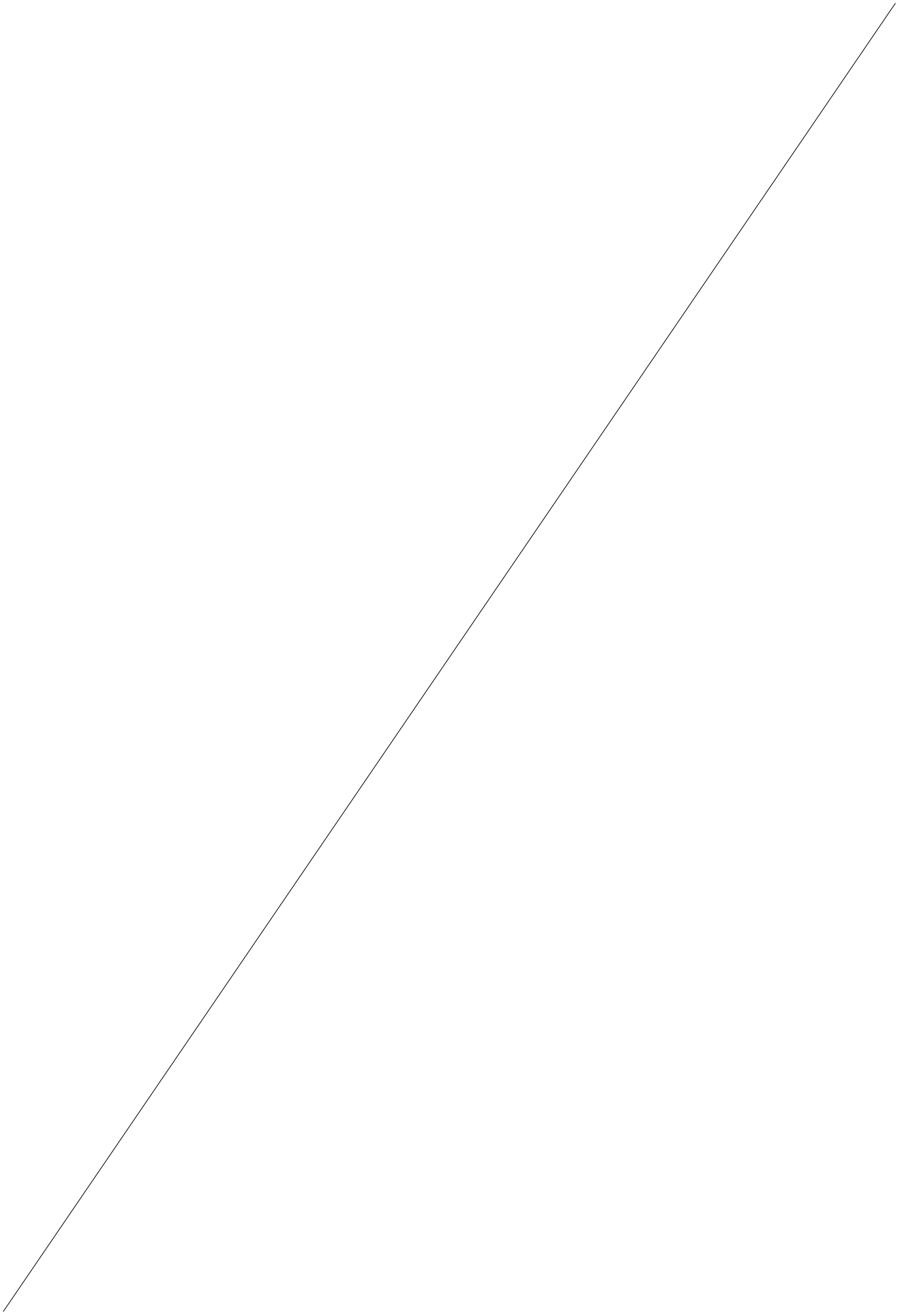
$$\forall t \in]-1, 1[\,,\ (1 - 2tx + t^2) S'(t) + (t - x) S(t) = 0$$

Q42. En déduire que :

$$\forall t \in]-1, 1[\,,\ \sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x) t^k = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$$

◇ Fin ◇

M096 - 19 février 2026 - 15:04:55



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

4 heures — Calculatrice autorisée

2026

Découverte de la planète Neptune

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes, le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix. Dans tout ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à 3 lignes et à 3 colonnes à coefficients réels.



Urbain Le Verrier (source Wikipedia)

- Urbain Le Verrier (1811-1877) doit sa célébrité à la découverte de la planète Neptune en 1846. À cette époque, seules 7 planètes sont alors connues (Mercure, Vénus, La Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus). Les mouvements des planètes sont régis par les lois de Newton. Quand on ne néglige pas les interactions entre planètes, les équations caractérisant les trajectoires des planètes sont pour l'instant impossibles à résoudre. Lagrange puis Laplace ont apporté des simplifications mais n'ont pas abouti. Le Verrier a conclu leurs travaux et établi les trajectoires des 7 planètes alors connues.
- La trajectoire que Le Verrier prédit concernant la planète Uranus contredit les observations de Herschel effectuées en 1781 : Uranus ne se trouve pas là où elle devrait être ! Ces écarts inexpliqués entre la position réelle d'Uranus sur son orbite et celle déduite par la théorie suggèrent l'existence d'un corps céleste inconnu, plus lointain, exerçant une force gravitationnelle perturbatrice. Plus tard, un astronome allemand, Johann Galle, observe pour la première fois la planète à l'origine de cette anomalie, à partir des calculs de Le Verrier. Elle est baptisée Neptune et on considère que c'est Le Verrier (et non Galle) qui l'a découverte.

Partie A – Étude du mouvement d'une planète seulement soumise à l'attraction du soleil

- On se place dans l'écliptique qui est le plan P d'origine le soleil et contenant le système solaire. On munit ce plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et, si M et N sont deux points de ce plan, MN désigne la longueur du segment d'extrémités M et N.
- Soit $(a, c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $c < a$. On pose $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. On appelle F le point de coordonnées $(c, 0)$ et F' le point de coordonnées $(-c, 0)$.
- On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de P tels que $MF + MF' = 2a$. On dit que $\mathcal{E}$ est une ellipse de foyers F et F'.
- Dans cette partie, x et y sont deux réels et M est le point de P de coordonnées (x, y).

I – Équation réduite de $\mathcal{E}$

Q1. Rappeler l'inégalité triangulaire mettant en jeu les distances MF, MF' et FF' puis prouver que :

$$FF' \geqslant |MF - MF'|.$$

Q2. En déduire que $MF - MF' - 2a \neq 0$ et $MF - MF' + 2a \neq 0$.

Q3. En déduire l'équivalence suivante :

$$M \in \mathcal{E} \iff (MF' + MF - 2a) \times (MF' + MF + 2a) \times (MF - MF' - 2a) \times (MF - MF' + 2a) = 0.$$

Q4. En déduire l'équivalence suivante : $M \in \mathcal{E} \iff ((MF')^2 + (MF)^2 - 4a^2)^2 = 4(MF')^2(MF)^2$.

Q5. En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées (x, y) vérifient $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

II – Étude d'une fonction

Soit $f : \begin{cases} [0,a] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \end{cases}$.

Q6. Dresser le tableau de variations de f et donner les équations des tangentes à C_f, la courbe représentative de f, en $(0, b)$ et $(a, 0)$.

Q7. Tracer C_f.

Q8. Représenter $\mathcal{E}$. On y placera aussi les points A, A', B, B' de cordonnées respectives $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$, ainsi que F et F'. On dit que $[A'A]$ est le grand axe de $\mathcal{E}$ et $[B'B]$ est le petit axe de $\mathcal{E}$.

III – Paramètres de l'ellipse

On pose $e = \dfrac{c}{a}$, on appelle excentricité de $\mathcal{E}$ cette quantité.

Q9. Montrer que $e \in]0, 1[$ puis exprimer c et b en fonction de a et e.

Q10. Donner l'allure de l'ellipse $\mathcal{E}$ suivant que e soit proche de 0 ou de 1.

Partie B – Étude du mouvement des planètes massives du système solaire sans négliger les interactions

- Les interactions entre les planètes existent et ne sont pas toujours négligeables. Pour les planètes massives, Le Verrier a pu toutefois négliger les petites planètes (Mercure, Vénus, Terre et Mars) et ne tenir compte que des planètes massives alors connues (Uranus, Jupiter et Saturne). Nous allons ainsi simplifier le problème et nous placer dans le cas où il n'y aurait que trois planètes.
- Pour chacune des trois planètes massives, Le Verrier définit des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$, permettant, sans entrer dans des détails trop techniques, de décrire les trajectoires de ces planètes. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on définit des fonctions h_i et l_i, fonctions du temps et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+$ (h_1 et l_1 pour Uranus, h_2 et l_2 pour Jupiter, et enfin h_3 et l_3 pour Saturne). Les équations physiques de Lagrange et Laplace disent qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (dont les coefficients sont des réels constants et ne dépendent donc pas du temps) telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} G_t &= B \times L_t \\ K_t &= -B \times H_t \end{cases} \quad \text{avec } H_t = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}, L_t = \begin{pmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ l_3(t) \end{pmatrix}, G_t = \begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \\ h_3'(t) \end{pmatrix} \text{ et } K_t = \begin{pmatrix} l_1'(t) \\ l_2'(t) \\ l_3'(t) \end{pmatrix}.$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $F_t = \begin{pmatrix} h_1''(t) \\ h_2''(t) \\ h_3''(t) \end{pmatrix}$.

Q11. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F_t = A \times H_t$ avec $A = -B^2$. On suppose uniquement dans cette partie que A a trois valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et λ_3 telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$.

Q12. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = Q \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \times Q^{-1}$.

Q13. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose : $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Y_t$ avec $Y_t = Q^{-1} \times H_t$, la matrice Q ayant été définie dans la question précédente. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, montrer que y_i est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 qu'on précisera.

Q14. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, donner l'expression générale de $y_i(t)$ à des constantes multiplicatives près.

Q15. Montrer que $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et exprimer h_1, h_2, h_3 puis l_1, l_2, l_3 en fonction de y_1, y_2, y_3 et des matrices B et Q.

Partie C – Méthode de Le Verrier pour déterminer les valeurs propres

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace.

I – Résolution des équations

Q16. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et en déduire que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblables ont même trace.

On pose : $A = Q \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \times Q^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On note :

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ S_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \ \text{ et } \ S_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3.$$

On note P_A le polynôme caractéristique de A, et on pose :

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 = P_A.$$

Q17. Exprimer $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}\big(A^2\big)$ et $\mathrm{Tr}\big(A^3\big)$ en fonction de S_1, S_2 et S_3.

Q18. Exprimer P_A puis α_0, α_1 et α_2 en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3.

Q19. Exprimer α_1 et α_2 en fonction de S_1 et S_2. On admet que $\alpha_0 = \dfrac{3S_1S_2 - S_1^3 - 2S_3}{6}$.

Le Verrier a ainsi, sans notion de déterminant ni de rang, explicité le polynôme caractéristique de la matrice A intervenant dans ses calculs grâce aux traces de A, A^2 et A^3. Une fois le polynôme caractéristique calculé, il en a déduit le spectre de A.

II – Étude d'un cas particulier

On appelle A la matrice $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 11 & 13 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ et R le polynôme $X^3 + X^2 - 14X - 24$.

Q20. Justifier l'existence d'une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et d'une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telles que $A = QTQ^{-1}$. Les relations trouvées à la question Q19 sont-elles encore valables ici ?

Q21. Déterminer $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}\big(A^2\big)$ et $\mathrm{Tr}\big(A^3\big)$ et en déduire que le polynôme caractéristique de A est R.

Q22. Déterminer les valeurs propres de A.

Q23. Déterminer une matrice $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.

Partie D – Perturbation sur une matrice d'ordre 3

L'étude du système réduit aux trois planètes massives Jupiter, Saturne et Uranus fait en réalité intervenir une matrice dont on ne connaît que des valeurs approchées. Nous étudions dans cette partie l'influence de l'approximation effectuée sur le spectre de cette matrice.

Dans toute cette partie, a, b et c sont trois réels vérifiant $a < b < c$ et (u, v, w) est un élément de $(\mathbb{R}^*)^3$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ la transposée de M. On pose :

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = UU^\top.$$

On note D la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et on fixe $t \in \mathbb{R}^*$ pour toute cette partie. On pose $D(t) = D + tT$ et on considère l'équation (E_t) d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t}.$$

I – Solutions et spectre

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{a, b, c\}$. On suppose que λ appartient au spectre de $D(t)$. On note X un vecteur propre de $D(t)$ associé à λ.

Q24. Montrer que : $\lambda I_3 - D \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $U^\top X = t\,U^\top(\lambda I_3 - D)^{-1}UU^\top X$.

Q25. Montrer que : $U^\top(\lambda I_3 - D)^{-1}U = \dfrac{1}{t}$.

Q26. En déduire que λ est une solution de l'équation (E_t).

Q27. Dresser le tableau de variations de la fonction numérique F suivante :

$$F : \lambda \longmapsto \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c}.$$

En déduire que F s'annule en deux points ρ_1 et ρ_2 vérifiant $\rho_1 < \rho_2$.

Q28. Montrer que l'équation (E_t) admet trois solutions réelles distinctes $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$ vérifiant

$$\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t).$$

On comparera ces quantités à a, b, c, ρ_1 et ρ_2. On sera amené à distinguer les cas $t > 0$ et $t < 0$.

Q29. Montrer que l'ensemble des solutions de (E_t) et le spectre de $D(t)$ sont confondus.

II – Les limites

On note g_1 la réciproque de la restriction de F à $]-\infty, a[$, g_2 la réciproque de la restriction de F à $]a, b[$, g_3 la réciproque de la restriction de F à $]b, c[$ et enfin g_4 la réciproque de la restriction de F à $]c, +\infty[$.

Q30. Prouver l'existence de g_i pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, calculer $g_2(0)$ et déterminer la limite de g_2 en $+\infty$ et en $-\infty$

Q31. Exprimer $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$ en fonction de g_1, g_2, g_3, g_4 et de t. On sera amené à distinguer les cas $t > 0$ et $t < 0$.

Q32. Montrer que la fonction λ_1 se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On admet qu'il en est de même pour λ_2 et λ_3. On notera encore λ_1, λ_2 et λ_3 ces fonctions prolongées.

Q33. Montrer que la fonction λ_1, ainsi prolongée, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la valeur de $\lambda_1'(0)$. On pourra s'appuyer sur l'expression de $F(\lambda_1(t))$. Donner, sans justification, les valeurs que l'on obtiendrait pour $\lambda_2'(0)$ et $\lambda_3'(0)$ en reprenant ce raisonnement.

Q34. Calculer la limite de λ_1 en $+\infty$ et $-\infty$. Quels commentaires peut-on faire quand on compare les valeurs propres de D et celles de $D(t)$?

◇ Fin ◇

M077 - 17 mars 2026 - 22:03:37

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

4 heures — Calculatrice autorisée

2026

Notations et rappels

- Les lettres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs et celui des nombres réels.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
- On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ constitué des fonctions f pour lesquelles il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| > A$:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists A > 0, \forall x \notin [-A, A],\ f(x) = 0\}.$$

On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un sous-epace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Le but de ce sujet est d'introduire les distributions. Après avoir construit une fonction test (partie A), on introduit les distributions (partie B). Les propriétés de dérivation et de convergence sont introduites dans les parties C et D. La partie E donne une application classique de la théorie des distributions et utilise les résultats des parties précédentes.

Partie A – Construction d'une fonction test

Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}.$$

Q3. En déduire que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q4. Soient $a < b$ deux réels. Construire une fonction $\psi_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\psi_{a,b}(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et $\psi_{a,b}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus]a, b[$.

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u)\mathrm{d}u}\psi_{-1,1}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.

Q5. Justifier que ρ_ε est bien définie, puis que $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Q6. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x$.

Q7. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(0).$$

(b) En déduire que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x-a)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a).$$

Partie B – Distribution sur $\mathbb{R}$

Pour tout segment K inclus dans $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}(K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulles en dehors de K :

$$\mathcal{D}(K) = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \forall x \notin K, f(x) = 0\}.$$

On appelle distribution sur $\mathbb{R}$ toute forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout segment $K \subset \mathbb{R}$, il existe un réel $C_K > 0$ et un entier $N_K \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K), \quad |T(\varphi)| \leqslant C_K \max_{i \in [\![0, N_K]\!]} \left\|\varphi^{(i)}\right\|_\infty.$$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

Q8. Montrer que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Q9. *Un premier exemple.* Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit l'application $\delta_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$.

Montrer que δ_a est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Q10. *Un second exemple.* Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Soit l'application

$$T_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Justifier que l'application T_f est bien définie, puis que T_f est une distribution sur $\mathbb{R}$.
On dit que T_f est la *distribution associée à f*.

Q11. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues telles que $T_{f_1} = T_{f_2}$, alors $f_1 = f_2$.

Q12. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit ψ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx)\,\mathrm{d}t$.

(b) En déduire que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q13. (a) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, justifier l'existence de la limite : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right)$.

On note $V(\varphi)$ cette limite et on dispose ainsi d'une application V de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que V est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Partie C – Dérivation d'une distribution

Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit la forme linéaire T' sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad T'(\varphi) = -T(\varphi').$$

Q14. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On dit que T' est la distribution dérivée de la distribution T, ou simplement dérivée de T.

Si f est une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la distribution dérivée $(T_f)'$ de la distribution T_f associée à f (définie à la question **Q10**) pourra aussi être notée ${T_f}'$ ou T'_f.

Q15. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $T'_f = T_{f'}$.

Q16. Soit f la fonction valeur absolue : $f(x) = |x|$ pour tout réel x.

(a) Montrer que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer la distribution dérivée T'_f de la distribution T_f.

Q17. Soit H la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Justifier que H est continue par morceaux et montrer que $T'_H = \delta_0$.
On rappelle que δ_0 a été défini à la question **Q9**.

Q18. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$.

(a) Justifier que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T(\varphi') = 0$.

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $T(\varphi) = 0$.

Indication : On pourra utiliser la fonction $\psi : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Justifier qu'il existe $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

(d) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $T(\varphi) = T(\varphi_0) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication : Écrire $\varphi = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi_0 + \left(\varphi - \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi_0\right)$.

(e) Conclure qu'il existe une fonction constante h sur $\mathbb{R}$ telle que $T = T_h$.

Q19. Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $T'_f = 0$.

Si $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la distribution dérivée seconde de T est par définition la distribution $T'' = (T')'$.
Si $T = T_f$, on note $(T_f)'' = T''_f$.

Q20. Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $T''_f = 0$.

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $T'_f = T_g$.

Q21. Justifier qu'il existe une fonction G définie sur $\mathbb{R}$ telle que $G' = g$.

Q22. En déduire que $(T_f - T_G)' = 0$.

Q23. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

Partie D – Suite de distributions

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une distribution T si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi).$$

On notera $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n \overset{\mathcal{D}}{=} T$.

Q24. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions qui converge vers une distribution T. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T'_n \overset{\mathcal{D}}{=} T'$.

Q25. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ et telle que la suite $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution nulle.

Q26. Soit f une fonction définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{f_n} \overset{\mathcal{D}}{=} T_f$.

Pour la question **Q27**, on donne les définitions suivantes.

– Pour toute fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

– On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge en norme 2 vers une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si les fonctions $(f_n - f)^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

Q27. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme 2 vers une fonction continue f. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{f_n} \overset{\mathcal{D}}{=} T_f$.

Indication : On pourra utiliser librement l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante : pour toutes fonctions continues par morceaux f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Partie E – Une application, le théorème d'unicité de Cantor

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge pour tout réel x et est de somme nulle.

Q28. On souhaite montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

(b) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n\sin(nx) = 0$.

(c) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|b_{\varphi(n)}\right| \geqslant \varepsilon$.

(d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(e) Conclure.

Q29. On suppose dans cette question que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}|a_n|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}|b_n|$ convergent.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = b_n = 0$.

Indication : Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pourra calculer

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\right)\sin(kx)\mathrm{d}x.$$

On revient au cas général et on ne suppose plus que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}|a_n|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}|b_n|$ convergent.

Q30. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{a_n}{n^2}\cos(nx) + \dfrac{b_n}{n^2}\sin(nx)$.

Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note F sa somme.

Q31. En déterminant la distribution dérivée seconde de la distribution T_F, montrer que F est une fonction affine.

Q32. Montrer que F est bornée. En déduire que F est constante.

Q33. Montrer que F est nulle.

Q34. Conclure.

◇ Fin ◇

M089 - 24 mars 2026 - 14:13:45

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI

4 heures Calculatrice autorisée

2026

La méthode des moindres carrés

Ce problème comporte 5 parties. Les parties A, B, C et D sont indépendantes entre elles.
L'objet de ce sujet est l'étude d'une méthode très utile en intelligence artificielle : la méthode des moindres carrés. Les parties A et C présentent des domaines des mathématiques que l'on peut reformuler en termes de problème des moindres carrés. La partie D amène à résoudre des systèmes d'équations linéaires au sens des moindres carrés à l'aide de la notion de décomposition en valeurs singulières. La partie B introduit la notion de limites de suites de matrices, que l'on utilise dans la partie E pour résoudre le problème étudié dans la partie D.

Rappels et notations

- Si k et l sont deux entiers tels que $k \leq l$, on note $[\![k, l]\!]$ l'ensemble des entiers i tels que $k \leq i \leq l$.
- L'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.
  On note aussi $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n.
- La transposée d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée A^T.
  Elle est définie par $A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.
- La trace d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{Tr}(A)$. Elle est définie par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
- Le produit scalaire canonique sur l'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n lignes est noté $\langle ., . \rangle$ et sa norme associée est notée $\|.\|_2$. Ce produit scalaire est défini par :

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \forall B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \langle A, B \rangle = A^T B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

- Le produit scalaire canonique sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées est aussi noté $\langle ., . \rangle$ et sa norme associée est notée $\|.\|_2$. Ce produit scalaire est défini par :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \forall B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}.$$

- L'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'appelle le spectre de A et se note $\mathrm{Sp}(A)$.

Partie A – Quelques problèmes de minimisation et de convergence

I – Distance entre un vecteur et un sous-espace vectoriel

On munit $M_{4,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base orthogonale de F. Proposer une base orthonormée de F.

Q2. Calculer le projeté orthogonal sur F d'un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$.

Q3. On note $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\min\limits_{u \in F} \|v - u\|_2$.

II – Séries de Fourier

Soit $E = \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques. On munit E du produit scalaire défini par

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \varphi(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On note $\|.\|$ la norme associée. Les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont définis (pour $n \geq 1$) par

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous introduisons les fonctions $e_n : x \longmapsto \cos(nx)$ et $f_n : x \longmapsto \sin(nx)$.
Les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f \in E$ sont les fonctions définies par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad S_N(f) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} (a_n(f)e_n + b_n(f)f_n).$$

Q4. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $b_n(f) = 0$ et $a_0(f) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$ et $a_n(f) = \dfrac{(-1)^n}{\pi} \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}$.

Q5. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$ convergent, et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$.

Q6. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a $\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} = \dfrac{1}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - (n\pi)^2}$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$ qui est solution de l'équation différentielle

$$f'' + e^{ix} f = 0. \qquad (\mathcal{E})$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\ \mathrm{d}t$ et $c_n(f'') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\ \mathrm{d}t$.

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$ et $c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

Q8. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$, puis que $c_{n-1}(f) = n^2 c_n(f)$.
En déduire que $c_n(f) = \begin{cases} \dfrac{c_0(f)}{(n!)^2} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$.

Q9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = c_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right) = c_0(f) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{(n!)^2}$.

On admet que la fonction définie par $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{(n!)^2}$ est bien une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

Q10. On rappelle que l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Quelle est sa dimension ? Justifier. L'équation $(\mathcal{E})$ admet-elle une solution qui n'est pas 2π-périodique ?

Q11. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la famille $(e_0, \dots e_N, f_1, \dots, f_N)$ est orthogonale pour φ. Est-elle orthonormale ?

Q12. Soient $g \in E$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On note $V_N = \text{Vect}(e_0, \dots, e_N, f_1, \dots, f_N)$.
Quelle est la projection orthogonale de g sur V_N ? En déduire une fonction $h \in E$ telle que $\|g-h\| = \min_{v\in V_N} \|g-v\|$.

Partie B – Limites de suites de Matrices

Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, avec $M_k = \begin{pmatrix} m_{k,1,1} & \dots & m_{k,1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k,n,1} & \dots & m_{k,n,p} \end{pmatrix}$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$).

On dit que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ la suite $(m_{k,i,j})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. On note alors

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to+\infty}(m_{k,1,1}) & \dots & \lim\limits_{k\to+\infty}(m_{k,1,p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lim\limits_{k\to+\infty}(m_{k,n,1}) & \dots & \lim\limits_{k\to+\infty}(m_{k,n,p}) \end{pmatrix}.$$

Lorsque la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge.
On admettra sans preuve que, si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors, pour tout $(q,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, toute matrice $P \in M_{q,n}(\mathbb{R})$ et toute matrice $Q \in M_{p,r}(\mathbb{R})$ la suite $(PM_kQ)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{k\to+\infty}(PM_kQ) = P\left(\lim\limits_{k\to+\infty} M_k\right)Q$.

Q13. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Montrer que les suites $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(B^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent.

Q14. Soit A une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset]-1,1]$.

Q15. Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et que la suite de matrices $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Q16. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
La suite de matrices $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Dans la suite de l'énoncé, on pourra utiliser sans preuve le résultat suivant :
si $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice et si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = M \qquad \text{si et seulement si} \qquad \lim_{k\to+\infty} \|M_k - M\|_2 = 0.$$

Partie C – Interpolation polynômiale et moindres carrés

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de nombres réels deux à deux distincts. Pour chaque $i \in [\![0,n]\!]$, on note

$$L_i(X) = \prod_{0\le j\le n,\ j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q17. Montrer que pour tout $(i,k) \in [\![0,n]\!]^2$, on a $L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Q18. Montrer que l'on peut munir $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ en posant $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.

Q19. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Q20. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $\langle L_i, P \rangle = P(x_i)$, puis que $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on ait $a < x_i < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$. On note $P_f = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$.

Q21. Soient $m \leq n$. En calculant $\langle P_f - Q, P_f - Q \rangle$, montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $R \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - R(x_i))^2 = \min_{Q \in \mathbb{R}_m[X]} \left(\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - Q(x_i))^2 \right).$$

Q22. Soit $g \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que g possède au moins $n+2$ zéros deux à deux distincts dans $[a, b]$. Montrer par récurrence sur n que $g^{(n+1)}$ a au moins un zéro dans $[a, b]$. On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Q23. Soit $x \in [a, b]$ avec $x \neq x_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Soit $K = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}$.

Montrer que $W : t \longmapsto f(t) - P_f(t) - K \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$ s'annule en $n + 2$ points distincts de $[a, b]$.

En déduire l'existence de $\xi_x \in [a, b]$ tel que $f(x) - P_f(x) = \dfrac{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$.

Partie D – Régression linéaire et moindres carrés

I – Le cas particulier de la dimension 2

Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons n points du plan réel $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ avec $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts tels que $(x_1, \dots, x_n)$ ne soit pas colinéaire au vecteur $(1, \dots, 1)$.

En dimension 2, la régression linéaire consiste à trouver une relation affine entre deux grandeurs physiques, c'est-à-dire à chercher une droite affine s'approchant le plus possible des points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ (au sens des moindres carrés).

Pour formuler ce problème de manière précise et rigoureuse, nous notons

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2 \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Le problème est alors de trouver les valeurs de a et b qui minimisent la fonction E.

Q24. Montrer que E admet un minimum m sur $\mathbb{R}^2$ (qu'on ne demande pas de calculer) et que $m = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y \right\|_2^2$.

Q25. Montrer que $\det(A^T A) = n \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2$, puis justifier l'affirmation $\det(A^T A) > 0$.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Q26. Calculer le gradient de $E : (a, b) \longmapsto E(a, b)$.

Soit (a_0, b_0) un point critique de E. Montrer que l'on a $A^T A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^T Y$.

En déduire qu'il existe un unique couple $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E(c, d) = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} E(a, b)$.

II – Les moindres carrés : le cas général

Nous allons maintenant généraliser les idées de la sous-section précédente au cas de la dimension quelconque.
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ avec $C_1, \dots C_p$ les colonnes de A. Soit $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q27. Soit $x \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^T Ax = 0$. Montrer que $\|Ax\|_2 = 0$.

Q28. Montrer que $\mathrm{Ker}\left(A^T A\right) = \mathrm{Ker}\,(A)$, puis que $\mathrm{rg}(A^T A) = \mathrm{rg}(A)$.

Q29. Montrer l'existence d'un unique couple $(u, d) \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \times (\mathrm{Col}(A))^\perp$ tel que $y = Au + d$.

Q30. Montrer que pour tout $x \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, on a $\|Ax - y\|_2 \geq \|d\|_2$ avec égalité si et seulement si $x - u \in \mathrm{Ker}(A)$.

Q31. Montrer que $A^T y = A^T Au$.

Q32. Soit $x_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\|Ax_0 - y\|_2 = \min\limits_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|Ax - y\|_2 \iff A^T Ax_0 = A^T y$.

Q33. Supposons $n > p$ et que la matrice A est de rang maximal, c'est-à-dire que le rang de A est égal à p.
Montrer que $A^T A$ est inversible.
En déduire que l'équation $\|Ab - y\|_2 = \min\limits_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|Ax - y\|_2$ a une unique solution donnée par $b = (A^T A)^{-1} A^T y$.

III – La décomposition en valeurs singulières

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ non nulle et $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Nous allons généraliser le résultat de la question **Q33**.
Dans la suite, nous notons $\mathrm{Diag}_{k,l}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\min(k,l)})$ la matrice de taille $k \times l$ dont le coefficient en ligne i et colonne i est α_i (pour tout indice $i \leq \min(k, l)$), et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Q34. Montrer que pour tout vecteur colonne $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, les nombres $X^T A^T AX$ et $X^T X$ sont positifs ou nuls.

Q35. Montrer que les valeurs propres de la matrice $A^T A$ sont toutes positives ou nulles.

Q36. Notons $r = \mathrm{rg}\left(A^T A\right) = \mathrm{rg}\,(A)$ (égalité prouvée à la question **Q28**).
Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ et une matrice orthogonale $V \in O_p(\mathbb{R})$ tels que $A^T A = V \mathrm{Diag}_{p,p}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots 0) V^T$.

Q37. Notons v_i la i-ème colonne de V.
Montrer que la famille $(Av_1, \dots, Av_r)$ est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, et que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\|Av_i\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} & \text{si } i \leq r \\ 0 & \text{si } i \geq r+1 \end{cases}$.
Montrer l'existence d'une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $u_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Av_i$ pour tout $i \leq r$.

Q38. Notons U la matrice dont la i-ème colonne est u_i et $D = \mathrm{Diag}_{n,p}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}, 0 : \dots, 0\right) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.
Vérifier que $U \in O_n(\mathbb{R})$ et que $AV = UD$.

En particulier, on a $A = UDV^T$. Cette écriture s'appelle une décomposition en valeur singulière de A. Posons

$$\Delta = \mathrm{Diag}_{p,n}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}, 0, \dots, 0\right) \in M_{p,n}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{A} = V \Delta U^T \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Q39. Montrer que $A\widetilde{A}$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.

Q40. Soit $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $b = \widetilde{A} y \in M_{p,1}(\mathbb{R})$. Vérifier que $\|Ab - y\|_2 = \min\limits_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|Ax - y\|_2$.

Soit $x_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ un autre vecteur qui vérifie $\|Ax_0 - y\|_2 = \min\limits_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|Ax - y\|_2$. Nous allons montrer que $\|x_0\|_2 \geq \|b\|_2$.

Q41. Montrer que $Ab - y \in \mathrm{Im}(A)^\perp$. En déduire que $x_0 - b \in \mathrm{Ker}(A)$

Q42. Montrer que $b \in \mathrm{Ker}(A)^\perp$.
Indication : on pourra exprimer $\mathrm{Im}\left(\widetilde{A}\right)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ en fonction des vecteurs colonnes v_i.

Q43. Montrer que $\|x_0\|_2 \geq \|b\|_2$ avec égalité si et seulement si $x_0 = b$.

Partie E – La méthode du gradient

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Nous avons vu à la question **Q35** que les valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_p$ de A^TA sont des nombres réels positifs ou nuls. Dans cette partie, nous supposons en plus que pour tout i, on a $\lambda_i > 0$.

Nous reformulons notre problème des moindres carrés en remarquant (par le calcul) que

$$\forall x \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \qquad \|Ax - y\|_2^2 = \langle A^TAx, x\rangle - 2\langle x, A^Ty\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Nous allons étudier une suite de matrices convergente dont la limite sera un minimum de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle A^TAx, x\rangle - 2\langle x, A^Ty\rangle \end{array} \right. .$$

Soit $(e_1, , \ldots, e_p)$ une base orthonormale de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on ait $A^TAe_i = \lambda_i e_i$.

Q44. Montrer que la matrice A^TA est inversible, et justifier que $\mathrm{Ker}(A) = \{\ 0\ \}$.

Q45. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} M_{p,1}(\mathbb{R}) \times M_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \left\langle A^TAx, y\right\rangle \end{array} \right.$ est un produit scalaire.

Soient $(v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ et $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} v_i e_i$.

Q46. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}(\alpha + \beta)^2$.

Montrer que $\left\langle A^TAv, v\right\rangle \left\langle (A^TA)^{-1}v, v\right\rangle \leq \dfrac{1}{4}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_p}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} + \frac{\lambda_p}{\lambda_i}\right)v_i^2\right)^2$.

Q47. Soit $\psi : t \longmapsto \dfrac{t}{\lambda_1} + \dfrac{\lambda_p}{t}$. Calculer le maximum de ψ sur $[\lambda_1, \lambda_p]$.

Q48. On note $c(A) = \dfrac{\lambda_p}{\lambda_1}$. Montrer l'inégalité de Kantorovich : $\left\langle A^TAv, v\right\rangle \left\langle (A^TA)^{-1}v, v\right\rangle \leq \dfrac{(c(A)+1)^2}{4c(A)}\|v\|_2^4$.

Nous souhaitons maintenant déterminer une approximation de l'unique solution ℓ à l'équation $A^TA\ell = A^Ty$.
Nous définissons une suite par récurrence en choisissant un vecteur $x_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ et en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$d_k = A^TAx_k - A^Ty \qquad t_k = \frac{\|d_k\|_2^2}{\langle A^TAd_k, d_k\rangle} \qquad x_{k+1} = x_k - t_k d_k.$$

Pour que cette définition ait un sens, nous supposons que le vecteur d_k est non nul pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette hypothèse n'est pas restrictive : s'il existe k tel que $d_k = 0$ alors $x_k = \ell$ et nous avons ainsi la valeur exacte de ℓ.
Soit $\ell = (A^TA)^{-1}A^Ty \in M_{p,1}(\mathbb{R})$.

Q49. Vérifier que pour tout $x \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, on a $f(x) - f(\ell) = \langle A^TA(x - \ell), x - \ell\rangle$.

Q50. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{k+1}) - f(\ell) = (f(x_k) - f(\ell))\left(1 - \dfrac{\|d_k\|_2^4}{\langle A^TAd_k, d_k\rangle\left\langle (A^TA)^{-1}d_k, d_k\right\rangle}\right)$.

Q51. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_1\|x_k - \ell\|_2^2 \leq f(x_k) - f(\ell) \leq (f(x_0) - f(\ell))\left(\dfrac{c(A)-1}{c(A)+1}\right)^{2k}$.

Q52. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, et que $\|A\ell - y\|_2 = \displaystyle\min_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})}\|Ax - y\|_2$.

◇ Fin ◇

M085 - 24 février 2026 - 15:26:54

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI — 4 heures — Calculatrice autorisée

2026

Dans tout le problème n désigne un entier naturel. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n dont la base canonique est $e = (1, X, \dots, X^n)$.

On rappelle également que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{j}{i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{j!}{i!(j-i)!} & \text{si } 0 \leq i \leq j \end{cases}.$$

On note $|A|$ le cardinal de tout ensemble fini A et on dit que A est **stable** par une fonction f si et seulement si f est définie en tout $x \in A$ et $f(x) \in A$.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $M^\top$ désigne sa matrice transposée. I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le problème comporte 4 parties largement indépendantes. La partie A est consacrée à l'étude des matrices dites de Pascal. La partie B porte sur l'étude d'une suite numérique puis sur l'étude d'une série entière. Dans les parties C et D, $n \in \mathbb{N}^*$. La partie C est relative à deux représentations (par graphe ou par matrice) des permutations de $[\![1, n]\!]$. Enfin la partie D aborde un calcul de probabilité (seule cette partie repose sur les parties précédentes).

Partie A – Matrices de Pascal

On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère les deux applications u et v de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P(X+1), \quad v(P) = P(X-1).$$

I – Cas particulier $n = 2$

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$.

Q1. Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q2. On s'intéresse à la matrice $\mathrm{Mat}_e(u)$ obtenue précédemment. Justifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse. Quel est le spectre de $\mathrm{Mat}_e(u)$? $\mathrm{Mat}_e(u)$ est-elle diagonalisable ?

II – Des matrices semblables à leurs inverses

On revient au cas général (ce qui signifie qu'on ne suppose plus $n = 2$ mais $n \in \mathbb{N}$ quelconque) et on admet que u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

On appelle **matrice supérieure de Pascal** la matrice notée $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ représentative de u dans la base canonique e de $\mathbb{R}_n[X]$ (on numérotera les lignes et les colonnes de U par i et j appartenant à $[\![0, n]\!]$).

Q3. Montrer que U est triangulaire supérieure puis démontrer que pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ le coefficient d'indice (i,j) de U est égal à $\binom{j}{i}$. Étudier la diagonalisabilité de U.

Q4. Déterminer $u \circ v$, en déduire que u est bijective puis que U est inversible et déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la matrice U^{-1}. Ce résultat est-il cohérent avec la matrice inverse calculé en **Q2** ?

Q5. On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, le i-ème coefficient diagonal est $(-1)^i$. Démontrer que D est inversible et égale à son inverse.

Q6. Calculer DU et $U^{-1}D$ et en déduire que $U = DU^{-1}D$ puis que U est semblable à son inverse.

Q7. On appelle **matrice inférieure de Pascal** la matrice définie par $L = U^\top$. Établir que $L = DL^{-1}D$ et en déduire que L est également semblable à son inverse.

III – Une matrice diagonalisable semblable à son inverse

On appelle enfin **matrice symétrique de Pascal** la matrice $S = LU$.

Q8. Dans cette question à nouveau on fixe $n = 2$. Calculer S et justifier que S est diagonalisable puis démontrer que le spectre de S est constitué de trois valeurs 1, α et $\frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

Q9. On revient au cas général ($n \in \mathbb{N}^*$). Justifier que S est diagonalisable, inversible et :

$$S^{-1} = (DU)S(DU)^{-1}.$$

En déduire que S est à nouveau semblable à son inverse.

Q10. Soit λ une valeur propre de S et $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Démontrer que $\lambda > 0$ (on pourra pour cela calculer de deux façons $X^\top SX$).

Q11. Démontrer que le spectre de S est stable par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Q12. En considérant la matrice A ci-dessous, déterminer si, réciproquement, une matrice inversible dont le spectre est stable par $x \mapsto \frac{1}{x}$ est toujours semblable à son inverse (on pourra calculer la trace de A).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

IV – Calcul des coefficients de S à l'aide d'un dénombrement dans un graphe

On considère le graphe orienté G_n dont les sommets sont les couples $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ ainsi qu'un sommet particulier appelé **source** et noté s. Les arcs de G_n sont les suivants : un arc de s vers $(0,0)$ (un tel arc est noté $s \to (0,0)$) et les arcs $(i,j) \to (i,j+1)$ pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,n-1]\!]$ et les arcs $(i,j) \to (i+1,j)$ pour tout $(i,j) \in [\![0,n-1]\!] \times [\![0,n]\!]$. Par exemple, on a représenté ci-dessous le graphe G_3 :

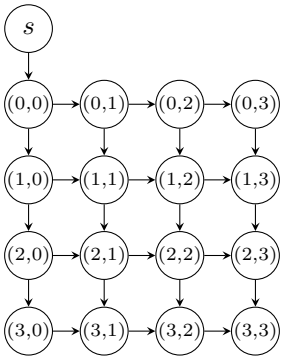


Figure 1 – Graphe G_3.

Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on s'intéresse à l'ensemble des chemins de s vers (i,j) dans G_n et on note cet ensemble $\Omega_{i,j}$. Par exemple il n'y a qu'un seul chemin de s vers $(0,0)$ qui est l'arc $s \to (0,0)$ ainsi $\Omega_{0,0}$ est le singleton :

$$\Omega_{0,0} = \big\{ s \to (0,0) \big\}.$$

Si $n \geq 2$, il y a trois chemins de s vers $(1,2)$ et $\Omega_{1,2}$ est l'ensemble à trois chemins :

$$\Omega_{1,2} = \big\{ \begin{array}{l} s \to (0,0) \to (0,1) \to (0,2) \to (1,2), \\ s \to (0,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (1,2), \\ s \to (0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (1,2) \end{array} \big\}.$$

Q13. Déterminer $\Omega_{2,2}$ et vérifier que $|\Omega_{2,2}| = 6$ puis justifier que, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $|\Omega_{i,j}| = \binom{i+j}{i}$.

Q14. Soient $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ et $k \in [\![0,i]\!]$. On note A_k l'événement «le chemin passe par le sommet $(k, i-k)$». En remarquant qu'un chemin de A_k est constitué d'un chemin de s vers $(k,i-k)$ puis d'un chemin de $(k,i-k)$ vers (i,j), déterminer $|A_k|$ et montrer que $(A_k)_{k\in[\![0,i]\!]}$ est un système complet d'événements puis en déduire que :

$$\binom{i+j}{i} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{j}{i-k}.$$

Q15. Déduire de cette formule que le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ de S est égal à $\binom{i+j}{i}$.

Partie B – Étude d'une suite et d'une série entière

I – Étude d'une suite

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}). \end{cases}$$

Q16. Vérifier que $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

Q17. Écrire une fonction Python `liste_an(n)` prenant en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant la liste $[a_0, \dots, a_n]$.

Q18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

Q19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq n!$.

Q20. On cherche à déterminer une caractérisation de l'entier a_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et à en déduire un équivalent simple. À cette fin, on considère la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dont on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ la somme partielle. Démontrer que cette série converge, préciser sa limite et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \leq S_{n+1} \ \text{ ou } \ S_{n+1} \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \leq S_n.$$

Q21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n!S_n$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est le plus proche entier de $\frac{n!}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire que a_n est l'unique entier tel que $|\frac{n!}{\mathrm{e}} - a_n| < \frac{1}{2}$.

Q22. En déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{\mathrm{e}}$.

II – Étude d'une série entière

L'étude de la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!}x^n$, dont on note $s(x)$ la somme, va nous permettre d'obtenir une autre relation satisfaite par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q23. Montrer que R, le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$, est égal à 1 (on pourra utiliser **Q21**) puis que s est solution du système ci-dessous sur $]-1,1[$:

$$\begin{cases} (1-x)y' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Q24. Résoudre le système précédent afin d'en déduire une expression explicite de $s(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Q25. Appliquer la formule de Leibniz au calcul de la dérivée p-ème de $x \mapsto \mathrm{e}^x s(x)$ évaluée en 0, et après avoir rappelé le lien entre a_k et $s^{(k)}(0)$ (pour $k \in \mathbb{N}$) , en déduire que :

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \quad p! = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k.$$

Partie C – Permutations de $[\![1, n]\!]$

On rappelle que dorénavant, $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **permutation** de $[\![1, n]\!]$ toute application bijective de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même et on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

I – Représentations d'une permutation

On propose deux manières de représenter une permutation σ de $[\![1, n]\!]$. La première consiste à considérer un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de $[\![1, n]\!]$ et pour lequel il existe un arc du sommet i vers j si et seulement si $\sigma(i) = j$. Par exemple, $\sigma \in \mathcal{S}_6$ définie par $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 6$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = 4$, $\sigma(6) = 3$, est représentée par le graphe $G(\sigma)$ ci-dessous :

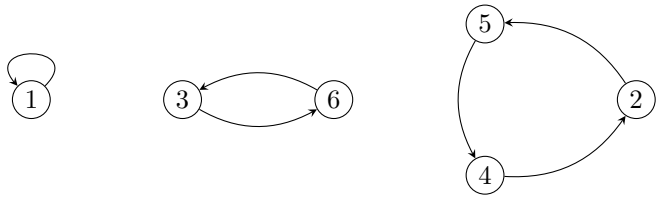


Figure 2 – Un graphe $G(\sigma)$ représentatif d'une permutation σ.

On remarquera qu'il ne s'agit pas d'un graphe au sens strict du terme puisqu'on s'autorise un arc allant d'un sommet i vers le même sommet i. Un tel arc sera dorénavant appelé une **boucle**. De même s'il existe un arc du sommet i vers le sommet $j \neq i$ et un arc du sommet j vers le sommet i on parlera de **bi-boucle**. Par exemple le graphe représenté précédemment comporte la boucle $1 \to 1$ et la bi-boucle $3 \to 6 \to 3$.

La seconde manière de représenter une permutation de $\mathcal{S}_n$ consiste à écrire une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dont on numérote les lignes et les colonnes par i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$) tel que le coefficient d'indice $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ vaut 1 si et seulement si $\sigma(i) = j$. Par exemple, σ définie précédemment est représentée par la matrice :

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Figure 3 – Une matrice $M(\sigma)$ représentative d'une permutation σ.

On admet que ces deux représentations définissent deux bijections G et M de $\mathcal{S}_n$ vers $G(\mathcal{S}_n)$ d'une part et de $\mathcal{S}_n$ vers $M(\mathcal{S}_n)$ d'autre part, autrement dit :

$$\forall (\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n^2, \quad \sigma = \tau \Leftrightarrow G(\sigma) = G(\tau) \Leftrightarrow M(\sigma) = M(\tau).$$

Q26. Représenter le graphe de la permutation dont la matrice représentative est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 4 – Une matrice représentative d'une permutation dont on cherche le graphe représentatif.

Q27. Donner la matrice représentative de la permutation dont le graphe représentatif est :

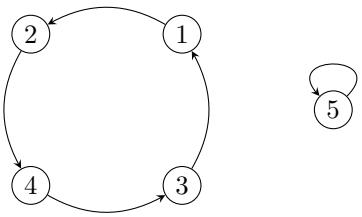


Figure 5 – Un graphe représentatif d'une permutation dont on cherche la matrice représentative.

II – Propriétés

Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Q28. Calculer $M(\sigma)M(\sigma^{-1})$ et en déduire que $M(\sigma)$ est inversible et :

$$M(\sigma)^{-1} = M(\sigma^{-1}).$$

Q29. Expliquer comment représenter $G(\sigma^{-1})$ à partir de $G(\sigma)$ et $M(\sigma^{-1})$ à partir de $M(\sigma)$. En déduire que :

$$M(\sigma)^{-1} = M(\sigma)^{\top}.$$

Q30. Démontrer que :

$$M(\sigma^2) = M(\sigma)^2.$$

III – Matrices de permutation diagonalisables

On se propose de démontrer le théorème ci-dessous :

Une matrice $M(\sigma)$ représentative de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est diagonalisable si et seulement si le graphe $G(\sigma)$ représentatif de σ ne contient que des boucles ou des bi-boucles.

Q31. Commençons par un exemple. Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice introduite en **Q25** est égal à $\chi = (X-1)^3(X+1)$ puis étudier sa diagonalisabilité. Cela est-il cohérent avec le théorème que l'on se propose de démontrer ?

Q32. Traitons le sens direct en fixant $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $M(\sigma)$ est diagonalisable. Démontrer que si λ est valeur propre de $M(\sigma)$ alors $\lambda^2 = 1$ (on pourra s'inspirer de **Q10**).

Q33. En déduire qu'il existe $q \in [\![0, n]\!]$ tel que $M(\sigma)$ est semblable à la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ci-dessous comportant q fois le coefficient 1 et $n-q$ fois le coefficient -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Q34. En déduire que $\sigma^2 = \mathrm{id}$ puis que $G(\sigma)$ ne contient que des boucles ou des bi-boucles.

Q35. Traiter la réciproque.

Partie D – Graphes de permutations sans boucle

I – Introduction

On se propose de calculer la probabilité qu'un graphe de $G(\mathcal{S}_n)$, choisi de façon aléatoire, soit sans boucle.

Notons B_n l'événement «le graphe choisi est sans boucle», b_n le cardinal de B_n et X_n la variable aléatoire qui au graphe choisi associe le nombre de boucle(s) de celui-ci.

Pour cela, on utilisera deux méthodes indépendantes.

Q36. Quel est le cardinal de $G(\mathcal{S}_n)$? Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ?

Q37. On fixe par convention $b_0 = 0$. Démontrer que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(X_n = j) = \frac{\binom{n}{j} b_{n-j}}{n!}.$$

Q38. En déduire que :

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \quad p! = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k.$$

On pourra commencer par le cas $p = n$ puis généraliser.

Q39. Justifier que ces relations permettent de calculer b_0, b_1, …, b_n. Préciser b_1, b_2 et b_3.

II – Calcul d'une probabilité par deux méthodes

Q40. À l'aide de la série entière de somme $s(x)$ introduite en partie B.II, démontrer que :

$$P(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Q41. On utilise enfin la matrice L introduite en **Q7**. On rappelle que cette matrice appartient à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, qu'elle est inversible et triangulaire inférieure.

On note F la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}.$$

Calculer $L^{-1}F$ puis retrouver que :

$$P(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

◇ Fin ◇

M100 - 24 février 2026 - 14:57:18