Banque d'exercices de mathématiques

Baptiste GORIN

7 mars 2024

Table des matières

Table des matières 1

I Raisonnement par récurrence. Sommes et produits 2
1 Raisonnement par récurrence 2
2 Sommes et produits 5
2.1 Sommes 5
2.2 Produits 14

II Nombres complexes 18
1 Calculs dans $\mathbb{C}$ 18
2 Module 18
3 Nombres complexes de module 1. Trigonométrie 22
4 Formes trigonométriques 25
5 Équations du second degré 26
6 Racines n-ièmes 26
7 Interprétation géométrique des nombres complexes 28

III Ensembles et applications 29
1 Ensembles 29
2 Applications et relations 32
2.1 Applications 32
2.2 Relations 38

IV Structures algébriques usuelles 40
1 Lois de composition interne 40
2 Groupes 40
3 Anneaux 41
4 Corps 42

V Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ 43
1 Divisibilité. Congruences 43
2 PGCD. PPCM. Entiers premiers entre eux 46
3 Nombres premiers 49

VI Polynômes 52
1 Algèbre $\mathbb{K}[X]$ 52
2 Arithmétique des polynômes 55
3 Racines 57
4 Équations algébriques 71
5 Divers 71

VII Fractions rationnelles 73

VIII Espaces vectoriels 78
1 Espaces vectoriels ... 78
1.1 Espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels ... 78
1.2 Familles de vecteurs ... 78
1.3 Somme de sous-espaces vectoriels ... 80
2 Espaces vectoriels de dimension finie ... 82

IX Applications linéaires 85
1 Applications linéaires. Noyau. Image ... 85
2 Projecteurs ... 89
3 Applications linéaires en dimension finie ... 92

X Matrices 98
1 Calcul matriciel ... 98
2 Matrices et applications linéaires ... 106
3 Systèmes linéaires ... 107

XI Groupe symétrique et déterminants 111
1 Groupe symétrique ... 111
2 Déterminants ... 111
2.1 Calcul de déterminants d'ordre 3 ... 111
2.2 Calcul de déterminants d'ordre 4 ... 114
2.3 Calcul de déterminants d'ordre n ... 115
2.4 Déterminants par blocs ... 123
2.5 Divers ... 124

XII Réduction des endomorphismes et des matrices carrées 125
1 Valeurs propres et vecteurs propres. Polynôme caractéristique ... 125
2 Diagonalisation ... 128
2.1 Diagonalisation des endomorphismes ... 128
2.2 Diagonalisation des matrices carrées ... 131
3 Trigonalisation ... 141
4 Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées ... 142

XIII Espaces préhilbertiens réels 145
1 Produit scalaire. Norme ... 145
2 Orthogonalité. Projecteurs orthogonaux ... 147
3 Automorphismes orthogonaux. Matrices orthogonales ... 151
4 Endomorphismes symétriques. Matrices symétriques ... 152

XIV Topologie des espaces vectoriels normés 156
1 Normes. Espaces vectoriels normés ... 156
2 Suites d'un espace vectoriel normé ... 158
3 Topologie d'un espace vectoriel normé ... 159
4 Espaces vectoriels normés de dimension finie ... 159
5 Applications sur un espace vectoriel normé ... 159
5.1 Cas général ... 159
5.2 Cas des applications linéaires ... 161

XV Nombres entiers 166
1 Coefficients binomiaux ... 166
2 Dénombrement ... 173

XVI Nombres réels 177
1 Calculs ... 177
2 Partie entière ... 180

XVII Suites 184
1 Calcul de limites . . . 184
2 Convergence. Divergence . . . 189
3 Suites monotones . . . 195
4 Suites adjacentes . . . 197
5 Suites récurrentes . . . 201
5.1 Suites usuelles . . . 201
5.2 Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 205
5.3 Autres suites récurrentes . . . 210
5.4 Suites récurrentes simultanées . . . 213
6 Suites implicites . . . 215
7 Divers . . . 220

XVIII Fonctions - Généralités 221

XIX Fonctions - Limites et continuité 224
1 Limite . . . 224
2 Continuité . . . 224
3 Continuité sur un intervalle . . . 225
4 Continuité uniforme . . . 230

XX Fonctions - Dérivation 231
1 Généralités . . . 231
2 Étude de fonctions . . . 233
3 Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis . . . 238
3.1 Théorème de Rolle . . . 238
3.2 Théorème des accroissements finis . . . 243
4 Formules de Taylor . . . 246
4.1 Formule de Taylor avec reste intégral . . . 246
4.2 Formules de Taylor-Lagrange . . . 246
4.3 Formule de Taylor-Young . . . 248
5 Fonctions convexes . . . 248
6 Variations de fonctions. Extremums . . . 255

XXI Fonctions usuelles 256
1 Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques . . . 256
2 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances . . . 262
3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques . . . 265

XXII Fonctions - Intégration sur un segment 267
1 Propriétés de l'intégrale . . . 267
2 Techniques de calcul d'intégrales . . . 275
2.1 Intégration par parties . . . 275
2.2 Changement de variable . . . 276
3 Sommes de Riemann . . . 278
4 Calcul de primitives . . . 283
5 Suites définies par une intégrale . . . 283
6 Intégrales fonctions des bornes . . . 285

XXIII Analyse asymptotique 287

XXIV Séries 289
1 Séries à termes positifs (ou de signe constant) . . . 289
1.1 Calculs de sommes . . . 289
1.2 Étude de la convergence . . . 296
1.3 Comparaison série-intégrale . . . 310
1.4 Sommation des relations de comparaison . . . 312

2 Séries à termes quelconques ... 315
2.1 Calculs de sommes ... 315
2.2 Étude de la convergence ... 317
2.3 Règle d'Abel. Séries alternées ... 318
2.4 Comparaison série-intégrale ... 322

XXV Suites et séries de fonctions 324
1 Suites de fonctions ... 324
2 Séries de fonctions ... 326

XXVI Séries entières 331
1 Rayon de convergence ... 331
2 Développement en série entière ... 332

XXVII Séries de Fourier 339

XXVIII Intégration sur un intervalle quelconque 340
1 Étude de la convergence ... 340
2 Calculs d'intégrales généralisées ... 343
3 Études d'intégrales ... 350
3.1 Cas des fonctions positives ... 350
3.2 Cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes ... 351
4 Théorème de convergence dominée ... 351
5 Intégration terme à terme ... 356
6 Fonctions définie par une intégrale ... 361
7 Divers ... 364

XXIX Équations différentielles 365
1 Équations différentielles linéaires du premier ordre ... 365
2 Équations différentielles linéaires du second ordre ... 366

XXX Fonctions de plusieurs variables 369
1 Calcul différentiel ... 369
2 Extrema ... 369

XXXI Espaces probabilisés 372
1 Probabilité ... 372
2 Probabilités conditionnelles ... 375

XXXII Variables aléatoires 386
1 Variables aléatoires - Cas général ... 386
2 Variables aléatoires discrètes ... 387
2.1 Variables aléatoires discrètes finies ... 387
2.2 Variables aléatoires discrètes infinies ... 391
3 Variables aléatoires à densité ... 397
4 n-uplets de variables aléatoires ... 400
4.1 Cas général ... 400
4.2 Cas des variables aléatoires discrètes ... 400
4.3 Cas des variables aléatoires à densité ... 403

XXXIII Lois usuelles 405
1 Lois usuelles discrètes ... 405
1.1 Loi uniforme ... 405
1.2 Loi de Bernoulli ... 407
1.3 Loi binomiale ... 412
1.4 Loi hypergéométrique ... 419
1.5 Loi géométrique ... 420
1.6 Loi de Poisson ... 426

2 Lois usuelles à densité . . . 428
2.1 Loi uniforme . . . 428
2.2 Loi exponentielle . . . 430
2.3 Loi normale . . . 432
2.4 Loi Gamma . . . 433

XXXIV Convergences et estimation 434
1 Convergences et approximations . . . 434
1.1 Convergence en probabilité . . . 434
1.2 Convergence en loi . . . 437

XXXV Divers 442

Chapitre I

Raisonnement par récurrence. Sommes et produits

1 Raisonnement par récurrence

Exercice 1
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Exercice 2
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|.$$

Exercice 3
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0;1], \quad 1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \frac{1}{1+nx}.$$

Exercice 4
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1) - 1$.

Exercice 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n u_{n+1}$ est un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

Exercice 7
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $2^{2^n} - 6$ est divisible par 10.

Exercice 8
Montrer que la somme des cubes de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 9.

Exercice 9
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 24$, il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 5a + 7b$.

Exercice 10
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^2 + y^2 = z^n$ admet une infinité de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^3$.

Exercice 11
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, il existe $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que $x_1 < \cdots < x_n$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} = 1$.

Exercice 12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.
Montrer que :

$$\min\left(\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right) \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n} \leqslant \max\left(\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Exercice 13
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 14
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x+y$, x^2+y^2, x^3+y^3 et x^4+y^4 soient entiers.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x^n+y^n est entier.

Exercice 15
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
Montrer que :

$$\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Exercice 16
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{1}{u_n}$.
Montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n > \sqrt{2n}.$$

Exercice 17
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{n-k+1} = 0.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

Exercice 18
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} \geqslant \frac{n u_n}{u_n^2 + n - 1}.$$

Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_n \geqslant n.$$

Exercice 19
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de réels strictement positifs.
   Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad (u_1\cdots u_k)^n \leqslant (u_1\cdots u_n)^k.$$
2. *Application*
   Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad M_p \leqslant \sqrt{2M_{p+1}M_{p-1}}.$$
   Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad M_k \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

Exercice 20
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad \sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1.$$

Exercice 21
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 - 1}{u_n}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $9u_n u_{n+1} + 1$ est un carré parfait.

Exercice 22
Déterminer les applications $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n+2) + \frac{1}{f(n)} = 2.$$

Exercice 23
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ admet un point fixe.

Exercice 24
Olympiades internationales 1977. X MP 2020
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \geqslant f(f(n)) + 1$.
1. Montrer que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad m \geqslant n \Longrightarrow f(m) \geqslant n.$$

   En déduire que l'application f est strictement croissante.
2. Déterminer l'application f.

Exercice 25
Concours général 1994
Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(1) > 0$ et, quels que soient les entiers naturels m et n, on a :

$$f\left(m^2 + n^2\right) = [f(m)]^2 + [f(n)]^2.$$

1. Calculer $f(k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 12$.
2. Calculer $f(n)$, n étant un entier quelconque.

Exercice 26
Déterminer les applications $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) + f(n+1) + f(f(n)) = 3n + 1.$$

Exercice 27
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que

$$f(2) = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 28
Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(f(n)) + f(n) = 2n.$$

Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 29
Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n.$$

Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 30 - Théorème d'Erdos-Surányi
Montrer que tout entier $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit d'une infinité de façons sous la forme :

$$n = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k k^2 \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_k \in \{-1;1\}.$$

Exercice 31
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note u_k le plus grand diviseur impair de k.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = n^2.$$

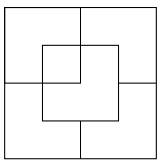
Exercice 32
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit E_n l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la somme des carrés des produits des éléments de chaque partie de E_n.

Exercice 33
Pour tout partie A finie et non vide de $\mathbb{N}^*$, on note $f(A)$ l'inverse du produit des éléments de A.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{\substack{A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \\ A \neq \varnothing}} f(A)$.

Exercice 34
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On choisit $n+2$ nombres distincts dans $E_n = \{1,2,\ldots,2n\}$.
Montrer que l'un au moins est égal à la somme de deux autres.
Est-ce encore vrai si on en choisit seulement $n+1$?

Exercice 35
Montrer que, pour tout $n \geqslant 6$, un carré peut être partagé en 6 petits carrés.

Exercice 36
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un damier de taille $2^n \times 2^n$ que l'on souhaite remplir à l'aide d'un carré $\square$ (de taille 1×1) et de triominos  (composés de trois carrés de taille 1×1).
Montrer que, quel que soit l'emplacement du carré, il est possible de paver le reste du damier avec les triominos.
Voici un exemple de pavage avec un damier 4×4 :



2 Sommes et produits

2.1 Sommes

Exercice 37
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = n$.
Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = 1$.

Exercice 38
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_p = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p$. On suppose que $S_2 = S_3 = S_4$.
Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k \in \{0;1\}$.

Exercice 39

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = 1$.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 40
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{2n} |x-k| \geqslant n^2.$$

Exercice 41
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 = 0$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k \geqslant -1$.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 \leqslant \frac{n}{3}.$$

Exercice 42
X MP 2005
Calculer $N = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + 999 \times 1000 \times 1001$.

Exercice 43
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$.
Calculer $\sum\limits_{n=1}^{20} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 44
Calculer $\sum\limits_{n=1}^{9999} \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n}\right)}$.

Exercice 45
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$.

Exercice 46
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$.

Exercice 47
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4 + 1}$.

Exercice 48
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

Exercice 49
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(k^2 + 1\right) k!$.

Exercice 50
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(k^2 + k + 1\right) k!$.

Exercice 51

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}$.

Exercice 52

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+p)$.

Exercice 53

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)!(n+k)!$.

Exercice 54

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}}$.

Exercice 55

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$.

Exercice 56

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}$.

Exercice 57

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}}}$.

Exercice 58

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin(kx)\cos((n-k)x).$$

Exercice 59

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan(k)\tan(k+1)$.

Exercice 60

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{u_1+u_2+\cdots+u_n}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \dfrac{n}{4}$.

Exercice 61

Centrale PC 2008
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \left(n + u_n^{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 62

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n - n + 1}{n+2}$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 63

Olympiades anglaises 1979
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_n$ des entiers naturels impairs distincts. On suppose que les entiers $|a_i - a_j|$ pour $1 \leqslant i <$

$j \leqslant n$ sont distincts.
Montrer que :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n\frac{n^2+2}{3}.$$

Exercice 64
Mines-Ponts PSI 2018
On observe les égalités suivantes :

$$9 \times 1 + 2 = 11, \quad 9 \times 12 + 3 = 111 \quad \text{et} \quad 9 \times 123 + 4 = 1111.$$

On conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 9\sum_{k=1}^{n} k \cdot 10^{n-k} + (n+1) = \sum_{k=0}^{n} 10^k.$$

Démontrer cette conjecture.

Exercice 65
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

Exercice 66
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$.

Exercice 67
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2(n+1)}u_n$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k < 1.$$

Exercice 68
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = (-1)^n u_n$.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n} u_k u_{k+2}$.

Exercice 69
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

Exercice 70
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels non nuls telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$.

Exercice 71 - Identité de Catalan
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Exercice 72
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}\left(1-(n+1)x^n + nx^{n+1}\right)$$

Exercice 73
X MP 2010
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \min(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \max(x_1, \ldots, x_n).$$

Exercice 74
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}.$$

Exercice 75
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n^2} \left\{\sqrt{k}\right\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}.$$

Exercice 76
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2n+1}{3}\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

Exercice 77
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1.$$

Exercice 78
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{3n}{2n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 79
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 80
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 4, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3 - \frac{1}{n!}.$$

Exercice 81
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)!} \leqslant 2 - \frac{1}{(2n)!}.$$

Exercice 82
1. Montrer que :

$$\forall (\lambda,\mu) \in [0;1[^2, \quad \forall c \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{\mu c}{1-\mu} \geqslant \frac{(1+c)(\lambda+\mu c)}{1-\lambda+(1-\mu)c}.$$

2. En déduire que :

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \forall \alpha \in]0,a[, \quad \forall \beta \in [0,b[, \quad \frac{a\alpha}{a-\alpha} + \frac{b\beta}{b-\beta} \geqslant \frac{(a+b)(\alpha+\beta)}{(a+b)-(\alpha+\beta)}.$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a_1,\dots,a_n) \in [0;1[^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k} \geqslant \frac{n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}{n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

Exercice 83
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^{2k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^{2k-1}} \geqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

Exercice 84
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |v_{n+1} - v_n| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 85
X MP 2013
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{m+n} \leqslant u_m + u_n.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}.$$

Exercice 86
X - ESPCI PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Exercice 87
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers non nuls distincts.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \geqslant \frac{2n+1}{3} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Exercice 88
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n-1} + u_{n+1} \geqslant 2u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la moyenne arithmétique de $u_1, \ldots, u_n$.
Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad U_{n-1} + U_{n+1} \geqslant 2U_n.$$

Exercice 89
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)$$

Exercice 90
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j) \qquad \text{et} \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j).$$

Exercice 91
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|.$$

Exercice 92
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij \qquad \text{et} \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij.$$

Exercice 93
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{j}.$$

Exercice 94
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}.$$

Exercice 95
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j+1}.$$

Exercice 96
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i^2}{j}.$$

Exercice 97
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j+1}.$$

Exercice 98
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^3}{j^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i^3}{j^2}.$$

Exercice 99
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^3}{(j+1)^2}.$$

Exercice 100
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculer les sommes :

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a^{i+j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a^{i+j}$$

Exercice 101
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculer les sommes :

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a^{j-i} \qquad \text{et} \qquad \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a^{j-i}$$

Exercice 102
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) \qquad \text{et} \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j).$$

Exercice 103
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculer les sommes :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a^{\min(i,j)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a^{\max(i,j)}.$$

Exercice 104
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{i}{i+j}.$$

Exercice 105
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \right)^2.$$

Exercice 106
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.
Montrer qu'il existe $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que :

$$(a_{k+1} - a_k)^2 \leqslant \frac{12}{n\,(n^2-1)} \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Exercice 107
Présélection Olympiades Internationales 2006
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leqslant \frac{n}{2(a_1 + \cdots + a_n)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j.$$

Exercice 108 - Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_+)^{2n}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Exercice 109 - Inégalité de Polya-Szegö
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n}$.
On pose $a = \min\limits_{k \in [\![1,n]\!]} a_k$, $A = \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} a_k$, $b = \min\limits_{k \in [\![1,n]\!]} b_k$ et $B = \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} b_k$.
Montrer que :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Exercice 110 - Inégalité de Cassel
ENS MP 2007
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w_1, \ldots, w_n, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. On pose $m = \min\limits_{k \in [\![1,n]\!]} \dfrac{a_k}{b_k}$ et $M = \max\limits_{k \in [\![1,]\!]} \dfrac{a_k}{b_k}$.
Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} w_k b_k^2\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k a_k b_k\right)^2.$$

Exercice 111 - Lemme de Titu ou inégalité de Sedrakyan
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. On a :

$$\frac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_k}.$$

Exercice 112
X - ESPCI PC 2013
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k \geqslant 0$.
Montrer que :

$$\forall (\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad P\left(\sqrt{\alpha\beta}\right) \leqslant \sqrt{P(\alpha)P(\beta)}.$$

Exercice 113
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(a_1,\dots,a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Exercice 114
X PC 2001
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ et $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$. Soit $(z_1,\dots,z_n)$ une permutation de $(y_1,\dots,y_n)$.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2.$$

Exercice 115 - Inégalité de Tchebychev
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.
   Montrer l'inégalité de Tchebychev :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad ,\forall (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p \leqslant n^{p-1}\sum_{k=1}^{n} x_k^p.$$

2.2 Produits

Exercice 116
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1 - u_k)$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} u_k v_k.$$

Exercice 117
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 118
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs strictement positives définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{u_{n+2}u_n} - \sqrt{u_{n+1}u_n} = 2u_{n+1}.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 119
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 120
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)$.

Exercice 121
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{4k^3 - 3k + 1}{4k^3 - 3k - 1}$.

Exercice 122
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{8} + \frac{k+1}{(2k+1)^2}\right)$.

Exercice 123
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{9} + \frac{k^2 + k + 1}{(k-1)^3}\right)$.

Exercice 124
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(x^{2\times 3^k} + x^{3^k} + 1\right)$.

Exercice 125
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{2}{x^{2^k} + x^{-2^k}}\right)$.

Exercice 126
1. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant 2, \quad 1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k+1)(k-1)}.$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4.$$

Exercice 127
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

Exercice 128
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} (4k - 2) = \prod_{k=1}^{n} (n + k).$$

Exercice 129
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :
$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} 2^{j \times i!}\right).$$

Exercice 130
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (n(n+p) - k(k+p))$.

Exercice 131
Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Exercice 132
Putnam 1996
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\frac{2n-1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2n-1}{2}} < 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) < \left(\frac{2n+1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

Exercice 133
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{\frac{3}{4n+3}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{4k+3} \leqslant \sqrt{\frac{5}{4n+5}}.$$

Exercice 134
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n}^n \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Exercice 135
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 136
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in [1, +\infty[^n$. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} (x_k + 1) \leqslant 2^{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n} x_k + 1\right).$$

Exercice 137
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.
Montrer que, si $\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant n$.

Exercice 138
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in [1, +\infty[^n$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant n - 1 + \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 139
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in [0; 1]^n$. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 140
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \left(k^k k!\right) = (n!)^{n+1}.$$

Exercice 141
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} (2k)! \geqslant ((n+1)!)^n.$$

Exercice 142
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum \cos(x_0 \pm x_1 \pm \cdots \pm x_n)$, la somme étant étendue aux 2^n combinaisons possibles de signes devant $x_1, \ldots, x_n$.
Déterminer une expression factorisée de S_n.

Exercice 143 - Inégalité arithmético-géométrique
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs.
Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 144
Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \ln(n!) > \frac{3n}{10}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 145 - Inégalité de Ky Fan
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels à valeurs dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\right)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Chapitre II

Nombres complexes

1 Calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice 146

1. Vérifier que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z+1)(z+j)\left(z+j^2\right) = (1+z)(1+jz)\left(1+j^2z\right).$$
2. Vérifier que :
$$\forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad z_1^3 + z_2^3 = (z_1+z_2)(z_1+jz_2)\left(z_1+j^2z_2\right).$$

Exercice 147

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que :
$$\frac{1+\overline{z}}{1-z} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R} \cup \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Exercice 148

CCP PC 2009

Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\} \longmapsto \dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exercice 149

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2$.

Montrer que :
$$|\Re\mathrm{e}(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\Re\mathrm{e}(z_k)| \qquad \text{et} \qquad |\Im\mathrm{m}(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\Im\mathrm{m}(z_k)|.$$

2 Module

Exercice 150

Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que :
$$z_1\overline{z_2} = \left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2 - \left|\frac{z_1-z_2}{2}\right|^2 + \mathrm{i}\left|\frac{z_1+\mathrm{i}z_2}{2}\right|^2 - \mathrm{i}\left|\frac{z_1-\mathrm{i}z_2}{2}\right|^2$$

Exercice 151
CCP PC 2011
Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \longmapsto \dfrac{z+1}{z-\mathrm{i}}$.
1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|f(z)| = 2$.

Exercice 152
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$. Montrer que :
$$\Re\mathrm{e}\left(z^2 + 4z + 3\right) \geqslant 0.$$

Exercice 153
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc = 1$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$, on a :
$$\Im\mathrm{m}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\Im\mathrm{m}(z)}{|cz+d|^2}.$$

Exercice 154
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}(-1)^k\right)^2 + \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1}(-1)^k\right)^2 = 2^n.$$

Exercice 155
Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que :
$$z_1^2 + z_2^2 = |z_1 + \mathrm{i}z_2|^2 \iff z_1 + \mathrm{i}z_2 = 0 \text{ ou } (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 156
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $|z+1| = |z| + 1$.

Exercice 157
X-ESPCI PC 2016
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $a > b$, et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - a| = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Montrer que :
$$\left|\frac{b-z}{b+z}\right| = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

Exercice 158
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :
$$\Re\mathrm{e}(z) < \frac{1}{2} \iff \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1.$$

Exercice 159
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|a| \leqslant |b|$ si, et seulement s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z+a| + |z-a| = 2|b|$.

Exercice 160
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que :
$$\left|\frac{1 - z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

Exercice 161
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :
$$|6z - \mathrm{i}| \leqslant |2 + 3\mathrm{i}z| \iff |z| \leqslant \frac{1}{3}.$$

Exercice 162
Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z+1| \geqslant 1 \text{ ou } |z-1| \geqslant 1.$$

Exercice 163
Soit $(z,\alpha) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tel que $|1+z| \geqslant 1$ et $\alpha \geqslant 1$.
Montrer que :
$$|1+\alpha z| \geqslant 1.$$

Exercice 164
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-2|+|z| \geqslant 4$. Montrer que :
$$|z-1| \geqslant \sqrt{3}.$$

Exercice 165
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z+1|+|z-1| \geqslant 2\sqrt{2}$. Montrer que :
$$|z| \geqslant 1.$$

Exercice 166
Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que :
$$|z_1z_2-1|+1 \leqslant (|z_1-1|+1)(|z_2-1|+1).$$

Exercice 167
Soit $(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que :
$$|1+z_1|+|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3| \geqslant 1.$$

Exercice 168
Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que :
$$|z_1|+|z_2| \leqslant |z_1+z_2|+|z_1-z_2|.$$
Interpréter géométriquement cette inégalité et étudier le cas d'égalité.

Exercice 169
Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leqslant |z|^2+|z-1|.$$

Exercice 170
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :
$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}-nz^n=0 \Longrightarrow |z| \leqslant 1.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que :
$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}-nz^n=0 \Longrightarrow |z| < 1.$$

Exercice 171
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que :
$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1+|z_k|}.$$

Exercice 172
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1,\dots,z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

1. Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z) \frac{\overline{z_k}}{|z_k|}.$$
2. En déduire que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|.$$

Exercice 173
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que :
$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \leqslant M.$$
Montrer que :
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad |z_k| \leqslant \sqrt{\frac{n-1}{n} M}.$$

Exercice 174
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leqslant 1\}$. Montrer que :
$$\forall (z_1,\dots,z_n,z_1',\dots,z_n') \in D^{2n}, \qquad \left| \prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} z_k' \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_k'|.$$

Exercice 175 - Inégalité de Ptolémée
X - ESPCI PC 2014

1. Montrer que :
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{C}^*)^2, \qquad \left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a| \cdot |b|}.$$
2. Montrer que :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{C}^3, \quad |x| \cdot |y-z| \leqslant |y| \cdot |z-x| + |z| \cdot |x-y|.$$
3. En déduire l'inégalité de Ptlolémée :
$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4, \quad |x-y| \cdot |z-t| \leqslant |x-z| \cdot |y-t| + |x-t| \cdot |y-z|.$$
Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 176
Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$.

1. Montrer la formule du parallélogramme :
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$
Interpréter géométriquement cette égalité.
2. On suppose que $|z_1| \leqslant 1$ et $|z_2| \leqslant 1$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tel que $|z_1 + \varepsilon z_2| \leqslant \sqrt{2}$.
3. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = z_1 z_2$. Montrer que :
$$|z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1+z_2}{2} + u \right| + \left| \frac{z_1+z_2}{2} - u \right|.$$
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $|\cos(z)+1| + |\cos(z)-1|$ et $|\mathrm{ch}(z)+1| + |\mathrm{ch}(z)-1|$.

Exercice 177
Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Montrer que :

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, z_2 = \mathrm{i}\lambda z_1$$

Exercice 178
Mines-Ponts MP 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Longleftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad z_k = |z_k|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

3 Nombres complexes de module 1. Trigonométrie

Exercice 179
Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{U}^2$ tel que $|z_1 z_2 + 2| = 1$.
Montrer que $z_1 z_2 = -1$.

Exercice 180
Montrer que :

$$\forall (z,\alpha) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad |z - \alpha| \geqslant \frac{\alpha + 1}{2}|z - 1|.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 181
Soit $(a,b) \in \mathbb{U}^2$, $a \neq b$. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{z + ab\overline{z} - (a + b)}{a - b} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Exercice 182
Montrer que :

$$\forall (z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{U}^3, \quad |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = |z_1 + z_2 + z_3|.$$

Exercice 183
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que :

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } z \in \mathbb{U}.$$

Exercice 184
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$\frac{1 + z}{1 - z} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{U}.$$

Exercice 185
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$\frac{z - u\overline{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow u \in \mathbb{U}.$$

Exercice 186
Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{U}^2$ tel que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que :

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 187
X PC 2001
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a\bar{b} \neq 1$. On note $z = \dfrac{a-b}{1-a\bar{b}}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que :
a) $z \in \mathbb{U}$;
b) $|z| < 1$.

Exercice 188
Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad |1+z| \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad \left|1+z^2\right| \geqslant 1.$$

Exercice 189
Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{U}^2$. Montrer que :
$$|z_1+1| + |z_2+1| + |z_1 z_2 + 1| \geqslant 2.$$

Exercice 190
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{U}$. Montrer que :
$$n|1+z| + \left|1+z^2\right| + \left|1+z^3\right| + \cdots + \left|1+z^{2n}\right| + \left|1+z^{2n+1}\right| \geqslant 2n.$$

Exercice 191
Mines-Ponts MP 2005
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}c} = 0.$$
Montrer que :
$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}b} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}c} = 0.$$

Exercice 192
Montrer que :
$$\forall (z_1,z_2) \in \mathbb{U}^2, \quad \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 193
X MP 2005
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{U}^3$ avec $c \neq a$. Montrer que :
$$\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 194
X MP 2007
Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$.
1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (u,v) pour que :
$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad \frac{(z-u)(1-zv)}{z} \in \mathbb{R}.$$
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (u,v) pour que :
$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad |(z-u)(z-v)| = 1.$$

Exercice 195
Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, et $\varphi_a : z \longmapsto \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
Montrer que $\mathbb{U}$ est invariant par φ_a.

Exercice 196
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{3k}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{3k+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{3k+2}.$$

Exercice 197
Déterminer l'ensemble

$$E = \left\{ z \in \mathbb{U} \,/\, \left| \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \right| = 1 \right\}.$$

Exercice 198
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{1 + \mathrm{i}\tan(x)}{1 - \mathrm{i}\tan(x)} \right)^n = \frac{1 + \mathrm{i}\tan(nx)}{1 - \mathrm{i}\tan(nx)}.$$

Exercice 199
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Exercice 200
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1;1[$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \cos(k\theta) = \frac{1 - x\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \sin(k\theta) = \frac{x\sin(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}.$$

Exercice 201
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

Exercice 202
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k(\theta)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k\theta)}{\cos^k(\theta)}.$$

Exercice 203
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^k(\theta)\cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos^k(\theta)\sin(k\theta).$$

Exercice 204
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)$ avec $p < n$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \cos^{2p}\left(\theta + \frac{k\pi}{2n}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{2n-1} \sin^{2p}\left(\theta + \frac{k\pi}{2n}\right).$$

Exercice 205
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 206
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \geqslant \frac{n}{4}.$$

4 Formes trigonométriques

Exercice 207
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Déterminer le module et un argument de $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}\tan(\theta)}{1 - \mathrm{i}\tan(\theta)}$.

Exercice 208
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Déterminer le module et un argument de $z = 1 - \mathrm{i}\tan(\theta)$.

Exercice 209
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Calculer le module et un argument de $z = \dfrac{1 + \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)}$.

Exercice 210
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Calculer le module et un argument de $z = \dfrac{1 + \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)}$.

Exercice 211
Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le module et un argument de $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ et de $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$.

Exercice 212
Déterminer le module et un argument de $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Exercice 213
Déterminer le module et un argument de $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Exercice 214
Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$|a| \leqslant 1 \iff (\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \implies \Re\mathrm{e}(1 - az) > 0).$$

Exercice 215
Montrer que le disque $\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \left| z - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2} \right\}$ est stable par l'application $f : z \longmapsto z(1 - z)$.

Exercice 216
Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|z_1| = |z_2| = \rho > 0$.
Montrer que :

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{\rho^2 + z_1 z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1 - z_2}{\rho^2 - z_1 z_2}\right)^2 \geqslant \frac{1}{\rho^2}.$$

Exercice 217
Mines-Ponts MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k} (-1)^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k.$$

Exercice 218
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_p = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{4k+p}$ pour tout $p \in [\![0;3]\!]$.

5 Équations du second degré

Exercice 219
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(3z^2+z+1\right)^2 + \left(z^2+2z+2\right)^2 = 0$.

Exercice 220
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - (5-14\mathrm{i})z^2 - 2(12+5\mathrm{i}) = 0$.

6 Racines n-ièmes

Exercice 221
Mines-Ponts PSI 2016
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 222
Soit $\alpha \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right)\left(\alpha^4+\alpha+1\right) = \alpha(\alpha+1).$$

Exercice 223
Soit $\alpha \in \mathbb{U}_7 \setminus \{1\}$. Calculer :

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^6}.$$

Exercice 224
Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la partie imaginaire de $\left(\omega^2+\omega+1\right)^n$.

Exercice 225
CCP PC 20016
On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}$, $z_1 = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $z_2 = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
1. Montrer que $\Im\mathrm{m}(z_1) > 0$.
2. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.
3. En déduire z_1 et z_2.

Exercice 226
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
1. Calculer

$$(\omega-1)\left(\omega^{n-2} + 2\omega^{n-3} + \cdots + (n-2)\omega + (n-1)\right).$$

2. Montrer que :

$$|\omega - 1| \geqslant \frac{2}{n-1}$$

3. En déduire que, si $k \in \mathbb{N}^*$ n'est pas un multiple de n, alors :

$$\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \geqslant \frac{1}{n-1}.$$

Exercice 227
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Exercice 228
X - ESPCI PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2k}{2n+1}\pi\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2k}{2n+1}\pi\right).$$

Exercice 229
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right).$$

Exercice 230
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \mathbb{U}_n$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$$

Exercice 231
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k.$$

Exercice 232
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k.$$

Exercice 233
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.
Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k}.$$

Exercice 234
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \omega^k\right)^n.$$

.

Exercice 235
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Calculer :

$$\sum_{0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n-1} \binom{q}{p} \omega^{p+q}.$$

Exercice 236
X MP 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.
Calculer :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \right|.$$

Exercice 237
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 238
Centrale PC 2014
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(z^2+1\right)^n - (z+\mathrm{i})^{2n} = 0$.

7 Interprétation géométrique des nombres complexes

Exercice 239
CCP PC 2010
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, A, B et C les points d'affixes a, b et c.
Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.

Exercice 240
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes 1, z et z^3 soient alignés.

Exercice 241
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle au point d'affixe z^3.

Exercice 242
X - ESPCI PC 2009
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes 1, z et $1+z^2$ soient alignés.

Exercice 243
X MP 2005
Déterminer les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme.

Chapitre III

Ensembles et applications

1 Ensembles

Exercice 244
Soit E et F deux ensembles. Comparer :
a) $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cup F)$;
b) $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cup F)$.

Exercice 245
Soit E un ensemble et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Simplifier :
a) $X_1 = (A \cap B) \cup \big(A \cap \overline{B}\big)$
b) $X_2 = (A \cup B) \cap \big(A \cup \overline{B}\big)$
c) $X_3 = (A \cap B) \cup \big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B\big) \cup \big(\overline{A} \cap \overline{B}\big)$
d) $X_4 = (A \cup B) \cap \big(A \cup \overline{B}\big) \cap \big(\overline{A} \cup B\big) \cap \big(\overline{A} \cup \overline{B}\big)$.

Exercice 246
Soit E un ensemble et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Simplifier :
a) $X_1 = A \cup \big(\overline{A} \cap B\big) \cup \big(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\big)$
b) $X_2 = A \cap \big(\overline{A} \cup B\big) \cap \big(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C\big)$.

Exercice 247
Soit E un ensemble et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

Exercice 248
Soit E un ensemble et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :

$$A = B \Longleftrightarrow A \cup B = A \cap B.$$

Exercice 249
Soit E un ensemble et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :

$$A \setminus B = A \Longleftrightarrow B \setminus A = B.$$

Exercice 250
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C \qquad \text{et} \qquad (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

Exercice 251
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$.
Montrer que :
$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

Exercice 252
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 253
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 254
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Exercice 255
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B.$$

Exercice 256
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$

Exercice 257
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \cup B = A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B = A \cap C \iff B = C$$

Exercice 258
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \cap B = A \cap C \quad \text{et} \quad B \setminus A = C \setminus A \quad \iff \quad B = C.$$

Exercice 259
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \cup B = A \cap C \quad \text{et} \quad A \cap B = A \cup C \iff A = B = C$$

Exercice 260
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \cup B = A \cap C, \quad B \cup C = A \cap B, \quad A \cup C = B \cap C \iff A = B = C$$

Exercice 261
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. On suppose que $A \cup B = B \cap C$.
Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 262
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :

$$A \cap B \subset A \cap C \quad \text{et} \quad A \cup B \subset A \cup C \Longrightarrow B \subset C$$

Exercice 263
Soit E un ensemble et $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :

$$A \cap B = B \cap C = C \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup C = C \cup A \quad \Longleftrightarrow \quad A = B = C.$$

Exercice 264
Soit E un ensemble et $(A,B,C,D) \in (\mathcal{P}(E))^4$. Montrer que :

$$A \subset C, \quad B \subset D, \quad C \cap D = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup B = C \cup D \quad \Longleftrightarrow \quad A = C \quad \text{et} \quad B = D.$$

Exercice 265
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, E un ensemble et $(A_1, \dots, A_n) \in (\mathcal{P}(E))^n$. Montrer que :

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Exercice 266
Soit E un ensemble. Pour $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, la différence symétrique de A et B, notée $A \Delta B$, est définie par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta E$ et $A \Delta \varnothing$.
2. Soit $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
3. Soit $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :
$$A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}.$$
4. Soit $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :
$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B).$$
5. Soit $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :
$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B).$$
6. Soit $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :
$$A \setminus B = (A \cup B) \Delta B.$$
7. Soit $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrer que :
$$A = B \Longleftrightarrow A \Delta B = \varnothing.$$
8. Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \Delta C = B \Delta C \Longleftrightarrow A = B.$$
9. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :
$$A = \varnothing \Longleftrightarrow \exists B \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = B.$$
10. Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$(A \Delta B) \cap (A \Delta C) \subset A \Delta (B \cap C).$$
11. Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :
$$A \Delta (B \cup C) \subset (A \Delta B) \cup (A \Delta C).$$

12. Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

13. Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) \subset A \cup (B \Delta C).$$

14. Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

15. Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer que :

$$A \setminus B \subset C, \quad B \setminus C \subset A, \quad C \setminus A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \Delta B \Delta C = A \cap B \cap C.$$

16. Soit $(A,B,C,D) \in (\mathcal{P}(E))^4$. Montrer que :

$$(A \cap B) \Delta (C \cap D) \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta D).$$

Exercice 267
Soit E un ensemble non vide et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$.
Résoudre et discuter l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $(A \cap X) \cup \big(B \cap \overline{X}\big) = \varnothing$.

Exercice 268
Soit E un ensemble et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$.
1. Résoudre et discuter l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $X \cap A = B$.
2. Résoudre et discuter l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $X \cup A = B$.

2 Applications et relations

2.1 Applications

Exercice 269
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application telle que :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n + f(n)) = f(n)$;
- il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n_0) = 1$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 1$.

Exercice 270
Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m)f(n).$$

Exercice 271
Montrer qu'il n'existe pas deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = x^3.$$

Exercice 272
Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
1. Montrer que :

$$\forall (A_1,A_2) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

2. a) Montrer que :

$$\forall (A_1,A_2) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

   b) Montrer que f est injective si, et seulement si, on a :

$$\forall (A_1,A_2) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

3. Montrer que :
$$\forall (B_1,B_2) \in (\mathcal{P}(F))^2, \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$
4. Montrer que :
$$\forall (B_1,B_2) \in (\mathcal{P}(F))^2, \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Exercice 273
Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
1. a) Montrer que :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset f^{-1}(f(A)).$$
   b) Montrer que f est injective si, et seulement si, on a :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A = f^{-1}(f(A)).$$
2. a) Montrer que :
$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \qquad f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E).$$
   En déduire que :
$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B.$$
   b) Montrer que f est surjective si, et seulement si, on a :
$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$
3. a) Montrer que :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f\left(f^{-1}(f(A))\right) = f(A).$$
   b) Montrer que :
$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(B)\right)\right) = f^{-1}(B).$$

Exercice 274
Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
Montrer que f est injective si, et seulement si, on a :
$$\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Exercice 275
Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
Montrer que f est injective si, et seulement si, on a :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f\left(\complement_E A\right) \subset \complement_F f(A).$$

Exercice 276
Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
Montrer que f est bijective si, et seulement si, on a :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f\left(\complement_E A\right) = \complement_F f(A).$$

Exercice 277
Soit E un ensemble non vide.
1. Montrer qu'il existe une application injective $E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.

Exercice 278
Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
1. a) Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
   b) Montrer que, si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g injective.
2. a) Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Applications

3. Soit E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective.
   Montrer que f et g sont bijectives.
4. Soit E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ injective.
   Montrer que f et g sont bijectives.
5. Soit E, F, G et H quatre ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.
   Montrer que f, g et h sont bijectives.
6. Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow E$ trois applications.
   On considère les trois applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$.
   Montrer que, si deux d'entre elles sont injectives (respectivement surjectives) et la troisième surjective (resp. injective), alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 279

Soit E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ deux applications telles que :

$$f \circ g \circ f = g \qquad \text{et} \qquad g \circ f \circ g = f.$$

Montrer que, si l'une des applications f ou g est injective ou surjective, alors elles sont toutes deux bijectives.

Exercice 280

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. On suppose que f est injective.
   Montrer qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, puis que g est surjective.
2. On suppose que f est surjective.
   Montrer qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, puis que g est injective.

Exercice 281 - Lemmes de factorisation

Soit E, F et G trois ensembles.

1. Soit $f : F \longrightarrow E$ et $g : G \longrightarrow E$ deux applications.
   Montrer qu'il existe une application $h : G \longrightarrow F$ telle que $g = f \circ h$ si, et seulement si, $g(G) \subset f(F)$.
   Déterminer une condition pour que l'application h soit unique.
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications.
   Montrer qu'il existe une application $h : F \longrightarrow G$ telle que $g = h \circ f$ si, et seulement si, on a :
   $$\forall (x_1,x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(x_1) = g(x_2).$$
   Déterminer une condition pour que l'application h soit unique.

Exercice 282

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, elle est surjective.

Exercice 283

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective;
(ii) f est surjective;
(iii) $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 284

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 285
Soit f et g les applications définies par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

Exercice 286
Soit f et g les applications définies par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 287
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(k,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2k+1)$.
2. Soit f l'application définie par :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (k,p) & \longmapsto & 2^p(2k+1) \end{array} \right.$$
Montrer que f est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 288
Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, surjectives, telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

Exercice 289
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, surjectives, telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(f(x-y)) = f(x) - f(y).$$

Exercice 290
Soit E un ensemble, $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ et f l'application définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective. Préciser alors son application réciproque.

Exercice 291
Soit E un ensemble, $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ et f l'application définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f n'est pas surjective.
2. Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$.

Exercice 292
Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose :

$$A_- = \{B \in \mathcal{P}(E) \,/\, B \subset A\}, \quad A_+ = \{B \in \mathcal{P}(E) \,/\, A \subset B\} \qquad \text{et} \qquad A^* = A_- \times A_+$$

et on considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & A^* \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cup A) \end{array} \right.$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 293
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application.

1. On suppose que f est injective et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$.
   Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
2. On suppose que f est surjective et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$.
   Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 294
X MP 2017
Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 295
Concours général 1995. X MP 2018
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application bijective.
Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tel que $a < b < c$ et $2f(b) = f(a) + f(c)$.

Exercice 296
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application surjective et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application injective telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geqslant g(n).$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 297
Soit E un ensemble. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on considère les applications :

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longrightarrow & X \cap A \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \psi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longrightarrow & X \cup A \end{array} \right.$$

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) φ_A est injective;
   (ii) φ_A est surjective;
   (iii) $A = E$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) ψ_A est injective;
   (ii) ψ_A est surjective;
   (iii) $A = \varnothing$.

Exercice 298
Soit E et F deux ensemble, $f : E \longrightarrow F$ une application et g l'application définie par :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ Y & \longmapsto & f(Y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est injective si, et seulement si, f est injective.
2. Montrer que g est surjective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 299
Soit E et F deux ensemble, $f : E \longrightarrow F$ une application et g l'application définie par :
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ Y & \longmapsto & f^{-1}(Y) \end{array} \right.$$
1. Montrer que g est injective si, et seulement si, f est surjective.
2. Montrer que g est surjective si, et seulement si, f est injective.

Exercice 300 - Théorème du point fixe de Knaster-Tarski
Soit E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante pour l'inclusion.
Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que $f(X) = X$.

Exercice 301
Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
Montrer que :
$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

Exercice 302
Soit E un ensemble non vide et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. On pose :
$$[A \cap B,B] = \{X \in \mathcal{P}(E) \,/\, A \cap B \subset X \subset B\} \qquad \text{et} \qquad [A,A \cup B] = \{X \in \mathcal{P}(E) \,/\, A \subset X \subset A \cup B\}.$$
Soit f et g les applications définies par :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [A,A \cup B] & \longrightarrow & [A \cap B,B] \\ X & \longmapsto & X \cap B \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} [A \cap B,B] & \longrightarrow & [A,A \cup B] \\ X & \longmapsto & X \cup A \end{array} \right.$$
Montrer que les applications f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Exercice 303
1. Soit F et G deux ensembles et $f : F \longrightarrow G$ une application.
   Montrer que f est injective si, et seulement si, pour tout ensemble E non vide, on a :
   $$\forall (g_1,g_2) \in \left(F^E\right)^2, \quad f \circ g_1 = f \circ g_2 \Longrightarrow g_1 = g_2.$$
2. Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
   Montrer que f est surjective si, et seulement si, pour tout ensemble G ayant au moins deux éléments, on a :
   $$\forall (g_1,g_2) \in \left(G^F\right)^2, \quad g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2.$$
3. *Application*
   Soit E, E', F et F' quatre ensembles, $u : E' \longrightarrow E$ et $v : F \longrightarrow F'$ deux applications. On considère l'application φ définie par :
   $$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F'^{E'} \\ f & \longmapsto & v \circ f \circ u \end{array} \right.$$
   a) Montrer que, si u est surjective et v injective, alors φ est injective.
   b) Montrer que, si u est injective et v surjective, alors φ est surjective.

Exercice 304
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble et $f_1, \ldots, f_n$ des applications bijectives de E dans E telles que $f_1 \circ \cdots \circ f_n = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n \circ f_1 \circ \cdots \circ f_k = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 305
Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On considère l'application h définie par :
$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & (f(x),g(x)) \end{array} \right.$$
1. Montrer que, si f ou g est injective, alors h est injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives. L'application h est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 306
Soit f et g deux applications injectives de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que l'application $n \longmapsto f(n)g(n)$ n'est pas surjective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

2.2 Relations

Exercice 307
Soit E un ensemble. Quelle est la seule relation sur E qui soit à la fois réflexive, symétrique et antisymétrique?

Exercice 308
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\star$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \star y = xy + \alpha(x+y).$$

Déterminer α pour que la relation $\star$ soit associative.

Exercice 309
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A\mathcal{R}B \iff A = B \quad \text{ou} \quad A = \overline{B}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 310
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par :

$$u\mathcal{R}v \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists p,q \geqslant n, \quad u_p \leqslant v_n \quad \text{et} \quad v_q \leqslant u_n.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 311
Étudier la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff x \leqslant x' \quad \text{et} \quad x \leqslant y' \quad \text{et} \quad y \leqslant x' \quad \text{et} \quad y \leqslant y'.$$

Exercice 312
Étudier la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff x \leqslant x' \quad \text{et} \quad y \leqslant y'.$$

Exercice 313
Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff (x < x') \quad \text{ou} \quad (x = x' \quad \text{et} \quad y \leqslant y').$$

est un ordre total.
Cet ordre est appelé l'ordre lexicographique.

Exercice 314
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

Exercice 315
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x\mathrm{e}^y = y\mathrm{e}^x.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, préciser le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 316
Soit $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \Im\mathrm{m}(z) > 0\}$ et $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathcal{P}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z' = \frac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}$.

Exercice 317
Étudier la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad y = x^n.$$

Exercice 318
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad q = p^n.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.
2. La partie $\{2;3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 319
1. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad z' = z^{2^n}.$$

   $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ?
2. Reprendre la question précédente en définissant $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 320
Soit E un ensemble, $H \in \mathcal{P}(E)$ et $\preccurlyeq$ la relation définie sur E par :

$$A \preccurlyeq B \iff A \cap H \subset B \cap H \text{ et } B \cap \overline{H} \subset A \cap \overline{H}.$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
   Cet ordre est-il total ou partiel ?
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ admet-il un plus grand élément et un plus petit élément pour cette relation d'ordre ?

Exercice 321
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff |x' - x| \leqslant y' - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.
2. Soit $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$. Montrer que $\sup(A) = \big(0,\sqrt{2}\big)$.

Chapitre IV

Structures algébriques usuelles

1 Lois de composition interne

2 Groupes

Exercice 322
Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un groupe pour la loi $\star$ définie par $(x,y) \star (x',y') = (xx',xy' + y)$. Est-il abélien ?

Exercice 323
Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x,y) \star (x',y') = \left(x + x',y\mathrm{e}^{x'} + y'\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Montrer que $\left(\mathbb{R}^2,\star\right)$ est un groupe. Est-il abélien ?

Exercice 324
CCP - TPE - INT - ICP 1996
Soit $(G,\cdot)$ un groupe, e son élément neutre et $(a,b) \in G^2$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(ab)^n = e$.
Montrer que $(ba)^n = e$.

Exercice 325
Soit $(G,\star)$ un groupe tel que, pour tout $a \in G$, $a^2 = e$.
Montrer que $(G,\star)$ est un groupe abélien.

Exercice 326
Soit G un groupe d'ordre pair.
Montrer qu'il existe $x \in G$, $x \neq e$, tel que $x = x^{-1}$.

Exercice 327
Soit x et y deux éléments d'un groupe G tels que x est d'ordre 3, y est d'ordre impair et $xyx^{-1} = y^5$.
Déterminer l'ordre de y.

Exercice 328
Soit $(G,\star)$ un groupe. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \in \{n-1,n,n+1\}, \quad \forall (x,y) \in G^2, \quad (x \star y)^k = x^k \star y^k.$$

Montrer que G est commutatif.

Exercice 329
Soit G un groupe fini, A et B deux parties de G telles que $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G)$.
Montrer que $G = AB = \{xy \,/\, (x,y) \in A \times B\}$.

Exercice 330
Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On pose :

$$HK = \{hk \,/\, (h,k) \in H \times K\}.$$

1. Montrer que, si G est abélien, alors HK est un sous-groupe de G.
2. Montrer que HK est un sous-groupe de G si, et seulement si, $HK = KH$.

3 Anneaux

Exercice 331
Un anneau fini est-il nécessairement commutatif ?

Exercice 332
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, 1_A le neutre de $\cdot$ et $(a,b) \in A^2$.
Montrer que :

$$aba = 1_A \quad \Longleftrightarrow \quad a^2b = 1 \quad \text{et} \quad ba^2 = 1.$$

Exercice 333
Soit A un anneau et $(a,b) \in A^2$ tel que :

$$ab + ba = 1_A \qquad \text{et} \qquad a^2b + ba^2 = a.$$

1. Montrer que :
$$a^2b = ba^2 \qquad \text{et} \qquad 2aba = a$$
2. Montrer que a est inversible et $a^{-1} = 2b$.

Exercice 334
Soit A un anneau, $(a,b) \in A^2$. On note 1 le neutre de la deuxième loi de A. On suppose que a, b et $ab - 1$ sont inversibles dans A.
1. On note $c = ab - 1$.
Montrer que $a - b^{-1}$ est inversible dans A et que $\left(a - b^{-1}\right)^{-1} = bc^{-1}$.
2. On note $d = a^{-1} - \left(a - b^{-1}\right)^{-1}$.
Montrer que d est inversible dans A et que $d^{-1} = -ca$.

Exercice 335
Soit A un anneau et $(a,b) \in A^2$.
Montrer que $1 - ab$ est inversible si, et seulement si, $1 - ba$ est inversible.

Exercice 336
Soit A un anneau tel que :

$$\forall x \in A, \quad x^2 = x.$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in A, \quad 2x = 0.$$
2. Montrer que A est un anneau commutatif.

Exercice 337
Soit A un anneau tel que :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad (xy)^2 = x^2y^2.$$

1. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in A^2, \quad xyx = x^2y = yx^2.$$
2. En déduire que A est commutatif.

Exercice 338
Soit A un anneau tel que :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad yx \in \{xy, -xy\}.$$

Montrer que A est commutatif.

4 Corps

Exercice 339
Soit $\mathbb{K}$ un corps (non nécessairement commutatif) et $(a,b) \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^2$ tel que $a + b = 1$ et $a^{-1} + b^{-1} = 1$.
Montrer que $ab = ba = 1$ et $a^6 = b^6 = 1$.

Chapitre V

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1 Divisibilité. Congruences

Exercice 340
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $3x^2 + xy - 11 = 0$.

Exercice 341
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $(p,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que, si p divise $n^2 - n$, alors p divise $n^k - n$.

Exercice 342
Mines/Ponts et Chaussées 2001
Soit $aabb$ l'écriture en base 10 d'un certain entier n. On suppose que n est un carré.
Déterminer n.

Exercice 343
Soit $\overline{abcdef}$ l'écriture en base 10 d'un entier naturel divisible par 13.
Montrer que l'entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{bcdefa}$ est encore divisible par 13.

Exercice 344
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, N le nombre de diviseurs de n et P le produit de ces diviseurs.
Déterminer une relation entre n, N et P.

Exercice 345
Montrer que 11 divise $2^{123} + 3^{121}$.

Exercice 346
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 20n + 74$ n'est pas divisible par 169.

Exercice 347
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 3 divise $5n^3 + n$.

Exercice 348
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 6 divise $n(n+2)(7n-5)$.

Exercice 349
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercice 350
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $4^{3n+1} + 2^{3n+1} + 1$.

Exercice 351
X MP 1998
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 10^{10^n} \equiv 4\,[7].$$

Exercice 352
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, 8 divise $5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$.

Exercice 353
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.

Exercice 354
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 11 divise $2^{6n-5} + 3^{2n}$.

Exercice 355
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 13 divise $2^{4n+2} + 3^{4n+2}$.

Exercice 356
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 17 divise $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$.

Exercice 357
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 19 divise $2^{2^{6n+2}} + 3$.

Exercice 358
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 17 divise $3^{3^{4n+3}} + 10$.

Exercice 359
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les entiers $n > k$ tels que $n - k$ divise n.
Application au cas $k = 12$.

Exercice 360
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a \geqslant 3$ et $b \geqslant 2$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b.
Calculer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 361
Déterminer le reste de la division euclidienne de 2792^{217} par 5.

Exercice 362
Centrale MP 2005
Déterminer le chiffre des unités de 7^{7^7}.

Exercice 363
Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de $7^{3^{8^4}}$.

Exercice 364
Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de $13^{7^{3^5}}$.

Exercice 365
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :
$$\begin{cases} 3x \equiv 1\,[5] \\ 2x \equiv 5\,[7] \end{cases}$$

Exercice 366
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :
$$\begin{cases} n \equiv 2\,[7] \\ n \equiv 1\,[8] \\ n \equiv 3\,[9] \end{cases}$$

Exercice 367
Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui-ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seul le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates?

Exercice 368
Lorsque Cédric avait un an de plus que l'âge que Raymond avait quand Cédric avait deux fois l'âge que Raymond avait quand Cédric avait la moitié de l'âge que Raymond a maintenant, Raymond avait la moitié de l'âge que Cédric avait quand Raymond avait la moitié de l'âge que Cédric a maintenant.
Une de ces personnes (au moins) est dans la quatre-vingtaine. On considère que les âges sont des nombres entiers.
Déterminer l'âge de Cédric et celui de Raymond.

Exercice 369
Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que :
$$7|a^2+b^2 \quad \Longrightarrow \quad 7|a \quad \text{ou} \quad 7|b.$$

Exercice 370
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ dont les restes dans les divisions euclidiennes par 3, 5 et 7 sont égaux à 1, 2 et 3 respectivement.

Exercice 371
En raisonnant modulo 5, montrer que l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 372
En raisonnant modulant 9, montrer que chacune des équations $x^3 + y^3 + z^3 = 94$ et $x^3 + y^3 + z^3 = 95$, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$, n'a pas de solution.

Exercice 373
Mines-Ponts MP - MPI 2023
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $3^n = 8 + m^2$.

Exercice 374
Montrer que l'équation suivante n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$: $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Exercice 375
Trouver tous les $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant simultanément : $3n - 10 \in 7\mathbb{Z}$, $11n + 8 \in 17\mathbb{Z}$ et $16n - 1 \in 5\mathbb{Z}$.

Exercice 376
Soit a, b et c trois entiers impairs.
Montrer que $ab + bc + ca$ et $2(ab + bc + ca)$ ne peuvent pas être des carrés d'entiers.

Exercice 377
Montrer qu'un entier congru à 3 congru modulo 4 ne peut pas être la somme de deux carrés.

Exercice 378
Montrer qu'un entier congru à 7 congru modulo 8 ne peut pas être la somme de trois carrés.

Exercice 379
Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} k!$ soit un carré parfait.

Exercice 380
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots ,a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$.
Montrer qu'il existe d'une partie I non vide de $[\![1,n]\!]$ telle que $\sum\limits_{i\in I} a_i$ soit divisible par n.

Exercice 381
Concours général 1992
Quel est le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égal à $\dfrac{10^{1992}}{10^{83}+7}$?

Exercice 382
Montrer qu'il n'existe aucun $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^2+3a+5 \equiv 0\,[121]$.

Exercice 383
Olympiades internationales 1992
Trouver tous les entiers a, b, c vérifiant $1<a<b<c$ et tels que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divise $abc-1$.

2 PGCD. PPCM. Entiers premiers entre eux

Exercice 384
X MP 2017
Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 385
Montrer que $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 386
X - ESPCI PC 2014
Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 387
Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m\wedge n}$.

Exercice 388
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad 12 | n^4-4n^3+5n^2-2n.$$

Exercice 389
Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec a et b premiers entre eux et $b \geqslant 2$.
Montrer qu'il existe $(u_0,v_0) \in \mathbb{N}^2$, unique, tel que :
$$u_0a - v_0b = 1 \quad \text{avec} \quad u_0 < b \quad \text{et} \quad v_0 < a.$$

Exercice 390
TPE MP 2015
Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n^2+13n+20$ soit divisible par 9.

Exercice 391
Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et $d = a \wedge b$.
Déterminer $(15a+4b) \wedge (11a+3b)$.

Exercice 392
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \big(n^4+3n^2+1\big) \wedge \big(n^3+2n\big) = 1.$$

Exercice 393
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n!+1) \wedge ((n+1)!+1) = 1.$$

Exercice 394

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n,b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

2. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 395
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $n \wedge k = 1$. Montrer que n divise $\dbinom{n}{k}$.

Exercice 396
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ divise $\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 397
Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec a impair et $a \geqslant 3$.
Montrer que $(2^a-1) \wedge \left(2^b+1\right) = 1$.

Exercice 398
Soit $(a,m,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Montrer que :

$$(a^m-1) \wedge (a^n-1) = a^{m\wedge n}-1$$

Exercice 399
Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que le reste de la division euclidienne de 2003 par n est égal à 8 et le reste de la division euclidienne de 3002 par n est égal à 27.

Exercice 400
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. Montrer que, si a, b et c sont premiers entre eux deux à deux, alors $ab+bc+ca$ et abc sont premiers entre eux.

Exercice 401
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 7$. Montrer n est la somme de deux entiers supérieurs à 2 premiers entre eux.

Exercice 402
Soit x et y deux entiers premiers entre eux. Montrer que xy et $x+y$ sont premiers entre eux.

Exercice 403
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2^n+3^n) \wedge \left(2^{n+1}+3^{n+1}\right) = 1.$$

Exercice 404
Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $ad-bc=1$.
Montrer que $(am+bn) \wedge (cm+dn) = m \wedge n$.

Exercice 405
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (21n+4) \wedge (14n+3) = 1.$$

Exercice 406
Montrer que :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2, \quad \left(a^2+b^2\right) \wedge (ab) = (a \wedge b)^2$$

Exercice 407
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système :

$$\begin{cases} x+y=100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases}$$

Exercice 408
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système :

$$\begin{cases} xy = 3468 \\ x \wedge y = 17 \end{cases}$$

Indication : $3468 = 2^2 \times 3 \times 17^2$.

Exercice 409
Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\begin{cases} x \wedge y = 12 \\ x \vee y = 420 \\ x > y > 20 \end{cases}$$

Exercice 410
TPE MP 2005
Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système :

$$\begin{cases} x \wedge y = x - y \\ x \vee y = 300 \end{cases}$$

Exercice 411
1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$. Montrer que :

$$(a + b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b.$$

2. Déterminer les couples $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que :

$$\begin{cases} a + b = 144 \\ a \vee b = 420 \end{cases}$$

Exercice 412
Montrer que :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2, \quad a^2 \wedge (ab) \wedge b^2 = (a \wedge b)^2.$$

Exercice 413
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2, \quad a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n \quad \text{et} \quad a^n \vee b^n = (a \vee b)^n.$$

Exercice 414
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$ avec $a \wedge b = 1$.
Montrer que :

$$a \wedge (bc) = a \wedge c.$$

Exercice 415
Soit $(a,b,c,d) \in (\mathbb{Z}^*)^4$ avec $a \wedge b = 1$ et $c \wedge d = 1$.
Montrer que :

$$(ac) \wedge (bd) = (a \wedge d)(b \wedge c).$$

Exercice 416
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{D}_+(n)$ l'ensemble de ses diviseurs positifs.
Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer que l'application :

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_+(a) \times \mathcal{D}_+(b) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \alpha\beta \end{cases}$$

réalise une bijection de $\mathcal{D}_+(a) \times \mathcal{D}_+(b)$ sur $\mathcal{D}_+(ab)$.

Exercice 417
Mines-Ponts MP 2005
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre F_{n+1} et $\prod_{k=0}^{n} F_k$.
2. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \neq n$. Montrer que F_m et F_n sont premiers entre eux.

Exercice 418
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 2^n + 3^n + 5^n$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \wedge u_{n+1} \wedge u_{n+2} = 2.$$

Exercice 419
Olympiades internationales 1979
Soit $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. On écrit S sous la forme $S = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.
Montrer que 1979 divise p.

Exercice 420
X MP 2021
Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^3$ l'équation :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{a+b}$$

Exercice 421
1. Déterminer les solutions dans $\mathbb{N}^2$ de $3^m - 2^n = 1$.
2. Déterminer les solutions dans $\mathbb{N}^2$ de $2^n - 3^m = 1$.

Exercice 422 - Formule de Marcelo Polezzi (1997)
Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que :

$$a \wedge b = a + b - ab + 2\sum_{k=1}^{b-1} \left\lfloor k\frac{a}{b} \right\rfloor.$$

3 Nombres premiers

Exercice 423
Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, montrer que les $n-1$ entiers $n! + k$ ($k \in [\![2,n]\!]$) sont tous composés.

Exercice 424
Centrale MP 2005
Montrer que, si p est un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 425
Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que, si p est premier et $8p^2+1$ est premier, alors $8p^2-1$ est premier.

Exercice 426
Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que p, $8p-1$ et $8p+1$ ne sont pas tous les trois premiers.

Exercice 427
Montrer que la somme de deux deux nombres premiers consécutifs ne peut pas être égal au produit de deux nombres premiers.

Exercice 428
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} \leqslant p_1 \cdots p_n + 1$.

Exercice 429
Soit $(a,b,\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^*)^4$ tel que $\alpha \wedge \beta = 1$ et $a + b\sqrt{2} = \left(\alpha + \beta\sqrt{2}\right)^2$.
Montrer que $a \wedge b \in \{1; 2\}$.

Exercice 430
Mines-Ponts MP 2016
Soit $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $a^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

Exercice 431
Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que, si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 432
Montrer qu'il existe un multiple de 1996 dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre 4.

Exercice 433
Soit $n = 101010 \cdots 0101$ avec 2020 zéros.
Montrer que n n'est pas premier.

Exercice 434
X - ESPCI PC 2016
Soit $n = 10101 \cdots 10101$ avec 2016 zéros. Montrer que n n'est pas premier.

Exercice 435
X MP 2015
Montrer qu'il existe un multiple de 23 qui ne s'écrit qu'avec des 1 en base 10.

Exercice 436
Mines-Ponts MP 2021
Montrer qu'il existe un multiple de 2021 qui ne s'écrit qu'avec des 1 en base 10.

Exercice 437
Montrer que, pour tout nombre premier $p \geqslant 5$, $24 | p^2 - 1$.

Exercice 438
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^7 \equiv n \, [42].$$

Exercice 439
Soit $p \in \mathbb{P}$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a^p \equiv b^p \, [p]$.
Montrer que :

$$a^p \equiv b^p \, \left[p^2\right].$$

Exercice 440
Soit p et q deux nombres premiers distincts.
Montrer que :

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \, [pq].$$

Exercice 441
Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13.

Exercice 442
Montrer que l'équation $2^m + 1 = n^3$ d'inconnue $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ n'a pas de solution.

Exercice 443
Soit $(a,b,c,n) \in (\mathbb{N}^*)^4$ tel que $a \wedge b = 1$ et $ab = c^n$.
Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a = \alpha^n$ et $b = \beta^n$.

Exercice 444
Montrer que le produit de trois entiers consécutifs n'est jamais le carré d'un entier.

Exercice 445
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

1. Montrer que :
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad \text{et} \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$
2. Montrer que :
$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a).$$
3. Montrer que :
$$(ab \wedge bc \wedge ca)(a \vee b \vee c) = |abc| \qquad \text{et} \qquad (ab \vee bc \vee ca)(a \wedge b \wedge c) = |abc|.$$
4. Montrer que :
$$(a \wedge b)(b \wedge c)(c \wedge a)(a \vee b \vee c)^2 = (a \vee b)(b \vee c)(c \vee a)(a \wedge b \wedge c)^2.$$
5. Montrer que :
$$(a \wedge b)(b \wedge c)(c \wedge a)(a \vee b \vee c) = (a \wedge b \wedge c)|abc|.$$

Exercice 446
Montrer que :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad 56\,786\,730 \mid ab\left(a^{60} - b^{60}\right).$$
(On donne : $56\,786\,730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31 \times 61$)

Exercice 447
Olympiades de Hong Kong 1998
Soit c un nombre premier tel que $11c + 1$ soit le carré d'un entier. Déterminer c.

Exercice 448
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le PGCD de $(n+1)!$ et $n! + 1$.

Exercice 449
Mines-Ponts MP 2017. TPE MP 2009.
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 450
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 451
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Exercice 452 - Théorème de Kurschak (1918)
Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m < n$, on pose $H_{m,n} = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}$.
1. Justifier que $r = \displaystyle\max_{m \leqslant k \leqslant n} \nu_2(k) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $k \in [\![m,n]\!]$, unique, tel que $\nu_2(k) = r$.
3. Montrer que $H_{m,n}$ n'est pas entier.

Exercice 453 - Formule de Legendre
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre premier.
   Montrer la formule de Legendre :
$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre premier. On note $S_p(n)$ la somme des chiffres de n en base p.
   Montrer que :
$$\nu_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}.$$
3. *Applications*
   a) Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de 1000! ?
   b) Montrer que :
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}.$$

Chapitre VI

Polynômes

1 Algèbre $\mathbb{K}[X]$

Exercice 454
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k!$.
Montrer qu'il existe $(P,Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = P(n)u_{n+1} + Q(n)u_n$.

Exercice 455
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1.$$

Exercice 456
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - \alpha\right)^2 \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X-\alpha)^2 + \frac{X(1-X)}{n}.$$

Exercice 457
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k = \left(1 - X^3\right)^n.$$

Exercice 458
X MP-MPI 2023
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_k = 1 + X + \cdots + X^{k-1}$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k = 2^{n-1} P_n \left(\frac{X+1}{2}\right).$$

Exercice 459
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire le polynôme

$$P_n = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2} - \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}$$

comme produit de n polynômes du premier degré.

Exercice 460
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire le polynôme

$$P_n = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$$

comme produit de n polynômes du premier degré.

Exercice 461
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$P_n = (1+X)\left(1+X^2\right)\left(1+X^4\right)\cdots\left(1+X^{2^n}\right).$$

Exercice 462 - Formule de Vandermonde
Centrale PC 2017
1. Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $p \leqslant m+n$. En considérant le produit des polynômes $(X+1)^m$ et $(X+1)^n$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 463
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le produit des polynômes $(X-1)^{2n}$ et $(X+1)^{2n}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Exercice 464
1. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. En considérant le produit des polynômes $n(X+1)^{n-1}$ et $(X+1)^n$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} k \binom{n}{p-k}\binom{n}{k} = n\binom{2n-1}{p-1}.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Exercice 465
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le coefficient de X^2 du polynôme

$$P_n = (1+X)(1+2X)(1+4X)\cdots(1+2^nX).$$

Exercice 466
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ avec $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.
Montrer que :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad |a_k| \leqslant \max\{|P(z)| \,/\, z \in \mathbb{U}_n\}.$$

Exercice 467
Déterminer les polynômes P, Q et R de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P^2 - XQ^2 = XR^2$.

Exercice 468
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P' \circ P = P \circ P'$.

Exercice 469
Centrale PC 2014
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant : $(P')^2 = 4P$.

Exercice 470
Centrale PC 2005
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P$.

Exercice 471
X - ESPCI PC 2017
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) - P(X) = P'(X)$.

Exercice 472
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant : $P \circ P = P$.

Exercice 473
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice 474
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\left(X^2+1\right)P'' = 6P$.

Exercice 475
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P'P'' = 18P$.

Exercice 476
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$, unique, que l'on déterminera, tel que $P_n - P_n' = X^n$.

Exercice 477
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P\left(X^2+1\right) = (P(X))^2 + 1$.

Exercice 478
Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \mathrm{e}^x$?

Exercice 479
Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in [0,2\pi]$, $P(x) = \sin(x)$?

Exercice 480
Déterminer les polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} P \circ Q = P^2 \\ Q \circ P = Q^2 \end{cases}$$

Exercice 481
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X).$$

Exercice 482
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, unique, tel que $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = nP_{n-1}$.
3. Exprimer $P_n(X+1)$ en fonction de $P_0, \ldots, P_n$.
   En déduire une relation de récurrence entre $P_0, \ldots, P_n$.

2 Arithmétique des polynômes

Exercice 483
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B,C,D) \in (\mathbb{R}[X])^4$. On suppose que $A^3 + C = B^3 + D$, $\deg(A) = \deg(B) = n$, $\deg(C) < 2n$ et $\deg(D) < 2n$.
Montrer que $A = B$ et $C = D$.

Exercice 484
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Montrer que :

$$B|A \quad\Longrightarrow\quad B^2|A'B - AB'.$$

Exercice 485
Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X^3 + pX + q$ soit divisible par $X^2 + mX - 1$.

Exercice 486
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^4 + 3X^2 + aX + b$ soit divisible par $X^2 + aX + 2$.

Exercice 487
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^4 - X + b$ soit divisible par $X^2 - aX + 1$.

Exercice 488
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ pour que le polynôme $P = X^2 + pX + q$ divise $P\left(X^2+1\right)$.

Exercice 489
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que $X^4 - X + a$ soit divisible par $X^2 - aX + 1$.

Exercice 490
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$.

Exercice 491
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour que $X^5 + aX^2 + b$ soit divisible par $X^3 + X^2 - cX + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 492
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^{2^{n+1}} + X^{2^n} + 1$.
Montrer que, si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m < n$, alors P_m divise P_n.

Exercice 493
X - ESPCI PC 2017. Centrale PC 2005. TPE MP 2013
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) \neq X$.
1. Montrer que $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - X$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X) - X$ divise $P^{[n]}(X) - X$, où $P^{[n]} = P \circ \cdots \circ P$ avec n facteurs.

Exercice 494
Mines-Ponts MP 2018
Soit P et Q deux polynômes unitaires de $\mathbb{C}[X]$, de degrés respectifs 2 et 3 et tels que $\deg\left(P^3 - Q^2\right) \leqslant 1$.
Montrer que $P^3 = Q^2$.

Exercice 495
Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(A) \geqslant 1$, $(m,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ et $B = A^{2m} + (A+1)^n - 1$.
Montrer que B est divisible par $A(A+1)$.

Exercice 496
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4$. Montrer que $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ est divisible par $X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 497
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X^5+1 divise $\left(X^4-1\right)\left(X^3-X^2+X-1\right)^n+(X+1)X^{4n-1}$.

Exercice 498
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $(A,B,P) \in (\mathbb{K}[X])^3$. Montrer que A divise B si, et seulement si, $A \circ P$ divise $B \circ P$.

Exercice 499
Soit $(P,Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$. Montrer que, si $P-Q$ divise $P \circ P - Q \circ Q$, alors $P-Q$ divise également $P \circ Q - Q \circ P$.

Exercice 500
Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré 3, divisible par $X-1$ et $X-2$, et tel que le reste de la division euclidienne de P par X^2+1 soit 1.

Exercice 501
Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^2+1 divise P et X^3+1 divise $P-1$.

Exercice 502
X MP 2007
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $(\sin(\theta)X+\cos(\theta))^n$ par X^2+1.

Exercice 503
CCP PSI 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\sin(k\theta)X+\cos(k\theta))$ par X^2+1.

Exercice 504
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $a \neq b$, et $P \in \mathbb{C}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 505
Soit $a \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 506
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n-X^n-1$ par X^2+X+1.

Exercice 507
Centrale PC 2008
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n=\left(X^2-X+1\right)^n-X^{2n}+X^n-1$.
Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que X^3-X^2+X-1 divise P_n.
Dans les autres cas, donner le reste de la division euclidienne.

Exercice 508
Centrale PC 2009
Soit $B=X^3-X^2+X-1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n=\left(X^2+X+1\right)^n-X^{2n}-X^n-1$.
1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que B divise A_n.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de A_n par B.

Exercice 509
HEC ECS 2008 Exercice sans préparation
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer les polynômes de degré n, divisibles par $X+1$ et dont les restes dans la division euclidienne par $X+2,\ldots,X+n+1$ sont égaux.

Exercice 510
X - ESPCI PC 2017
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non nul. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P^n divise $P \circ P$.
Montrer que X^n divise P.

Exercice 511
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le PGCD de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $X^n - nX + n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 512
Déterminer le PGCD de $X^6 - X^5 - X^4 + 2X^3 - X^2 - X + a$ et $X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$ suivant les valeurs de $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 513
Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que :
$$(X^a - 1) \wedge \left(X^b - 1\right) = X^{a \wedge b} - 1.$$

Exercice 514
Soit $(A,B) \in (\mathbb{C}[X] \setminus \{0\})^2$. Montrer que :
$$A \wedge B = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (A+B) \wedge (AB) = 1.$$

Exercice 515
Soit $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec A et B non constants et premiers entre eux.
Montrer qu'il existe $(U_0,V_0) \in (\mathbb{K}[X])^2$, unique, tel que :
$$AU_0 + BV_0 = 1 \quad \text{avec} \quad \deg(U_0) < \deg(B) \quad \text{et} \quad \deg(V_0) < \deg(A).$$

3 Racines

Exercice 516
Déterminer un polynôme à coefficients entiers admettant $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ pour racine.

Exercice 517
Montrer que :
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$$

Exercice 518
Montrer que :
$$\forall \varepsilon \in \{-1;1\}, \quad \sqrt[3]{\varepsilon + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{\varepsilon - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = \varepsilon.$$

Exercice 519
Montrer que :
$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4.$$

Exercice 520
Montrer que :
$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 6.$$

Exercice 521
Montrer que :
$$\sqrt[3]{\frac{56+\sqrt{\frac{84640}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{56-\sqrt{\frac{84640}{27}}}{2}} = 4.$$

Exercice 522
Montrer que :

$$\frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}=4.$$

Exercice 523
X - ESPCI PC 2011
Soit $\alpha=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{10}}$. Montrer que α est racine de $X^8-X^6+X^4-X^2+1$.

Exercice 524
X - ESPCI PC 2008
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, unitaire. Pour $a\in\mathbb{R}$, on pose $Q_a(X)=P(X+a)$.
Montrer qu'il existe $r\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $a\geqslant r$, tous les coefficients de Q_a sont positifs.

Exercice 525
Mines-Ponts MP 2013. CCINP PC 2019
Soit $P=(X+1)^7-X^7-1$.
Montrer que j est racine de P, déterminer son ordre de multiplicité puis factoriser P.

Exercice 526
Déterminer $\lambda\in\mathbb{C}$ pour que $P=X^4-2X^3+\lambda X-1$ ait une racine d'ordre 2.

Exercice 527
Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$, de degré 5, tels que $(X+2)^3$ divise $P+10$ et $(X-2)^3$ divise $P-10$.

Exercice 528
Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $\{z\in\mathbb{C}\,/\,P(z)=0\}=\{z\in\mathbb{C}\,/\,P\circ P(z)=0\}$.

Exercice 529
Existe-t-il un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $P(x)=\sqrt{x}$?

Exercice 530
Existe-t-il un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$?

Exercice 531
Existe-t-il un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=\sin(x)$?

Exercice 532
Existe-t-il un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=\lfloor x\rfloor$?

Exercice 533
Existe-t-il un polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=|z|^2$?

Exercice 534
Existe-t-il un polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=\overline{z}$?

Exercice 535
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{C}^*$ tel que $P(X+\alpha)=P(X)$.
Montrer que P est constant.

Exercice 536
Mines-Ponts MP 2005
Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad\int_k^{k+1}P(t)\mathrm{d}t=k.$$

Exercice 537
Mines-Ponts MP 2005
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_k^{k+1} P(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

Exercice 538
X MP 2021. X - ESPCI PC 2017
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est premier.
Montrer que P est constant.

Exercice 539
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n tel que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$.
Déterminer $P(n+1)$.

Exercice 540
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré n tel que, pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k^2}$.
Déterminer $P(n+2)$.

Exercice 541
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n tel que, pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$.
Calculer $P(0)$.

Exercice 542
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(k) = 2^k$.
Déterminer $P(n+1)$.

Exercice 543
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [-1;1]$. Montrer que les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^{n+1} - aX^n + aX - 1$ sont toutes de module 1.

Exercice 544
Mines-Ponts PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ défini par $(1+\mathrm{i}X)^n = P(X) + \mathrm{i}Q(X)$.
Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aP + bQ$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 545
Mines-Ponts MP 2017
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites de polynômes définies par $P_1 = X$, $Q_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} P_{n+1} = P_n + XQ_n \\ Q_{n+1} = -XP_n + Q_n \end{cases}$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{i}P_n + Q_n = (1+\mathrm{i}X)^n.$$
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n(\tan(\theta))$ et $Q_n(\tan(\theta))$.
3. Déterminer les degrés et les coefficients dominants de P_n et de Q_n.
4. Déterminer les racines de P_n et de Q_n.
5. Factoriser P_n et Q_n comme produit de polynômes irréductibles.

Exercice 546
ESCP Question courte 2013
Soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad P(zz') = P(z)P(z').$$

1. Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}_1[X]$ éléments de E.

2. Déterminer tous les polynômes éléments de E.

Exercice 547
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(X-16)P(2X) = 16(X-1)P(X)$.

Exercice 548
Mines-Ponts MP 2015. Mines-Ponts PC 2009. ESCP Question courte 2015
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 549
Mines-Ponts PSI 2005
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P(0) = 0$ et $P\left(X^2+1\right) = (P(X))^2 + 1$.

Exercice 550
ENS PC 2016
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P\left(X^2\right) = (P(X))^2$.

Exercice 551
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2016. ENSEA PSI 2015
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P\left(X^2\right) = P(X)P(X+1)$.

Exercice 552
X - ENS PSI 2014. Mines-Ponts MP 2008. Centrale PSI 2021. CCP MP 2014
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$, non nuls, tels que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 553
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 554
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 555
X MP 2007. Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PC 2021
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.

Exercice 556
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.

Exercice 557
Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, divisible par $X-1$ et tel que les restes des divisions de P par $X-2$, $X-3$ et $X-4$ soient égaux.

Exercice 558
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.
Montrer que, si $P\left(X^n\right)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est également par $X^n - 1$.

Exercice 559
Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, impair et non divisible par 3.
Montrer que $(X+a)^n - X^n - a^n$ est divisible par $X^2 + aX + a^2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 560
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est divisible par $P = X^2 - 3X + 2$ puis déterminer le quotient Q_n de P_n par P.

Exercice 561
Soit $a \in \mathbb{R}$, $P = X^2 - 2X\mathrm{ch}(a) + 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^{n+1}\mathrm{sh}(na) - X^n\mathrm{sh}((n+1)a) + \mathrm{sh}(a)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est divisible par P puis déterminer le quotient Q_n de P_n par P.

Exercice 562
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $P = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^n \sin(\theta) - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est divisible par P.

Exercice 563
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n\cos(n\theta) - X\cos(\theta) + 1$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est divisible par P_1 puis déterminer le quotient Q_n de P_n par P_1.

Exercice 564
Putnam 1963
Déterminer $a \in \mathbb{Z}$ tel que $X^2 - X + a$ divise $X^{13} + X + 90$.

Exercice 565
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^{2n} + aX^n + b$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 566
Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $X^{2n} + X^n + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 567
Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $\left(X^4 + 1\right)^n - X^n$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 568
Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $X^{3n+2} - X^{3n+1} + 1$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 569
Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $(X+1)^n + X^n + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 570
Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 571
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 572
CCP PC 2018
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = X^{4n} + X^{3n} + X^{2n} + X^n + 1 \in \mathbb{C}[X]$.
1. Déterminer les racines de P_1.
2. Déterminer les entiers n tels que P_1 divise P_n.

Exercice 573
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = X^{4n} - X^{3n} + X^{2n} - X^n + 1 \in \mathbb{C}[X]$.
1. Déterminer les racines de P_1.
2. Déterminer les entiers n tels que P_1 divise P_n.

Exercice 574
Mines-Ponts MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n + 3X^{n-1} + 2$ par $(X-1)^2$.

Exercice 575
X MP 2001. Centrale PSI 2005
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Déterminer les entiers naturels n tels que $X^2 - \left(a^2 + b^2\right)$ divise $X^{2n} - (a^n + b^n)^2$.

Exercice 576
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $P_n = aX^{2n+3} + bX^{2n+1} + X^2 + 1$ soit divisible par $X^3 + X^2 + X + 1$.
Déterminer alors le quotient.

Exercice 577
CCP PSI 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $P_n = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$. Déterminer alors le quotient de P_n par $(X-1)^2$.

Exercice 578
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que les racines de $P = X^n + X + 1$ sont simples.

Exercice 579
CCP PSI 2013
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$.
Montrer que P_n n'a pas de racine multiple.

Exercice 580
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples.
Montrer que les racines de $P^2 + \alpha^2$ dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Exercice 581
Soit $(P,Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$. On suppose que P et Q sont premiers entre eux.
1. Montrer que, si $P^2 + Q^2$ admet une racine double α, alors $(P'(\alpha))^2 + (Q'(\alpha))^2 = 0$.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 582
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que α est racine de $\dfrac{1}{2}(X-\alpha)(P' + P'(\alpha)) - P + P(\alpha)$ de multiplicité au moins 3.

Exercice 583
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod\limits_{k=0}^{n}(X-k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.

Exercice 584
CCP PC 2016
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$ et $Q_n(X) = P_n^2(X) - P_n(2X)$.
Montrer que 0 est racine de Q_n de multiplicité $n+1$.

Exercice 585
Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $P = X^6 + aX^4 + 10X^3 + bX + c$ ait une racine quadruple.

Exercice 586
X MP 2007
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 2, \quad P'(1) = 3, \quad P'(2) = 4, \quad P''(1) = 5, \quad P''(2) = 6.$$

Exercice 587
X MP 2007
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 588
Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $Q = X^2 + pX + q$ deux polynômes à coefficients réels.
On suppose qu'il existe $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ avec $s - r > 2$ tel que :

$$(\forall x \in]r,s[, \quad P(x) < 0 \text{ et } Q(x) < 0) \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in]-\infty,r[\cup]s,+\infty[, \quad P(x) > 0 \text{ et } Q(x) > 0).$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) < Q(x_0)$.

Exercice 589
Factoriser $X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 590
CCP PC 2018
Factoriser X^4+4X^2+16 en produit polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 591
Factoriser X^5+1 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 592
1. Factoriser X^5-1 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 593
1. Factoriser X^5+1 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 594
Factoriser X^6+1 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 595
Factoriser X^6-1 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 596
Factoriser $X^6+2X^4+2X^2+1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 597
Factoriser $X^6+3X^4+5X^2+6$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 598
Factoriser $\left(1-X^2\right)^3+8X^3$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 599
1. Factoriser X^8+1 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 600
Factoriser X^8+X^4+1 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 601
Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Factoriser $X^8-2\cos(2\theta)X^4+1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 602
Factoriser $X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 603
Mines-Ponts MP 2014
Factoriser $X^9+X^6+X^3+1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 604
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $P=(X+1)\left(X^2+1\right)\cdots(X^n+1)$ et $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.
Calculer $P(\omega)$.

Exercice 605
X - ESPCI PC 2016
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\prod_{\substack{(\omega,\omega')\in\mathbb{U}_n^2\\ \omega\neq\omega'}}(\omega-\omega')$.

Exercice 606
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}}$.

Exercice 607
Mines-Ponts MP 2017
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}}$.

Exercice 608
X - ESPCI PC 2008. IMT MP 2013. TPE PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.
1. Montrer que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \omega^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$
2. En déduire que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 609
Soit $a \in]0,\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1$.
1. Factoriser P_n.
2. Montrer que :
$$\prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{a+2k\pi}{2n}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2^{2n-1}}.$$

Exercice 610
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Factoriser le polynôme $P_n = (X+1)^n - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}na}$.
2. En déduire que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}.$$

Exercice 611
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.
1. Montrer que :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \left(a + \omega^k b\right) = a^n - (-b)^n.$$
2. En déduire que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{2k} - 2\omega^k \cos(\theta) + 1\right) = 2(1 - \cos(n\theta)).$$

Exercice 612
Mines-Ponts MP 2017. CCP PC 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :
$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Exercice 613
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2. En déduire :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

Exercice 614

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $P_n = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\left(1+\dfrac{\mathrm{i}X}{2n}\right)^{2n} - \left(1-\dfrac{\mathrm{i}X}{2n}\right)^{2n}\right)$.

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 1.$$

Exercice 615

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = (X+\mathrm{i})^{2n+1} - (X-\mathrm{i})^{2n+1}$.

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire que :
$$\prod_{k=1}^{n}\left(4 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = \frac{3^{2n+1}-1}{2(2n+1)}.$$

Exercice 616

X - ESPCI PC 2019

Soit $P = X^n + aX + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P comptées avec leurs multiplicités. Montrer que :
$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left((1-n)^{n-1}a^n + n^n b^{n-1}\right).$$

Exercice 617

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $P_n = X^n + X + 1$.
Montrer que, pour tout racine $z \in \mathbb{C}$ de P_n, on a $|z| < 2$.

Exercice 618

Mines-Ponts PC 2021. Centrale PC 2013

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$
2. Déterminer les racines de P_n.

Exercice 619

CCP PC 2016

1. Soit $P = X^2 + 2X + 3$. Montrer que les racines de P ont un module compris entre 1 et 2.
2. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$. On pose $Q = (1-X)P$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) = 0$.
   Montrer que :
$$a_0 = \sum_{k=1}^{n}(a_{k-1} - a_k)z^k + a_n z^{n+1}.$$
   En déduire que, si $P(z) = 0$, alors $|z| \geqslant 1$.
3. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ où les a_i sont des réels strictement positifs.
   On pose $r = \min\left\{\dfrac{a_k}{a_{k+1}} \,/\, k \in [\![0,n-1]\!]\right\}$.
   Montrer que les racines de P sont de module supérieur ou égal à r.
   Indication. – Considérer $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $\widetilde{P}(X) = P(rX)$.

Exercice 620
Mines-Ponts MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
1. On pose $M_0 = \max\limits_{k \in [\![0,n-1]\!]} |a_k|$. Montrer que, si $a_n \neq 0$, alors, pour toute racine z de P, on a :

$$|z| \leqslant 1 + \frac{M_0}{|a_n|}.$$

2. On pose $M_1 = \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |a_k|$. Montrer que, si $a_0 \neq 0$, alors, pour toute racine z de P, on a :

$$\frac{1}{1 + \dfrac{M_1}{|a_0|}} \leqslant |z|.$$

Exercice 621
ENS PSI 2008
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.
Montrer que, pour toute racine z de P, on a :

$$|z| \leqslant \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$

Exercice 622
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, unitaire de degré n.
Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im\mathrm{m}(z)|^n$.

Exercice 623
X MP 2007
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, $P = R + \mathrm{i}S$ avec $(R,S) \in (\mathbb{R}[X])^2$. On suppose que les racines de P ont une partie imaginaire positive ou nulle.
1. Montrer que R et S sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aR + bS$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 624
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$, de degré n, tel que $|P(x)|$ soit premier pour $2n+1$ valeurs entières distinctes de x.
Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 625
X MP 2017. EIVP MP 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, distincts. Montrer que le polynôme $P = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_k) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 626
X MP 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, distincts. Étudier l'irréductibilité du polynôme $P = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_k) + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 627
X MP 2017. Mines-Ponts MP 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, distincts. Montrer que le polynôme $P = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_k)^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 628
X - ESPCI PC 2016
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire. On suppose que les racines de P ont toutes une partie réelle strictement négative.
Montrer que P est à coefficients strictement positifs.

Exercice 629
Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que toutes les racines de P ont une partie réelle strictement négative si, et seulement si, $a > 0$, $b > 0$ et $0 < c < ab$.

Exercice 630
X MP 2018. Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PSI 2014. Mines-Ponts PC 2014
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R}_+$;
(ii) il existe $(A,B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 631
X MP 2018. X - ESPCI PC 2019. Mines-Ponts MP 2015. Centrale PSI 2013
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \in \mathbb{R}_+$;
(ii) il existe $(A,B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P = A^2 + XB^2$.

Exercice 632 - Théorème de Gauss-Lucas
X MP 2013. X PSI 2021
1. *Théorème de Gauss-Lucas*
   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré supérieur ou égal à 2.
   Montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P.
2. *Applications*
   a) Déterminer le plus grand entier $n \geqslant 2$ tel que les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1.
   b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, et H un demi-plan de $\mathbb{C}$ tels que P' admette une racine dans H.
   Montrer que $P(H) = \mathbb{C}$.

Exercice 633
ENS PC 2016. Centrale MP 2019
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, $\alpha \neq \beta$, P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P^{-1}(\{\alpha\}) = Q^{-1}(\{\alpha\}) \qquad \text{et} \qquad P^{-1}(\{\beta\}) = Q^{-1}(\{\beta\}).$$

Montrer que $P = Q$.

Relations entre coefficients et racines

Exercice 634
Putnam 2003
Soit $(a,b,c,A,B,C) \in \mathbb{R}^6$ avec $a \neq 0$, $A \neq 0$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|ax^2 + bx + c\right| \leqslant \left|Ax^2 + Bx + C\right|.$$

Montrer que :

$$\left|b^2 - 4ac\right| \leqslant \left|B^2 - 4AC\right|.$$

Exercice 635
Centrale PC 2013
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{C}^*)^3$ tel que :

$$a + b + c = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Montrer que $|a| = |b| = |c|$.

Exercice 636
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{C}^*)^3$ tel que $a + b + c \neq 0$ et $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, impair, on a :

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Exercice 637
Centrale PSI 2005
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ xyz=-4 \end{cases}$$

Exercice 638
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ xyz=-6 \end{cases}$$

Exercice 639
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-1 \end{cases}$$

Exercice 640
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=34 \end{cases}$$

Exercice 641
X - ESPCI PC 2017
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xyz=1 \\ |x|=|y|=|z|=1 \end{cases}$$

Exercice 642
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 643
1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$$

   Calculer a^3+b^3.
2. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=2 \\ a^3+b^3+c^3=3 \end{cases}$$

   Calculer $a^4+b^4+c^4$.

Exercice 644
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=4 \\ a^3+b^3+c^3=9 \end{cases}$$

Calculer $a^8+b^8+c^8$.

Exercice 645
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a^2+b^2+c^2=1, \qquad ab+bc+ca=0, \qquad a^3+b^3+c^3=1+3abc.$$

Montrer que $abc \in \left[-\dfrac{4}{27},0\right]$.

Exercice 646
Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que les polynômes $P = X^4+2aX^2+4bX+a^2$ et $Q = X^3+aX+b$ aient deux racines réelles distinctes en commun.

Exercice 647
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme de degré $n \geqslant 3$. On suppose que $a_{n-1} = -\binom{n}{1}$, $a_{n-2} = \binom{n}{2}$ et que toutes les racines de P sont réelles.
Déterminer $a_0, \ldots, a_{n-3}$.

Exercice 648
Saint-Cyr PSI 2017
Soit $P = X^3+X+1$. On note a, b et c les racines complexes de P.
1. Calculer $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ et $a^3+b^3+c^3$.
2. En exploitant la division euclidienne de X^4 par P, calculer $a^4+b^4+c^4$.

Exercice 649
TPE MP 2016
Soit $P = X^3-X+1$.
1. Montrer que P a trois racines simples a, b et c.
2. Calculer $a^2+b^2+c^2$ et $a^7+b^7+c^7$.

Exercice 650
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a+b+c=0$.
Montrer que :

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \times \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5}.$$

Exercice 651
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On suppose que le polynôme P a n racines réelles distinctes strictement négatives.
Montrer que $a_1 P(1) > 2n^2 a_0$.

Exercice 652
Déterminer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \qquad \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = d(P(a)+P(b)+P(c)).$$

Exercice 653
Soit $(p,q) \in \mathbb{C}^2$, a, b et c les racines du polynôme P avec $P(X) = X^3+pX+q$.
Calculer $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{1+c^2}$.

Exercice 654
Soit a, b, c et d les racines du polynôme P avec $P(X) = X^4 + X + 1$.
Calculer $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} + \dfrac{1}{d-1}$.

Exercice 655
X - ESPCI PC 2008
Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$.
Déterminer le nombre de racines réelles de P.
On note x_1,x_2 et x_3 les racines de P.
Déterminer $x_1 + x_2 + x_3$, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$ et $\dfrac{1}{x_1-2} + \dfrac{1}{x_2-2} + \dfrac{1}{x_3-2}$.

Exercice 656
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1,\ldots,x_n$ les racines du polynôme $P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k} = \frac{n}{2}.$$

Exercice 657
Déterminer les polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{0,1,-1\}$?

Exercice 658
Soit a, b et c les racines du polynôme P avec $P(X) = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$.
Déterminer le polynôme unitaire $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ dont $a+b$, $b+c$ et $c+a$ sont les racines.

Exercice 659
Soit $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$, a, b, c les racines du polynôme P avec $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.
Déterminer le polynôme unitaire $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ dont a^2, b^2 et c^2 sont les racines.

Exercice 660
X MP 2011
Soit $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ et a, b et c les racines du polynôme P avec $P(X) = X^3 + pX + q$.
Déterminer le polynôme unitaire $Q \in \mathbb{C}_3[X]$ dont a^2+b^2, b^2+c^2 et c^2+a^2 sont les racines.

Exercice 661
Centrale MP 2005
Trouver un polynôme de degré 3 à coefficients entiers dont les racines sont $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$, $\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ et $\tan^2\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$.
En déduire la somme de ces trois termes.

Exercice 662
Centrale MP 2005
Soit $a = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $P = X^3 + aX^2 - \overline{a}X - 1$.
1. Montrer que $P(X)$ divise $P\left(X^2\right)$.
2. En déduire les racines de P.

Exercice 663
Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme $P(X) = 2X^3 + 5X^2 - X + \lambda$ ait une racine de module 1.

Exercice 664
Soit $(p,q) \in \mathbb{C}^2$, a, b et c les racines du polynôme P avec $P(X) = X^3 + pX + q$.
Montrer que $a^2 + b^2 = c^2 + 1$ si, et seulement si, $8q^2 + 2p + 1 = 0$.

Exercice 665
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ pour que le polynôme $P = X^3 + pX + q$ admette une racine multiple et calculer celle-ci.

Exercice 666
Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients d'un polynôme unitaire de degré 3 de $\mathbb{C}[X]$ pour que le carré de l'une de ses racines soit le produit des deux autres.

Exercice 667
Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients réels.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que les racines de P soient de parties réelles strictement négatives.

Exercice 668
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = X^n + 2nX^{n-1} + 2n^2X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \cdots + a_1X + a_0.$$

Montrer que les racines de P ne peuvent pas être toutes réelles.

Exercice 669
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que a, b et c sont en progression géométrique si, et seulement si, $(ab+bc+ca)^3 = abc(a+b+c)^3$.

Exercice 670
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n \geqslant 2$. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on note s_k la somme des racines de $P^{(k)}$ dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur multiplicité.
Montrer que $s_0, \ldots, s_{n-1}$ sont en progression arithmétique.

Exercice 671
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, α, β, γ et δ les racines du polynôme P avec $P(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$.
Montrer que α, β, γ et δ sont en progression arithmétique si, et seulement si, $b = 0$ et $9a^2 = 100c$.

Exercice 672
X MP 2014
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$. On suppose que P est scindé dans $\mathbb{C}$ et que ses racines forment une progression arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$.
Exprimer r en fonction de a_{n-1}, a_{n-2} et n.

4 Équations algébriques

Exercice 673
ESCP Question courte 2008
On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que cette équation admet une solution complexe non réelle z telle que $|z| \leqslant 1$.
Montrer que $|z| = 1$, qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n = 1$. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

5 Divers

Exercice 674
Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $1 < m < n$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0.$$

Exercice 675
Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers tels que :
- il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) = P(a+9) = 0$;
- $Q(36) = 50$.

Montrer que l'équation $Q(P(x)) = 1$ n'a pas de solution entière.

Exercice 676
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} X^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(X)}{(k+1)!} X^{k+1}.$$

Exercice 677
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 678
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n, tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.
Montrer que :

$$\sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)| \geqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

Exercice 679
Mines-Ponts MP 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.
Montrer que :

$$\sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)| \geqslant \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

Chapitre VII

Fractions rationnelles

Exercice 680
Décomposer $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 681
Décomposer $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 682
Décomposer $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 683
Décomposer $\dfrac{4X^2+X+4}{(X-1)(X+2)^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 684
Décomposer $\dfrac{4}{(X^2-1)^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 685
Décomposer $\dfrac{X^2+1}{(X^2-1)^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 686
Décomposer $\dfrac{X-1}{X^3(X+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 687
Décomposer $\dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 688
Décomposer $\dfrac{3X^3-11X+1}{(X^2+X+1)^{2024}}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 689
Décomposer $\dfrac{X-1}{X^4+X}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 690
Décomposer $\dfrac{X^5}{X^3-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 691
Décomposer $\dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 692
Décomposer $\dfrac{X^2+X+1}{X^3+X^2+X+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 693
Décomposer $\dfrac{X^4+1}{(X+1)^2\,(X^2+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 694
Décomposer $\dfrac{4X^3}{X^4-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 695
Décomposer $\dfrac{1}{(X^2+1)\,(X^2+X+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 696
Décomposer $\dfrac{X^4-2X^3+3X-4}{X\,(X^2+1)^3}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 697
Décomposer $\dfrac{X^6+1}{X^2(X-1)^3}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 698
Décomposer $\dfrac{1}{X^3-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 699
Décomposer $\dfrac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 700
Mines-Ponts MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Décomposer en éléments simples : $\dfrac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}$.
2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Exercice 701
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Décomposer en éléments simples : $\dfrac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)}$.
2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Exercice 702
Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Décomposer $\dfrac{X^m}{(X-1)^n}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 703
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Décomposer $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 704
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 705
Mines-Ponts PC 2013
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré supérieur ou égal à 2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

Exercice 706
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $z_1,\dots,z_{n-1}$ les racines de X^n-1 distinctes de 1.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_k} = \frac{n-1}{2}.$$

Exercice 707
Mines-Ponts MP 2021
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$, admettant n racines réelles distinctes.
1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P'(x))^2 - P(x)P''(x) > 0.$$

2. En déduire que, si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors on a :

$$\forall k \in [\![1,n-1]\!], \quad a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2.$$

Exercice 708
Centrale MP 2005
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $n = \deg(P)$, x_1 une racine simple de P, $x_2,\dots,x_n$ les autres racines de P (éventuellement confondues), $y_2,\dots,y_n$ les racines de P'.
Montrer que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_1-x_k} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_1-y_k}.$$

Exercice 709
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 3$ dont les racines $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ sont réelles.
Montrer que :

$$P'\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad P'\left(\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}\right) \neq 0.$$

Exercice 710
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $a_1,\dots,a_n$ deux à deux distincts et $P = (X-a_1)\cdots(X-a_n)$.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{n-1}}{P'(a_k)} = 1.$$

Exercice 711
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n. On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P admet n racines simples $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.
Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k P'(\alpha_k)}.$$

Exercice 712
Centrale MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n. On suppose que P admet n racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(\alpha_k)}.$$

Exercice 713
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n \geqslant 2$, admettant n racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
Montrer que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n-2$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Q(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} = 0.$$

Exercice 714
Mines-Ponts MP 2019. Centrale MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n. On suppose que P admet n racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} = 0.$$

Exercice 715
Soit α, β et γ les racines du polynôme $P = X^3 - 3X + 1$ et $F = \dfrac{X}{(X^2+1)(X+1)^2}$.
Calculer $F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma)$.

Exercice 716
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
Écrire $F = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega}$ sous forme de fraction rationnelle irréductible.

Exercice 717
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
Écrire $F = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{X + \omega}{X - \omega}$ sous forme de fraction rationnelle irréductible.

Exercice 718
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
Écrire $F = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{\omega X + 1}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1}$ sous forme de fraction rationnelle.

Exercice 719
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, P un polynôme de degré n à coefficients réels dont les racines sont réelles distinctes.
Montrer que les racines du polynôme $Q = nPP'' - (n-1)(P')^2$ sont toutes complexes.

Exercice 720
Montrer que la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 721
Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts MP - MPI 2023
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n, et $Q = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - k)$.

1. Décomposer $\dfrac{P}{Q}$ en éléments simples.
2. Montrer qu'il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $|P(k)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

Exercice 722

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \in \mathbb{N}^*$, scindé à racines simples. On note $a_1, \ldots ,a_n$ les racines ordonnées de P et $b_1, \ldots ,b_{n-1}$ celles de P'.

1. En considérant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$, montrer que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad n \prod_{j=1}^{n-1} (a_i - b_j) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j).$$

2. En déduire que :

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!], \quad a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{n} \leqslant b_i \leqslant a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{n}.$$

Chapitre VIII

Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels

Exercice 723
Soit C l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, croissantes sur $\mathbb{R}$.
1. C est-il un espace vectoriel ?
2. Montrer que $\Delta = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, \exists (g,h) \in C^2, f = g - h \right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 724
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel strict de E non réduit à $\{0_E\}$.
Montrer que $\complement_E F \cup \{0_E\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 725
X - ESPCI PC 2016
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1.2 Familles de vecteurs

Exercice 726
Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, la famille $\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ est-elle liée ?

Exercice 727
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_1 < \dots < a_n$. Montrer que la famille $(f_{a_k})_{k \in [\![1,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 728
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$.
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_1 < \dots < a_n$. Montrer que la famille $(f_{a_k})_{k \in [\![1,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 729
ENS MP 2018. Mines-Ponts MP 2021
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = |x - a|$.
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_1 < \dots < a_n$. Montrer que la famille $(f_{a_k})_{k \in [\![1,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 730
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ par $f_a(x) = \dfrac{1}{x-a}$.
Soit $(a_1, \ldots ,a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_1 < \ldots < a_n$. Montrer que la famille $(f_{a_k})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 731
Mines-Ponts PC 2008
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots ,a_n$ n réels strictement positifs deux à deux distincts et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f_k : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a_k^2}$.
Montrer que la famille $(f_1, \ldots ,f_n)$ est libre.

Exercice 732
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \sin^k(x)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 733
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \cos(kx)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 734
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(x^n)$.
Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 735
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note f_k la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+kx)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}_+^{]-1,+\infty[}$.

Exercice 736
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_k(x) = x^k \ln^{n-k}(x)$.
Montrer que la famille $(f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$.

Exercice 737
Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(\mathbb{R})$ est infini.
Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 738
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non constante. Montrer que $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 739
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $(e_1, \ldots ,e_n)$ une famille libre de E et $a_1, \ldots ,a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $u_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{k-1} e_i$.
Montrer que la famille $(u_1, \ldots ,u_n)$ est libre dans E.

Exercice 740
Mines-Ponts MP 2008
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \ldots ,e_n)$ une famille libre de vecteurs de E, $(\lambda_1, \ldots ,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u_k = e_k + u$.
Montrer que la famille $(u_1, \ldots ,u_n)$ est libre si, et seulement si, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \neq -1$.

Exercice 741
Soit $(X_1, \ldots ,X_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\left(X_1{}^{\mathrm{t}}X_1, \ldots ,X_p{}^{\mathrm{t}}X_p\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Étudier la réciproque.

Exercice 742
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(X_1,\dots,X_p)$ et $(Y_1,\dots,Y_q)$ deux familles libres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Montrer que $\left(X_i{}^{\mathrm{t}}Y_j\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 743
Centrale PC 2005
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_n$ des réels distincts non nuls et, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, L_k la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :
$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\qquad L_k(P)=\int_0^{a_k}P(t)\mathrm{d}t.$$
Montrer que $(L_1,\dots,L_n)$ est libre.

Exercice 744
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E de rang s. On extrait de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{F}'$ de p vecteurs ($p\leqslant n$) de rang s'.
Montrer que :
$$s'\geqslant s+p-n.$$

Exercice 745
ENS 2001
Déterminer le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices nilpotentes.

Exercice 746
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, soit f_k et g_k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=\cos(kx)$ et $g_k(x)=\cos^k(x)$.
Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Vect}(f_0,\dots,f_n)=\mathrm{Vect}(g_0,\dots,g_n).$$

1.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 747
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $A\cap B=A+B$ si, et seulement si, $A=B$.

Exercice 748
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E.
1. Montrer que $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A\cap(B+C)$.
   Vérifier sur un exemple que l'égalité n'a généralement pas lieu.
2. Montrer que, si $B\subset A$, alors $(A\cap B)+(A\cap C)=A\cap(B+C)$.

Exercice 749
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E.
1. Montrer que $A+(B\cap C)\subset(A+B)\cap(A+C)$.
   Vérifier sur un exemple que l'égalité n'a généralement pas lieu.
2. Montrer que, si $A\subset B$, alors $A+(B\cap C)=(A+B)\cap(A+C)$.

Exercice 750
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A)\subset(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)$.

Exercice 751
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $A+(B\cap(A+C))=(A+B)\cap(A+C)$.

Exercice 752
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $A\cap(B+(A\cap C))=(A\cap B)+(A\cap C)$.

Exercice 753
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E.
On suppose que $A \cap C \subset B$, $C \subset A + B$ et $B \subset C$.
Montrer que $B = C$.

Exercice 754
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E.
On suppose que $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$.
Montrer que $B = C$.

Exercice 755
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que, si $A \cap B = A + C$ et $A \cap C = A + B$, alors $A = B = C$.

Exercice 756
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $(A \cap C) + (B \cap C) + (A \cap D) + (B \cap D) \subset (A + B) \cap (C + D)$.

Exercice 757
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $(A \cap B) + (C \cap D) \subset (A + C) \cap (B + C) \cap (A + D) \cap (B + D)$.

Exercice 758
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que, si $A \cap B = C \cap D$, alors $(A + (B \cap C)) \cap (A + (B \cap D)) = A$.

Exercice 759
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux sous-espaces vectoriels de E et C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B.
Montrer que $A + B = A \oplus C$.

Exercice 760
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E tels que $A \subset C$ et $A \oplus B = E$.
Montrer que $A \oplus (B \cap C) = C$.

Exercice 761
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux sous-espaces vectoriels de E, A' (respectivement B') un supplémentaire de $A \cap B$ dans A (resp. dans B).
Montrer que $A + B = (A \cap B) \oplus A' \oplus B'$.

Exercice 762
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que la somme $A+B+C+D$ est directe si, et seulement si, $(A+B)\cap(C+D) = \{0_E\}$, $(A+C)\cap(B+D) = \{0_E\}$ et $(A + D) \cap (B + C) = \{0_E\}$.

Exercice 763
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$,, $F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k = \bigoplus_{k=1}^{n} G_k$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $F_k \subset G_k$.
Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $F_k = G_k$.

Exercice 764
Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, F l'ensemble des fonctions constantes de E et $G = \left\{ f \in E \,/\, \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 765

Soit F et G les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définis par :

$$F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0\right\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exercice 766
Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \exists Q \in \mathbb{R}[X], P(X) = (1-X)Q\left(X^2\right)\right\}$, $G_1 = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \exists Q \in \mathbb{R}[X], P(X) = Q\left(X^2\right)\right\}$ et $G_2 = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \exists Q \in \mathbb{R}[X], P(X) = XQ\left(X^2\right)\right\}$.
Montrer que F, G_1 et G_2 sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ puis que $F \oplus G_1 = F \oplus G_2 = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 767
Soit A un ensemble non vide et $E = \mathbb{R}^A$. Pour tout $X \in \mathcal{P}(A)$, on note $N_X = \{f \in E \,/\, \forall x \in X\ f(x) = 0\}$.
1. Vérifier que, pour tout $X \in \mathcal{P}(A)$, N_X est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $(X,Y) \in (\mathcal{P}(A))^2$. Montrer que :
   a) $N_X + N_Y = E \iff X \cap Y = \varnothing$;
   b) $N_X \cap N_Y = \{0_E\} \iff X \cup Y = A$;
   c) $N_X \oplus N_Y = E \iff Y = A \setminus X$.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 768
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $d_1,\ldots,d_n$ n nombres complexes deux à deux distincts et $D = \operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n)$.
Montrer que $\left(I_n,D,\ldots,D^{n-1}\right)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 769
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une base constituée de matrices de projecteurs.

Exercice 770
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle et $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\left(P,P',\ldots,P^{(n)}\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 771
X - ESPCI PC 2008
Soit $(P_1,P_2,P_3,P_4) \in (\mathbb{R}_3[X])^4$.
1. On suppose que, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, $P_k(1) = 0$.
   La famille (P_1,P_2,P_3,P_4) est-elle liée ?
2. On suppose que, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, $P_k(0) = 1$.
   La famille (P_1,P_2,P_3,P_4) est-elle liée ?

Exercice 772
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$.
Montrer que la famille $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 773
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
1. Montrer que la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la décomposition de $P = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left(X^n(1-X)^n\right)$ dans cette base.
3. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 774
Centrale PSI 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = \dbinom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$.

1. Montrer que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2P_k$.
3. Pour $j \in [\![0,n]\!]$, exprimer X^j dans la base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Exercice 775
Mines-Ponts PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_0,\ldots,a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.
Montrer que $((X-a_0)^n,\ldots,(X-a_n)^n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 776
Mines-Ponts PSI 2018
Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_0,\ldots,a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts et $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n.
Montrer que $(P(X+a_0),\ldots,P(X+a_n))$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 777
X - ESPCI PC 2017
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
La famille $\mathcal{F} = \{e_i - e_j \,/\, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ est-elle génératrice de E ?

Exercice 778
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
On pose :
$$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\quad f_k = e_k + e_{k+1} \quad \text{et} \quad f_n = e_n + e_1.$$
$\mathcal{B}' = (f_1,\ldots,f_n)$ est-elle une base de E ?

Exercice 779
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
On pose :
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\quad f_k = e_1 + \cdots + e_{k-1} + ke_k + e_{k+1} + \cdots + e_n.$$
1. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1,\ldots,f_n)$ est une base de E.
2. Soit $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_ke_k \in E$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 780
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
On pose :
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\quad f_k = \sum_{i=1}^{k} e_i.$$
1. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1,\ldots,f_n)$ est une base de E.
2. Soit $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_ke_k \in E$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 781
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que :
$$(\dim(F+G))^2 + (\dim(F\cap G))^2 \geqslant (\dim(F))^2 + (\dim(G))^2.$$
Étudier le cas d'égalité.

Exercice 782
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$, E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par $(1,\ldots,1)$ et $H = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$.
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ puis que $H \oplus E_1 = \mathbb{K}^n$.

Exercice 783

HEC ECS Exercice sans préparation 2013

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

On pose : $F = \{P \in E \,/\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \,/\, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E \,/\, P(X) = P(-X)\}$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 784

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distintcs. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note :

$$F_k = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \forall i \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}, P(a_i) = 0\}.$$

Montrer que :

$$F_0 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathbb{R}_n[X].$$

Exercice 785

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif infini, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E, distinct de $\{0_E\}$ et E, et G un supplémentaire de F.

Soit $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F, $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G et $a \in F \setminus \{0_E\}$.

1. Montrer que $(f_1, \dots, f_p, g_1 + a, \dots, g_q + a)$ est une base de E.
2. En déduire que $\mathrm{Vect}(g_1 + a, \dots, g_q + a)$ est un supplémentaire de F, distinct de G.
3. Montrer que F admet une infinité de supplémentaires.

Exercice 786

X MP 2013. Mines-Ponts PSI 2016. Mines-Ponts PC 2016. TPE PC 2009

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(G)$.

Exercice 787

ESCP Question courte 2003

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ ($n \geqslant 2$), H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E.

Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Chapitre IX

Applications linéaires

1 Applications linéaires. Noyau. Image

Exercice 788
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $g : F \longrightarrow G$ une application et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective.
Montrer que, si $g \circ f$ est linéaire, alors g est linéaire.

Exercice 789
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et φ l'application définie par :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y - f(x)) \end{array} \right.$$

Montrer que f est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 790
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E_1, E_2, F_1 et F_2 des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f_1 \in \mathcal{L}(E_1,F_1)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2,F_2)$.
On note $f_1 \times f_2$ l'application définie par :

$$f_1 \times f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & F_1 \times F_2 \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & (f_1(x_1),f_2(x_2)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $f_1 \times f_2$ est linéaire.
2. Montrer que $f_1 \times f_2$ est injective si, et seulement si, f_1 et f_2 le sont.
3. Montrer que $f_1 \times f_2$ est surjective si, et seulement si, f_1 et f_2 le sont.

Exercice 791
$\mathbb{C}$ étant muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, soit $a \in \mathbb{C}^*$ et f l'application définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + a\overline{z} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 792
Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(f) : x \longmapsto xf(x)$.
Montrer que φ est un endomorphisme de E dont on déterminera le noyau et l'image.

Exercice 793
CCP PSI 2014
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille

$(x,f(x))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.

Exercice 794
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$.
On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda f$.

Exercice 795
CCP PC 2009
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. On suppose que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   Montrer que $f + \mathrm{Id}_E$ est bijective.
2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   Montrer que $f + \mathrm{Id}_E$ est bijective

Exercice 796
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$.
Montrer que :
a) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$;
b) $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 797
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que :
a) $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$;
b) $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$;
c) $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$;
d) $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 798
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que :
a) $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$;
b) $g^{-1}(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 799
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right)$.

Exercice 800
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f,g,h) \in (\mathcal{L}(E))^3$ tels que :

$$f \circ g = h, \quad g \circ h = f, \quad h \circ f = g.$$

1. Montrer que f, g et h ont le même noyau et la même image.
2. Montrer que $f^5 = f$.
3. Montrer que :
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 801
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}(G,H)$.
a) Montrer que, si $\mathrm{Ker}(h \circ g) = \mathrm{Ker}(g)$, alors $\mathrm{Ker}(h \circ g \circ f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
b) Montrer que, si $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$, alors $\mathrm{Im}(h \circ g \circ f) = \mathrm{Im}(h \circ g)$.

Exercice 802
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que, si $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$ ou $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\}$, alors $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 803
CCP PSI 2005. IMT PSI 2017. CCINP PC 2019
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 804
Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
1. Montrer que $f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$.
2. Montrer que, si f est injective et la somme $E_1 + E_2$ est directe, alors $f(E_1 \oplus E_2) = f(E_1) \oplus f(E_2)$.

Exercice 805
Mines Ponts PC 2016
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec $u \circ v = v \circ u$. On suppose que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0\}$.
1. Pour $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$, montrer que $\mathrm{Ker}(u - av) \cap \mathrm{Ker}(u - bv) = \{0\}$.
2. Soit $a_1, \ldots ,a_n$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que la somme des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u - a_k v)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ est directe.

Exercice 806
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $h \in \mathcal{L}(G,F)$ et $k \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que :
$$f = h \circ g \circ f \qquad \text{et} \qquad g = g \circ f \circ k.$$
Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaire dans F.

Exercice 807
CCINP PC 2019
Soit E un espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire surjective.
1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f \circ \varphi = \lambda f$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par φ.

Exercice 808
Centrale PC 2014
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G si, et seulement si, f est injective, g est surjective et $F = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 809
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
1. Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f).$$
2. Montrer que :
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g).$$

Exercice 810
Mines-Ponts PSI 2014
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que $v \circ u \in \mathcal{GL}(E)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) = F$.

Exercice 811
IMT PC 2016
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires dans E.
2. Justifier que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 812
CCINP PSI 2019
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que 0 est racine simple d'un polynôme annulateur de u.
1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2\right)$.
2. Montrer que, si u est nilpotent, alors u est nul.

Exercice 813
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $g \circ f \circ g = f$ et $f \circ g \circ f = g$.
1. Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g).$$
2. Montrer que :
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g).$$

Exercice 814
X MP 2013
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}\left(f^3\right)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^4\right)$.

Exercice 815
ICNA MP 2016
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 816
Mines-Ponts PC 2018
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - f^2 + f - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right) = E$.

Exercice 817
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 818
CCP PSI 2009
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^4 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 819
X MP 2020
Soit E un espace vectoriel et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
On suppose que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(f \circ g - g \circ f) = \mathrm{Ker}(f - g) \oplus \mathrm{Ker}(f + g).$$

Exercice 820
Mines-Ponts MP 2021
Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $D : f \in E \longmapsto f' \in E$.
Existe-t-il $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ T = D$?

2 Projecteurs

Exercice 821
Soit $B \in \mathbb{K}[X]$, non nul. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, on note $q(A)$ et $r(A)$ le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
1. Montrer que q et r sont des applications linéaires.
2. Déterminer le noyau et l'image de q et r.
3. Montrer que r est un projecteur.

Exercice 822
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0;1\}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.
Montrer que $p - \lambda \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E.

Exercice 823
CCP PC 2018
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur tel que $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f = p + \alpha \mathrm{Id}_E$.
1. Exprimer $f \circ f$ en fonction de f et Id_E.
2. Pour quelles valeurs de α f est-elle bijective? Exprimer alors f^{-1}.

Exercice 824
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = 0$.
1. Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et des projecteurs p et q de E tels que :

$$p = \lambda(f - b\mathrm{Id}_E), \qquad q = \mu(f - a\mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad f = ap + bq.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer f^n en fonction de a, b, p et q.

Exercice 825
Soit $\mathbb{K}$ un cors commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p = 0$.
Vérifier que les applications π_p et π_q définies par :

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & p \circ f \circ p \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & q \circ f \circ q \end{array} \right.$$

sont des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ et que $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$.

Exercice 826
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E, distincts et non nuls.
Montrer que la famille (p,q) est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 827
X - ESPCI PC 2016. Mines-Ponts PC 2021
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.

Exercice 828
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
3. Dans quel cas peut-on conclure que $g = f^{-1}$?
4. Caractériser $g \circ f$.

Exercice 829
CCP PC 2009
Soit E un espace vectoriel, $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
Montrer que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$ si, et seulement si, f et g sont des projecteurs et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 830
Mines-Ponts MP 2021
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $(p,q,r) \in (\mathcal{L}(E))^3$. On suppose que p, q, r et $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ sont des projecteurs.
Montrer que $q = r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 831
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$.
1. Montrer que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varphi = \lambda p + (1 - \lambda)q$.
   Montrer que φ est un projecteur dont on déterminera l'image.

Exercice 832
X PC 2001
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E.
1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer qu'on a alors :

$$\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q).$$

Exercice 833
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique non nulle, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs de E.
Montre que $p_1 + \cdots + p_n$ est un projecteur de E si, et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Exercice 834
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E.
1. Montrer que $p - q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = q$.
2. Montrer qu'on a alors :

$$\mathrm{Ker}(p - q) = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(p - q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$

Exercice 835
Mines-Ponts PC 2019. CCP PSI 2014
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

Exercice 836
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q tels que $f = p - q$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$ si, et seulement si, $f^2 = 0$.

Exercice 837
Mines-Ponts PSI 2015. IMT PSI 2016
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(p,q) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
Montrer que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ si, et seulement si, p et q sont des projecteurs et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 838
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E.
Montrer que :
a) $p \circ q = p \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$;
b) $q \circ p = p \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 839
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0; 1\}$ tel que $p \circ q = \alpha q \circ p$.
Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 840
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$ et $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p = q$.

Exercice 841
X MP 2005
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^q = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que :
$$\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \mathrm{tr}\left(u^k\right).$$

Exercice 842
Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G, L et M des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = L \oplus M = E$, p_F (respectivement p_L) le projecteur sur F (resp. sur L) parallèlement à G (resp. M).
Montrer que $p_F + p_L$ est un projecteur si, et seulement si, $F \subset M$ et $L \subset G$.

Exercice 843
CCINP MP 2022
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$.
Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur de noyau $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ et d'image $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 844
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q \neq q \circ p$ et qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $p \circ q - q \circ p = \alpha p + \beta q$.
1. Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $p \circ q + q \circ p = \lambda p + \mu q$.
2. En déduire qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ tel que $p \circ q = ap + bq$ et $q \circ p = cp + dq$.
3. Quelles sont les seules valeurs possibles de (α,β) ?

Exercice 845
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, P l'ensemble des projecteurs de E et $\leqslant$ la relation définie dans P par :
$$p \leqslant q \Longleftrightarrow p \circ q - q \circ p = p.$$
1. Vérifier que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans P.
2. Soit $(p,q) \in P^2$ tel que $p \circ q = q \circ p$.
   Montrer que $\{p,q\}$ admet, dans $(P, \leqslant)$, une borne inférieure et une borne supérieure que l'on calculera.
   En les notant $p \wedge q$ et $p \vee q$, montrer que :
$$\mathrm{Im}(p \wedge q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(p \vee q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q).$$

Exercice 846
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E.
1. On note $[p,q] = p \circ q - q \circ p$.
   Montrer que $p \circ q$ est un projecteur si, et seulement si, $[p,q](\mathrm{Im}(q)) \subset \mathrm{Ker}(p)$.
   Montrer qu'on a alors :
$$\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap (\mathrm{Im}(q) + (\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)))$$
$$\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(q) + (\mathrm{Ker}(p) \cap (\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q))).$$
2. En déduire que, si p et q sont deux projecteurs qui commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur et :
$$\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q).$$

Exercice 847
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) $f \circ g \in \mathcal{GL}(E)$;
   b) f est surjective, g est injective et $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$;
   c) f est surjective, g est injective, $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ f \circ g \circ f)$ et $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(g \circ f \circ g \circ f)$.
2. On suppose que f est surjective, g est injective et que $p = g \circ f$ est un projecteur.
   Que peut-on dire de $f \circ g$, $p \circ q$ et $f \circ p$?
   Comparer $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Im}(g)$, $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Ker}(f)$.

3 Applications linéaires en dimension finie

Exercice 848
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
Montrer que, si $f \circ g$ est un projecteur, alors $\operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Exercice 849
CCINP PC 2021
On considère l'ensemble :

$$E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_n\right\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 1$.
   a) Montrer que P admet une unique racine réelle a.
   Indication. — Faire une étude de fonction.
   b) Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(X) = (X - a)(X - z)(X - \bar{z})$.
3. a) Soit φ l'application définie par :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0,u_1,u_2) \end{array} \right.$$

   Montrer que φ est un isomorphisme.
   Quelle est la dimension de E?
   b) Déterminer les suites géométriques qui appartiennent à E.
   En déduire une base de E.
4. On dit qu'une partie S de $\{1,2,\dots,n\}$ est spéciale si, pour tout $k \in S$, $k+1$ et $k+2$ n'appartiennent pas à S. On note s_n le nombre de parties spéciales de $\{1,2,\dots,n\}$. On convient que $s_0 = 1$.
   Calculer s_1, s_2 et s_3.
   Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.

Exercice 850
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que :

$$f^2 - f \circ g + 2f - \operatorname{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 851
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $f + g = f \circ g$.
Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 852
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que, si $f \notin \mathcal{GL}(E)$, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f \circ P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Montrer que, si $f \in \mathcal{GL}(E)$, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f^{-1} = P(f)$.

Exercice 853
CCP PC 2016
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, $k \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -k^2\operatorname{Id}_E$.
1. Montrer que f ne possède pas de valeur propre réelle.
2. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer que $(a,f(a))$ est libre.

3. Soit $(a,b) \in E^2$ avec $b \notin \mathrm{Vect}(a,f(a))$. Montrer que $(a,f(a),b,f(b))$ est une base de E.
   Déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 854
Mines-Ponts PC 2019
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
2. Montrer que f est un automorphisme de E si, et seulement si, $f^2 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On suppose dans la suite que $f^2 + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
3. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer que la famille $(a,f(a))$ est libre.
4. Soit $(a,b) \in E^2$. On suppose que la famille $(a,f(a),b)$ est libre.
   Montrer que la famille $(a,f(a),b,f(b))$ est libre.
5. Si E est de dimension finie, que peut-on dire de sa dimension ?

Exercice 855
X ESPCI PC 2011
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\big(f(x_0),f^2(x_0),\ldots,f^n(x_0)\big)$ soit une base de E.
1. Montrer que f est un isomorphisme.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.
   Montrer que g un polynôme en f.

Exercice 856
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que :
$$\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f), \quad \mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f), \quad \mathrm{rg}(f) = 2, \quad \mathrm{rg}\left(f^2\right) = 1.$$

Exercice 857
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$;
(ii) $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2\mathrm{rg}(f)$;
(iii) $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 858
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$.
1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, unique, tel que $f^2 = \lambda f$.
2. Montrer que, si E est de dimension finie et $\lambda \neq 1$, alors $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme.

Exercice 859
CCP PSI 2006
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P(1)X + P(0)\left(X^2 - 4\right)$.
Montrer que l'application f est linéaire puis déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 860
Soit $a_1,\ldots,a_{n+1}$ $n+1$ réels deux à deux distincts et f l'application définie par :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_1),\ldots,P(a_{n+1})). \end{array} \right.$$
Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 861
Mines-Ponts PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ nombres complexes distincts $x_0,\ldots,x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0,\ldots,y_n,y'_0,\ldots,y'_n$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ tel que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(x_k) = y_k$ et $P'(x_k) = y'_k$.

Exercice 862
CCP MP 2005. TPE PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P - P'.$$

Montrer que f est un automorphisme et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 863
X - ESPCI PC 2016. Mines-Ponts MP 2013
Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, unique, tel que $P(0) = 0$ et $Q = P(X+1) - P(X)$.

Exercice 864
X - ESPCI PC 2016
Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(0) = P'(0) = 0\}$ et $\varphi : P \in E \longmapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)$.
Montrer que φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 865
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$ tel que $(f(x_0), \dots, f^n(x_0))$ soit libre.
Montrer que $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E et que f est un automorphisme de E.

Exercice 866
ENSEA PSI 2014
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que f est un automorphisme de E si, et seulement si, $f(F)$ et $f(G)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 867
X - ESPCI PC 2017
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,G)$. Montrer que $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(f)$ si, et seulement s'il existe $h \in \mathcal{L}(G,F)$ telle que $f = h \circ g$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(F,E)$ et $g \in \mathcal{L}(G,E)$. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(g)$ si, et seulement s'il existe $h \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $f = g \circ h$.

Exercice 868
Mines-Ponts MP 2019. Mines-Ponts PC 2021
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
1. Montrer que :
$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}\left(f^2\right) \leqslant n.$$
2. Montrer que :
$$2\operatorname{rg}\left(f^2\right) \leqslant \operatorname{rg}(f).$$

Exercice 869
X - ESPCI PC 2018. Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2019. CCP PSI 2010.
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.
2. Montrer que : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\left(f^2\right) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = E$.
3. En déduire que, si E est de dimension finie, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$;
   (ii) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\left(f^2\right)$;
   (iii) $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 870

ESCP Question courte 2006. Centrale PSI 2005

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f + g \in \mathcal{GL}(E)$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Exercice 871

X - ESPCI PC 2014. Mines-Ponts PC 2019

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Exercice 872

CCINP MP 2022

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
Montrer que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)).$$

Exercice 873

Mines-Ponts MP 2005

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
Montrer que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)).$$

Exercice 874

X - ESPCI PC 2017. Mines-Ponts MP 2021. Centrale PSI 2005. CCINP MP 2021. ENSAM PSI 2015. CCP PC 2009

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$.

1. Montrer que :

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

2. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_F\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E.$$

Exercice 875

X - ESPCI PC 2011. Mines-Ponts PC 2017. CCP MP 2013

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que :

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f).$$

Exercice 876 - Inégalité de Sylvester

Mines-Ponts 2005

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(F) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)).$$

Exercice 877

X - ESPCI PC 2016

Soit E, F, G et H quatre sous-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}(G,H)$.
Montrer que :

$$\mathrm{rg}(g \circ f) + \mathrm{rg}(h \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(h \circ g \circ f).$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 878
Saint-Cyr MP 2016
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que :

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$$

Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 879
ESCP 2004 - Question courte
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g).$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 880
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ et $F = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que, si E et F sont de dimensions finies, alors f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même rang.

Exercice 881
X MP 2018
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f+g$ soit inversible et $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 882
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer qu'il existe un automorphisme φ de E et un projecteur p de E tels que $f = \varphi \circ p$.

Exercice 883
ESCP Question courte 2009
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A$$

où $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des coefficients diagonaux de M.
1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que T soit bijective.
3. Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

Exercice 884
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PC 2019. IMT MP 2018. CCINP PSI 2019
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que :

$$f + g = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E, puis que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.
2. En déduire que f et g sont des projecteurs.

Exercice 885
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(f_1,\ldots,f_p) \in (\mathcal{L}(E))^p$.
On suppose que :

$$f_1 + \cdots + f_p = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(f_1) + \cdots + \mathrm{rg}(f_p) \leqslant n.$$

Montrer que :
- pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, f_i est un projecteur;
- pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $i \neq j$, $f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$;

- $\mathrm{Im}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(f_p) = E$.

Exercice 886
Mines-Ponts PSI 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $d_k = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^k\right)\right)$.
Montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 887 - Décomposition de Fitting
Centrale PSI 2017
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que les suites $(\mathrm{Ker}\,(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ sont croissante et décroissante respectivement.
2. a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall p < p_0, \quad \mathrm{Ker}\,(f^p) \neq \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall p \geqslant p_0, \quad \mathrm{Ker}\,(f^p) = \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right).$$
   b) Montrer que :
$$\forall p < p_0, \quad \mathrm{Im}\,(f^p) \neq \mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant p_0, \quad \mathrm{Im}\,(f^p) = \mathrm{Im}\left(f^{p+1}\right).$$
   c) Montrer que $p_0 \leqslant n$.
3. Montrer que :
$$E = \mathrm{Ker}\,(f^{p_0}) \oplus \mathrm{Im}\,(f^{p_0}).$$
4. En déduire que tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ où N est une matrice carrée nilpotente et P une matrice carrée inversible.

Exercice 888
X - ESPCI PC 2013. Mines-Ponts PC 2017. CCP PSI 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, si f est nilpotent, alors $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Soit $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$. Montrer que, si $(f \circ g)^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $(g \circ f)^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice n. Déterminer le rang f.

Exercice 889
Mines-Ponts PSI 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que :
$$\frac{n}{p} \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant n - p + 1.$$

Exercice 890
Mines-Ponts MP 2018
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent.
Montrer que :
$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(u).$$

Exercice 891
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent, et S un sous-espace vectoriel de E stable par u tel que $E = S + \mathrm{Im}(u)$.
Montrer que $S = E$.

Exercice 892
X MP 2014. X PSI 2018. Mines-Ponts PC 2018. Centrale PSI 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f_1,\ldots,f_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux.
Montrer que $f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 893
Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PC 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice inversible.

Chapitre X

Matrices

1 Calcul matriciel

Exercice 894
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.
Pour $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $E_{ij}E_{k\ell}$.

Exercice 895
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ telles que :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM).$$
Montrer que $A = B$.

Exercice 896
Centrale PC 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les applications $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\mathbb{C})$ telles que :
$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Exercice 897 - Matrices de Walsh-Hadamard
On considère la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définie par $W_0 = (1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, préciser la taille de W_n et calculer W_n^2.

Exercice 898
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

Exercice 899
ESCP 2012 - Question courte
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AMB = 0_n.$$
Montrer que $A = 0_n$ ou $B = 0_n$.

Exercice 900
IMT PSI 2017
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$.
   Montrer que X et A commutent puis que X est triangulaire supérieure.
2. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$.

Exercice 901
Centrale PC 2005
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 902
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 903
X - ESPCI PC 2018
Existe-t-il $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 904
CCINP PC 2019
Existe-il $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 905
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 906
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 22 & 44 \\ 14 & 28 \end{pmatrix} \\ AB + BA = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice 907
Mines-Ponts PC 2021
Existe-t-il $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 908
Trouver une matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 909
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $4A^3 + 2A^2 + A = 0_n$.

Exercice 910
Mines-Ponts PC 2021
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure.
Montrer que ${}^{t}TT = T\,{}^{t}T$ si, et seulement si, T est diagonale.

Exercice 911
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(A,B) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^2$.
Montrer que $\operatorname{tr}\left((AB - BA)^4\right) \geqslant 0$.
Étudier le cas d'égalité.

Exercice 912
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{C}$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $A + B = kJ$.
Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\sigma(X)$ la somme des coefficients de X.
Montrer que :
$$\left(k\sigma\left(A^{-1}\right) - 1\right)\left(k\sigma\left(B^{-1}\right) - 1\right) = 1.$$

Exercice 913
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B,C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que :
$$\forall k \in \{1,2,3\}, \quad A^k = \lambda^k(B + kC).$$
Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \lambda^k(B + kC).$$

Exercice 914
X - ESPCI PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(U,V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tels que :
$$A = \lambda U + \mu V, \quad A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \quad \text{et} \quad A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V.$$
Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

Exercice 915
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $M = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$.
Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 916
X MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lambda.$$
Montrer que $\lambda \neq 0$ et, en notant $A^{-1} = (a'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{i,j} = \frac{1}{\lambda}.$$

Exercice 917
X - ESPCI PC 2013. IMT PSI 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = A + B$.
1. Montrer que $A - I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et déterminer $(A - I_n)^{-1}$.
2. En déduire que A et B commutent.

Exercice 918
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $A + B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, $A^2B = ABA$ et $B^2A = BAB$.
Montrer que A et B commutent.

Exercice 919
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$.
Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 920
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2015. CCP PSI 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, tel que $P(0) \neq 0$ et $AB = P(A)$.
Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ puis que A et B commutent.

Exercice 921
CCP PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Calculer A^2.
On pose $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ et $B = 2A - \sigma I_n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible et calculer B^{-1}.

Exercice 922
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $(A+B,A-B) \in (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))^2$. On pose $C = (A+B)^{-1} + (A-B)^{-1}$.
Vérifier que : $ACA - ACB + BCA - BCB = 2A$.

Exercice 923
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
1. Soit $(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $R(\theta_1)R(\theta_2)$.
2. Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(R(\theta))^n$.
3. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 924
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}$.
1. Soit $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $M(x_1)M(x_2)$.
2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(M(x))^n$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 925
ESCP 2008 - Question courte
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls.
Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A comporte un coefficient non nul et un seul.

Exercice 926
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{x^2}{2} & -\dfrac{x^2}{2} & x \\ \dfrac{x^2}{2} & 1-\dfrac{x^2}{2} & x \\ x & -x & 1 \end{pmatrix}$.
1. Soit $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $M(x_1)M(x_2)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x)$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(M(x))^n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $(a_n,b_n,c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(M(x))^n = a_n(M(x))^2 + b_nM(x) + c_nI_3$.

Exercice 927
CCP PSI 2016
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.
1. Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. À quelle(s) condition(s) la matrice $M(a)$ est-elle inversible ?
3. Déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(M(a))^n = M(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 928
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et :

$$A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}.$$

Étudier l'inversibilité de A et déterminer A^{-1} quand cet inverse existe.

Exercice 929
X MP 2014. IMT PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Étudier l'inversibilité de A et déterminer A^{-1} quand cet inverse existe.

Exercice 930
Mines-Ponts MP 2005
Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 931
X - ESPCI PC 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 932
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 933
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \\ a & \text{si } i < j \end{cases}$$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 934
IMT MP 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente.
Montrer que $I_n + A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 935
X PSI 2018. Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PC 2016. Centrale PSI 2014. Navale MP 2016. ENTPE-EIVP MP 2015
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $AB = BA$ et B nilpotente.
Montrer que A est inversible si, et seulement si, $A + B$ est inversible.

Exercice 936
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente.
1. Montrer que $I_n + N + N^2 + \cdots + N^{n-1}$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n + 2N + 3N^2 + \cdots + nN^{n-1}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 937
X - ESPCI PC 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $pA^{p+1} = (p+1)A^p$.
Montrer que $A - I_n$ est inversible et déterminer $(A - I_n)^{-1}$.

Exercice 938
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B,C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^3$. On suppose que $C = AB - BA$ et $BC = CB$.
1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $AB^{p+1} - B^{p+1}A = (p+1)B^pC$.
2. En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 939
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

Étudier l'inversibilité de A et déterminer A^{-1} quand cet inverse existe.

Exercice 940
HEC ECS Exercice sans préparation 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = i^{j-1}.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 941
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $I_n + AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $I_n + BA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et déterminer $(I_n + BA)^{-1}$.

Exercice 942
X ENS PSI 2007
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $A + B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
1. Montrer que :
$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$
2. On suppose que A et B sont inversibles. Montrer que :
$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = \left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1}.$$

Exercice 943
Mines-Ponts PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & I_n \end{pmatrix}$.
Montrer que A est inversible si, et seulement si, $\alpha - LC \neq 0$, auquel cas déterminer A^{-1}.

Exercice 944
Mines-Ponts PSI 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(R)$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit inversible, auquel cas déterminer M^{-1}.

Exercice 945
TPE PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{tr}(A) = 1$.
Montrer que $A^2 = A$.

Exercice 946
Mines-Ponts MP 2014. Mines-Ponts PC 2017. Navale MP 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $\operatorname{rg}(AB - BA) = 1$.
Calculer $(AB - BA)^2$.

Exercice 947
Mines-Pont MP 2021
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exercice 948
Mines-Ponts MP 2019. Centrale MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ et $A = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Calculer $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 949 - Théorème d'Hadamard
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PSI 2013. Centrale PSI 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1. On suppose que A est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$
Montrer que A est inversible.
2. On suppose de plus que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs, c'est-à-dire :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$
Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 950
Mines-Ponts MP 2013, Mines-Ponts PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation :
$$X = \operatorname{tr}(X)A + B.$$

Exercice 951
X MP 2016. X - ESPCI PC 2019. Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PC 2021. Centrale PC 2016
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation : $X + {}^{\mathrm{t}}X = \operatorname{tr}(X)A$.

Exercice 952
Mines-Ponts MP 2009. IMT PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$.
Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 953 - Formule de Sherman-Morrison
X - ESPCI PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$.
Montrer que $A + X{}^{\mathrm{t}}Y$ est inversible si, et seulement si, ${}^{\mathrm{t}}YA^{-1}X \neq -1$, auquel cas :
$$\left(A + X{}^{\mathrm{t}}Y\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}X{}^{\mathrm{t}}YA^{-1}}{1 + {}^{\mathrm{t}}YA^{-1}X}.$$

Exercice 954
CCP PC 2018
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.
1. Donner une base de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
3. Donner $(Q,P) \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la dimension de $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, MA = 0_{3,4}\}$.

Exercice 955
Mines-Ponts PC 2019
Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
1. Montrer que AB est une matrice de projecteur.
2. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 956
1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 0_n$.
   Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = I_n + A$?
2. Trouver $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 957
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
1. Déterminer le rang de M.
2. Calculer M^{-1} lorsque M est inversible.

Exercice 958
X PC 2005. ENSEA MP 2015. IMT PSI 2014
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer que $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n$ si, et seulement si, $D = CA^{-1}B$.

Exercice 959
Soit $n \in \mathbb{N}$, impair, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On suppose que $AB = 0_n$.
Montrer que l'une des deux matrices $A + {}^{\mathrm{t}}A$ et $B + {}^{\mathrm{t}}B$ n'est pas inversible.

Exercice 960
ENS MP 2019
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(A_1, \ldots, A_p) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^p$. On suppose que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $A_k^2 = A_k$.
Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{p} (n - \mathrm{rg}(A_k)) \geqslant \mathrm{rg}(I_n - A_1 \cdots A_p).$$

Exercice 961
X MP 2017. X - ESPCI PC 2014. Mines-Ponts MP 2019. Centrale PSI 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une application non constante telle que :
$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow f(M) \neq 0.$$

Exercice 962
X MP 2017. X - ESPCI PC 2013. Mines-Ponts MP 2019. Centrale PC 2019. TPE PSI 2017
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Matrices et applications linéaires

Exercice 963
CCP PSI 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on note $\varphi(P)(X) = P(X+1)$.
1. Déterminer la matrice φ dans la base canonique.
2. Déterminer φ^{-1} ainsi que la matrice de φ^{-1} dans la base canonique.

Exercice 964
Soit $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$ et $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}\right\}$.
1. Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection sur P parallèlement à D.
   Déterminer $p(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ puis la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 965
IMT PC 2016
Soit $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$ et $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}\right\}$.
1. Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection sur P parallèlement à D.
   Déterminer $p(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ puis la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 966
Mines-Ponts MP 2014
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang $n-1$.
Montrer que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

Exercice 967
X - ESPCI PC 2011
Soit $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto {}^{\mathrm{t}}A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Calculer la trace de φ.

Exercice 968
X - ESPCI PC 2011
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AMB$.
Calculer la trace de φ.

Exercice 969
X MP 2013. Mines-Ponts MP 2019. Mines-Ponts PC 2021. IMT MP 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 970
Mines-Ponts MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que, si f est un projecteur, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f)$.
2. Montrer que, si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$, alors f est un projecteur.

Exercice 971
X - ESPCI PC 2009
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Montrer que :
$$\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) = \operatorname{Vect}\left(\left\{AB - BA \,/\, (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\right\}\right).$$
2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
Montrer que les applications φ et tr sont proportionnelles.

Exercice 972
Mines-Ponts PC 2018. CCP PC 2016
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
1. Montrer que $\operatorname{rg}(f) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 973
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\operatorname{rg}(f) = 2n$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est
$$\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 974
Mines-Ponts PC 2017
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à sa transposée.

Exercice 975
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n.
Montrer que A est semblable à la matrice :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 976
Mines-Ponts PSI 2016
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et $f \in \mathcal{GL}(E)$.
Montrer que $f + g \in \mathcal{GL}(E)$ si, et seulement si, $\operatorname{tr}\left(g \circ f^{-1}\right) \neq -1$.

3 Systèmes linéaires

Exercice 977
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a, b et k :
$$\begin{cases} kx + y = a \\ x + ky = b \end{cases}$$

Exercice 978
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x+y+z=a+1 \\ ax+y+(a-1)z=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

Exercice 979
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x+y+az=a \\ x+ay-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Exercice 980
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a et b :

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=b \\ x+y+az=b \end{cases}$$

Exercice 981
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x-ay+a^2z=2a \\ ax-a^2y+az=2a \\ ax+y-a^2z=1-a \end{cases}$$

Exercice 982
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} ax+(1-a)y+(1-a)z=a^2 \\ ax+(1+a)y+(1+a)z=a-a^2 \\ x+y+z=1-a \end{cases}$$

Exercice 983
Centrale PSI 2005
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ ax+y+(1-a)z=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

Exercice 984
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{cases}$$

Exercice 985
IMT PC 2016
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$$

Exercice 986
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x+ay+(a-1)z=a+1 \\ 3x+2y+az=3 \\ (a-1)x+ay+(a+1)z=a-1 \end{cases}$$

Exercice 987
CCINP MP 2022
Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2ax+y+z=2 \\ x+2ay+z=4a \\ x+y+2az=2a^2 \end{cases}$$

Exercice 988
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} (a-1)x+ay+z=a+1 \\ ax+2y+3z=3 \\ (a+1)x+ay+(a-1)z=a-1 \end{cases}$$

Exercice 989
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} -ax+(a+1)y+az=a+1 \\ (2a-1)x+(a-1)y-az=a^2-1 \\ -2x-4y+2az=a^2-3a-4 \end{cases}$$

Exercice 990
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a et b :

$$\begin{cases} (a+b)x+by+az=0 \\ bx+(a+b)y+az=0 \\ ax+by+(a+b)z=0 \end{cases}$$

Exercice 991
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a et b :

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases}$$

Exercice 992
CCINP MP 2022
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} a^2x+a^3y+az=b \\ a^2x+y+az=b \\ x+ay+a^2z=b \end{cases}$$

Exercice 993
Résoudre le système suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a et b :

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Exercice 994
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a et b :

$$\begin{cases} x + ay + bz = a \\ x + by + az = b \\ ax + y + bz = a \\ bx + y + az = b \end{cases}$$

Exercice 995
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a, b et c :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + bt = c \\ x + by + z + at = c \end{cases}$$

Exercice 996
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + y + z = a \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

Exercice 997
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a et b:

$$\begin{cases} x + 2y + az = 2(3a + 2) \\ 2x + ay + z = b \\ ax + y + 2z = b \\ x + y + z = 2(a + 3) \end{cases}$$

Exercice 998
Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres a, b, c et d:

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ y + z = 2b \\ z + t = 2c \\ t + x = 2d \end{cases}$$

Chapitre XI

Groupe symétrique et déterminants

1 Groupe symétrique

Exercice 999
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)$ soit maximale.

2 Déterminants

2.1 Calcul de déterminants d'ordre 3

Exercice 1000
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 1001
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}.$$

Exercice 1002
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}.$$

Exercice 1003
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Exercice 1004

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 - bc \\ 1 & b & b^2 - ca \\ 1 & c & c^2 - ab \end{vmatrix}.$$

Exercice 1005
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1006
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1007
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1008
Soit $(a,b,c,x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{C}^9$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} b+c & y+z & \beta+\gamma \\ c+a & z+x & \gamma+\alpha \\ a+b & x+y & \alpha+\beta \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & x & \alpha \\ b & y & \beta \\ c & z & \gamma \end{vmatrix}.$$

Exercice 1009
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 1010
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta) \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta) \end{vmatrix}.$$

Exercice 1011
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}.$$

Exercice 1012
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1013
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (a+c)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1014
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1015
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1016
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ba & ca \\ ab & c^2+a^2 & cb \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 1017
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ba & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1018
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1019
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$D(t) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(t) & \sin(t) \\ 1 & \cos(t+\alpha) & \sin(t+\alpha) \\ 1 & \cos(t+\beta) & \sin(t+\beta) \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que la fonction D est constante sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $D(t)$.

Exercice 1020
X - ESPCI PC 2018. Mines-Ponts PSI 2017
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ vérifiant $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$.
Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \det(xA+yB) = 0.$$

2.2 Calcul de déterminants d'ordre 4

Exercice 1021
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & b+c+d \\ 1 & b & b^3 & a+c+d \\ 1 & c & c^4 & a+b+d \\ 1 & d & d^5 & a+b+c \end{vmatrix}.$$

Exercice 1022
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 1023
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & a & c \\ b & a & c & a \\ a & c & a & b \\ c & a & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 1024
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & a \\ b & a & a & c \\ c & a & a & b \\ a & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 1025
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 1026
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}.$$

Exercice 1027
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}.$$

Exercice 1028
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & -a \\ a & -b & b & a \\ b & a & a & -b \\ b & -a & a & b \end{vmatrix}.$$

Exercice 1029
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1030
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix}.$$

Exercice 1031
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}.$$

Exercice 1032
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.3 Calcul de déterminants d'ordre n

Exercice 1033
X - ESPCI PC 2008. Centrale PC 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\det\left((\sin(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$.

Exercice 1034
CCP MP 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Quel est le rang de A ?
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
3. On revient au cas général. On pose $B = 2A - \operatorname{tr}(A)I_n$.
   a) Calculer le déterminant de B.
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.

c) Calculer B^2. Déterminer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

Exercice 1035
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1036
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1037
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1038
IMT MP 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 4 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix} = (n+1)!.$$

Exercice 1039
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 9 & 7 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1040
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n+a \end{vmatrix}$$

Exercice 1041
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_n(x) = \det(A_n(x)).$$

Calculer $D_n(x)$.

Exercice 1042
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$. Calculer $\det\left((a_i + b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$.

Exercice 1043
IMT PC 2010
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant $D_n = \det\left(\left((-1)^{\max(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$.

Exercice 1044
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant $D_n = \det\left((|i-j|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$.

Exercice 1045
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Calculer $\det\left(\left(a^{|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$.

Exercice 1046
Mines-Ponts PC 2021
Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $D_n = \det\left((F_{|i-j|})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$.

Exercice 1047
Mines-Pont 2015
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Calculer le déterminant de A.
2. Si la matrice est inversible, déterminer son inverse.

Exercice 1048
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 1049
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1050

Soit $(a,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ y & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & z & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix}.$$

Exercice 1051

CCP PC 2010

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\alpha) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\alpha) \end{vmatrix}$$

Exercice 1052

Centrale PC 2008

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Calculer le déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_n = \begin{vmatrix} z + \frac{1}{z} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z + \frac{1}{z} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & z + \frac{1}{z} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z + \frac{1}{z} \end{vmatrix}.$$

Exercice 1053

CCINP PC 2021

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 1054

Mines-Ponts MP 2008

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 & \dots & 0 \\ -a & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & 0 & -a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 1055
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

Exercice 1056
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 1057
X - ESPCI PC 2008. Mines-Ponts PC 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(a_1,\dots,a_n,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 1058
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3+b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & a_n & \dots & a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 1059
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1060
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer le déterminer d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 1061

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(a_1,\dots,a_{n-1},b_1,\dots,b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-2}$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 1062

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 1063

Mines-Ponts PSI 2017

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \dfrac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \dfrac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Montrer que la fonction D_n est dérivable et calculer D_n'. En déduire la valeur de $D_n(x)$.

Exercice 1064

Mines-Ponts MP 2016

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 1065

X MP 2007. Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PSI 2014. Mines-Ponts PC 2013. Centrale PSI 2017. CCP PSI 2013

Pour $n \geqslant 2$, on pose $P_n(X) = X^n - X + 1$.

1. Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1,\dots,z_n$ dans $\mathbb{C}$.
2. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 1066

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer $\det(A)$ où :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Indication : considérer $A\Omega$ avec $\Omega = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$

Exercice 1067
X - ESPCI PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. On pose :

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad [a_1, \ldots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Montrer que $[a_1, \ldots, a_n] = \dfrac{D(a_1, \ldots, a_n)}{D(a_2, \ldots, a_n)}$.

Exercice 1068
Mines-Ponts PSI 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$.

Exercice 1069
IMT PC 2011
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$. Calculer $\det\left(I_n + X\,{}^{\mathrm{t}}Y\right)$.

Exercice 1070
Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts PSI 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} = (a'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $b_{i,j} = a_{i,j} - 1$.
Montrer que :

$$\det(B) = \left(1 - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j}\right) \det(A).$$

Exercice 1071
X MP 2016. Putnam 1994
Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}))^2$ tel que, pour tout $k \in [\![0;4]\!]$, $A + kB$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
Montrer que $A + 5B$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 1072
Mines-Ponts MP 2014. Mines-Ponts PSI 2014. Mines-Ponts PC 2016, Centrale PC 2005
1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(C + X) = \det(C) + \det(X).$$

   Montrer que $C = 0_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(A + X) = \det(B + X).$$

   Montrer que $A = B$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2, (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(A+X) = \det\left(B + {}^{\mathrm{t}}X\right).$$
Montrer que $A = B$.

Exercice 1073
Mines-Ponts PC 2016. TPE MP 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de colonne $C_1, \ldots, C_n$ et $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de colonne $C'_1, \ldots, C'_n$ avec, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $C'_k = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} C_i$.
Calculer $\det(A')$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 1074
X MP 2007. Mines-Ponts MP 2019. Mines-Ponts PC 2014. Navale MP 2013. Navale PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,H) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ avec $\mathrm{rg}(H) = 1$.
Montrer que :
$$\det(A+H)\det(A-H) \leqslant \det\left(A^2\right).$$

Exercice 1075
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On suppose que $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$ et que $AB - BA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que n est un multiple de 6.

Exercice 1076
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On suppose que $A^2 + B^2 = \pi(AB - BA)$ et que $AB - BA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A^2 + B^2$ n'est pas inversible.

Exercice 1077
Mines-Ponts PC 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det\left(A^2 + I_n\right) \geqslant 0$.

Exercice 1078
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On suppose que A et B commutent et que $p^2 - 4q \leqslant 0$.
Montrer que :
$$\det\left(A^2 + pAB + qB^2\right) \geqslant 0.$$

Exercice 1079
X MP 2015. Mines-Ponts MP 2014. Mines-Ponts PSI 2017.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.
1. Montrer que :
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0.$$
2. On suppose que A et B commutent.
   a) Montrer que :
   $$\det\left(A^2 + B^2\right) \geqslant 0.$$
   Montrer que le résultat est faux si A et B ne commutent pas.
   b) Montrer que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \det\left(A^{2p} + B^{2p}\right) \geqslant 0.$$
   c) On suppose que $\det(A+B) \geqslant 0$. Montrer que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \det\left(A^{2p+1} + B^{2p+1}\right) \geqslant 0.$$

Exercice 1080
Mines-Ponts MP 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))^2$. On suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux.
Montrer qu'il existe $(U,V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))^2$ tel que $AU + BV = I_n$.

Exercice 1081
Soit $n \geqslant 2$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On suppose que A, B et $A+B$ sont inversibles et que :

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}.$$

Montrer que $\det(A) = \det(B)$.

Exercice 1082
Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Montrer que l'application $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto \det(A) \in \mathbb{C}$ est surjective et non injective.

Exercice 1083
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I_n$.
Montrer que n est pair.

2.4 Déterminants par blocs

Exercice 1084
TPE PC 2016
Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1. Montrer que $P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$ s'écrit comme le produit de deux matrices, la seconde étant diagonale par blocs.
2. En déduire $\det(P)$.

Exercice 1085
X - ESPCI PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + AB)$$

Exercice 1086
X MP 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B,C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^3$.
Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & A+C-B \end{pmatrix} = \det(A+C)\det(A-B).$$

En déduire que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

Exercice 1087
X MP 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

Exercice 1088
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A + \mathrm{i}B)\det(A - \mathrm{i}B).$$

2. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Exercice 1089
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & \mathrm{i}B \\ \mathrm{i}B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \det \begin{pmatrix} A & \mathrm{i}B \\ -\mathrm{i}B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1090
Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det \left(D - CA^{-1}B\right).$$

Exercice 1091
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\det \left(\lambda I_{2n} - \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & -B \end{pmatrix}\right) = \det \left(\lambda^2 I_n + \lambda B + A\right).$$

Exercice 1092
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice carrée complexe inversible avec A et D elles aussi inversibles. On écrit $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ avec le même découpage.
1. Trouver une relation entre $\det(M)$, $\det(D)$ et $\det(A')$.
2. En déduire que :

$$\det(A)\det(A') = \det(D)\det(D').$$

Exercice 1093
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B,C,D) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^4$ tel que $C{}^{\mathrm{t}}D + D{}^{\mathrm{t}}C = 0_n$.
1. On suppose que $D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left(A{}^{\mathrm{t}}D + B{}^{\mathrm{t}}C\right).$$

Montrer que, si D n'est pas inversible, alors cette égalité peut ne pas être vérifiée .
2. Montrer que :

$$\left(\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)^2 = \left(\det \left(A{}^{\mathrm{t}}D + b{}^{\mathrm{t}}C\right)\right)^2.$$

2.5 Divers

Exercice 1094
IMT PSI 2009
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
Montrer que n est pair.

Exercice 1095
X - ESPCI PC 2016
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $m \neq n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
Montrer que $\det(AB) = 0$ ou $\det(BA) = 0$.

Chapitre XII

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1 Valeurs propres et vecteurs propres. Polynôme caractéristique

Exercice 1096
Mines-Ponts PC 2016
Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, soit $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $M(\alpha)$ possède une valeur propre de module 1.

Exercice 1097
Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Montrer que ${}^{\mathrm{t}}MM$ et $M{}^{\mathrm{t}}M$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
Donner un exemple où elles n'ont pas les mêmes valeurs propres.

Exercice 1098
Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de A sont de module 1 et que $\det(A) = 1$.
Montrer que 1 est valeur propre de A.

Exercice 1099
X ESPCI PC 2008
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices A et ${}^{\mathrm{t}}A$ ont-elles le même spectre ? Ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

Exercice 1100
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)$.

Exercice 1101
CCP PSI 2013
Soit $A \in \mathcal{GL}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 6$.
Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

Exercice 1102
Mines-Ponts MP 2016. CCP PC 2011
Soit $A \in \mathcal{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 8$.
Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

Exercice 1103
On admet que $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{Q})$ telle que $A^5 = I_2$ et $A^4 \neq I_2$.

Exercice 1104
ENS MP 2018
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On suppose que les valeurs propres de A et B appartiennent toutes à $\mathbb{R}_+^*$.
La matrice $A+B$ peut-elle avoir une valeur propre dans $\mathbb{R}_-^*$?

Exercice 1105
Mines-Ponts PC 2018

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1106
Mines-Ponts MP 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(a_1,\dots,a_n,z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{2n}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a_1+z_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+z_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3+z_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & a_n & \dots & a_n & a_n+z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Calculer le déterminant de M.
2. Montrer que le spectre de M est inclus dans la réunion des boules fermées de centre z_k et de rayon $n|a_k|$.

Exercice 1107
Mines-Ponts PC 2008
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 1108
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.

Exercice 1109
CCP PC 2011
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0) \neq 0$.
Montrer que A est inversible et exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Exercice 1110
ESCP Question courte 2006
Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

Exercice 1111
IMT PSI 2019
Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $e_1 = \cos$, $e_2 = \sin$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Pour $f \in E$, on note T_f la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad T_f(t) = (10f(0) - 6f'(0))e_1(t) + (12f(0) - 7f'(0))e_2(t).$$

Enfin, on considère l'application φ définie sur E par $\varphi(f) = T_f$.
1. Montrer que e_1 et e_2 sont linéairement indépendants.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
3. Montrer que $\psi = \varphi_{|F}$ est un endomorphisme de F.
4. Donner les valeurs propres de ψ.

Exercice 1112
Centrale PC 2005
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = XP' + P(1).$$

Exercice 1113
Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto (2X+1)P - \left(X^2-1\right)P'$.
1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 1114
Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \left(X^3+X\right)P' - \left(3X^2-1\right)P$.
1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 1115
CCP PSI 2014
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$ {}^{\mathrm{t}}XA^{-1}X = \frac{\det\left(A + {}^{\mathrm{t}}XX\right)}{\det(A)} - 1.$$

Exercice 1116
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que T^2 soit triangulaire supérieure de coefficients diagonaux deux à deux distincts. Montrer que T est triangulaire supérieure.

Exercice 1117
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Montrer que :

$$\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing.$$

Exercice 1118
Mines-Ponts MP 2019
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall (A,t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+, \quad \det\left(A^2 + tI_n\right) \geqslant 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1119
X MP 2018. Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PSI 2017. Mines-Ponts PC 2015. Centrale PSI 2017. Centrale PC 2005. CCP PSI 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $AB - BA = A$.
1. Calculer $\mathrm{tr}(A)$.
2. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^kB - BA^k = kA^k.$$

4. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 1120
X MP 2014. Mines-Ponts PC 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On suppose que $AB^2 - B^2A = B$.
Montrer que B est nilpotente d'ordre impair.

2 Diagonalisation

2.1 Diagonalisation des endomorphismes

Exercice 1121
IMT PC 2019
On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto \mathrm{i}z + (1-\mathrm{i})\overline{z}$.
1. Quelle est la base canonique de $\mathbb{C}$?
2. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique.
3. L'application f est-elle diagonalisable ?

Exercice 1122
CCP PC 2011
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f^2 est un projecteur.
1. Montrer que $\mathrm{sp}(f) \subset \{-1,0,1\}$.
2. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $f^3 = f$.

Exercice 1123
Mines-Ponts PC 2005. CCP PSI 2010
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $(f,u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2$. On suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que, pour tout $k \in \{1,2,3\}$, $f^k = a^k u + b^k v$.
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1124
IMT PC 2006
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1125
Mines-Ponts MP 2016
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1126
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{GL}(E)$. On suppose que f^2 est diagonalisable.
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1127
Mines-Ponts MP 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f^2 est diagonalisable.
Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

Exercice 1128
IMT PSI 2016
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et s une symétrie vectorielle. On pose, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(u) = \dfrac{1}{2}(s \circ u + u \circ s)$.
1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Calculer φ^3 et en déduire un polynôme annulateur de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 1129
CCP PC 2018
Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On pose $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM - MA$.
Déterminer les éléments propres de φ_A.

Exercice 1130
Soit φ l'application définie par :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments propres de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

Exercice 1131
CCP PSI 2017
Soit φ l'application définie par :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments propres de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

Exercice 1132
Mines-Ponts PC 2008
Soit φ l'application définie par :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = \begin{pmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{pmatrix}.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 1133
Mines-Ponts PC 2008
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui, à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$, associe M' de colonnes $(C'_1, \ldots, C'_n)$ où, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $C'_k = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} C_i$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 1134
Mines-Ponts PC 2019. CCP PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M + {}^{\mathrm{t}}M$.
1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 1135
Mines-Ponts MP 2014, Mines-Ponts PC 2017
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \alpha M + \beta {}^{\mathrm{t}}M$.
1. Montrer que φ est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.
3. Calculer $\det(\varphi)$ et $\mathrm{tr}(\varphi)$.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit inversible auquel cas déterminer son inverse.

Exercice 1136
CCP PSI 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, et $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{tr}(AM)I_n$.
1. Exprimer φ_A^2 en fonction de φ_A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ_A soit diagonalisable, auquel cas déterminer ses éléments propres.

Exercice 1137
Centrale PC 2017. IMT PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto M - \mathrm{tr}(M) I_n$.
1. Déterminer les éléments propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
2. Déterminer sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique.

Exercice 1138
Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PC 2019. IMT PSI 2017. CCP PSI 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto M + \mathrm{tr}(M) I_n$.
1. Montrer que φ est un endomorphisme. Déterminer son rang.
2. Déterminer un polynôme annulateur de φ.
3. Déterminer l'inverse éventuel de φ.
4. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 1139
CCINP PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M + \mathrm{tr}(M) A$.
1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(A)$ puis que φ est bijective si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \neq -1$.
2. Déterminer les valeurs propres de φ.

Exercice 1140
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2021. Mines-Ponts PC 2021. CCINP MP 2021. CCP PSI 2017. CCP PC 2009
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. On pose $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.
1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.
3. Montrer que φ_A est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Exercice 1141
Centrale PC 2005. IMT MP 2013. IMT PSI 2017.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$.
1. Déterminer le noyau et l'image de φ_A.
2. L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable?

Exercice 1142
CCP PC 2010
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = P(-4)X + P(6).$$

Déterminer le noyau, l'image et les éléments propres de φ.

Exercice 1143
Mines-Ponts PC 2021. IMT MP 2018
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \left(X^2 - X\right) P(1) + \left(X^2 + X\right) P(-1)$.
1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 1144
CCINP PC 2021
Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 2, \quad P_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n'(X) = P_{n-1}(X-1)$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Φ_n l'application $Q \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \Phi_n(Q)(X) = Q(X) - Q'(X+1)$.
   a) Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Exprimer, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\Phi_n(P_k)$ dans la base $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.
   b) Montrer que Φ_n a une unique valeur propre et déterminer l'espace propre associé.
   L'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?
4. Montrer que Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Calculer $\Phi_n^{-1}(P_k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

Exercice 1145
Mines-Ponts PSI 2015
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P(a-X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
1. L'endomorphisme Φ est-il injectif ? Bijectif ?
2. Déterminer les valeurs propres de Φ et une base de vecteurs propres.

Exercice 1146
Mines-Ponts PC 2017. IMT PC 2018
Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \left(X^2-1\right)P' - nXP$.
1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 1147
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ défini par :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 1148
X-ESPCI PC 2019. Centrale PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable.
Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\left(a,f(a),\dots,f^{n-1}(a)\right)$ soit une base de E si, et seulement si, f possède n valeurs propres distinctes.

2.2 Diagonalisation des matrices carrées

Exercice 1149
Mines-Ponts MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Déterminer le rang, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A.
Diagonaliser A.

Exercice 1150
IMT PC 2009
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle. On suppose que $X(X+2)$ est un polynôme annulateur de A.
Montrer que -2 est valeur propre de A.

Exercice 1151
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que -1 et 1 sont des valeurs propres de A et que $A^4 = A^2$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 1152
Centrale PSI 2005
Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Exercice 1153
X - ESPCI PC 2019
Pour tout $q \in \mathbb{R}^*$, on pose $A(q) = \begin{pmatrix} q & q(q+1) \\ q(q-1) & -q \end{pmatrix}$.

1. Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}^*)^2$ avec $p \neq q$. Les matrices $A(q)$ et $A(p)$ sont-elles semblables?
2. Même question pour les matrices $A'(q) = q^{-2}A(q)$.
3. On considère les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = (A(q))^2$.
   Combien parmi celles-ci ne sont pas semblables à $A(q)$?

Exercice 1154
ENSEA/ENSEIIE PSI 2021
Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
La matrice A_m est-elle diagonalisable?

Exercice 1155
Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PC 2016
Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 1156
IMT MP 2017
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1157
IMT PC 2018
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 1158
CCP PC 2010
Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1159
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PC 2016
Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1160
Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1161
CCP PC 2009
Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -8 & -11 & -4 \\ 12 & 18 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\det(A - XI_3) = (1 - X)^3$.
   La matrice A est-elle diagonalisable?
2. Montrer que $A = I_3 + N$ avec $N^2 = 0_2$.
3. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{n}A^n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1162
Centrale PC 2005
Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ et $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $M = \alpha I_3 + cJ + bJ^2$.
3. Déterminer les éléments propres de M.

Exercice 1163
CCP PSI 2016
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
1. Diagonaliser A.
2. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. La matrice $\alpha A + \beta I_3$ est-elle diagonalisable?

Exercice 1164
IMT PC 2018
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
1. Calculer A^2. La matrice A est-elle inversible?
2. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M(a,b) = aI_3 + bA$.
   Montrer que $M(a,b)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 1165
IMT PC 2019
Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on pose $M(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.
1. Montrer que les matrices $M(a,b,c)$ commutent entre elles.
2. Montrer que J est diagonalisable. Préciser ses éléments propres.
3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

Exercice 1166
IMT PC 2021
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix}$.
1. La matrice A est-elle diagonalisable?
2. Déterminer ses sous-espaces propres

Exercice 1167
Mines-Ponts PSI 2016

Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. Étudier la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \dfrac{1}{a} & 0 & c \\ \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1168
IMT PSI 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$.
1. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. A est-elle diagonalisable?

Exercice 1169
TPE PSI 2015
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B,C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$. On suppose que $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$ et $C^3 = 5A + 6B$.
Montrer que A, B et C sont diagonalisables.

Exercice 1170
TPE PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, non nulles. On pose $A = I_n + CL$.
1. Montrer que:

$$A^2 = (2 + LC)A - (1 + LC)I_n.$$

2. La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 1171
CCP PC 2018
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{4} & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}$
1. Diagonaliser A.
2. En déduire l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = MA\}$.

Exercice 1172
Centrale PC 2005
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1173
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + v_n - w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 1174
Mines-Ponts PC 2017
1. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n - 5w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice 1175
Mines-Ponts PC 2019
Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.
1. Diagonaliser A.
   En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $(u_0,v_0,w_0) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de A, X_0 et n.
3. En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0 et n.

Exercice 1176
ENSEA PC 2016
Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 1177
CCINP PC 2019
Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $M_a = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer le rang de M_a.
2. La matrice M_a est-elle diagonalisable ?
   Déterminer les éléments propres de M_a.
3. Calculer M_a^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1178
Centrale PSI 2019
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f + \mathrm{Id}_E = 0$.
1. Soit $a \in E$, non nul. Montrer que $(a,f(a))$ est une famille libre.
2. Soit $(a,b) \in E^2$ tel que $(a,b,f(a))$ est une famille libre.
   Montrer que $(a,b,f(a),f(b))$ est une famille libre.
3. On suppose que $\dim(E) = 4$.
   Montrer qu'il existe une base (e_1,e_2,e_3,e_4) de E telle que $e_3 = f(e_1)$ et $e_4 = f(e_2)$.
   Donner la matrice de f dans cette base.
   Est-elle diagonalisable ?

Exercice 1179
CCINP PC 2021
Soit $M = (m_{p,q})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$ et $B = (b_{p,q})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q \\ \mathrm{i} & \text{si } p > q \\ -\mathrm{i} & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2, \quad b_{p,q} = 1.$$

1. a) Soit $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$. Que vaut α^n ?
   b) Résoudre l'équation $z^n = -1$ dans $\mathbb{C}$.
2. a) Montrer que $(X - \mathrm{i}, X + \mathrm{i})$ est base de $\mathbb{C}_1[X]$.

b) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $A(\lambda) = \lambda I_n - M$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \det(A(\lambda) + zB)$.
Justifier qu il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z + \mathrm{i}) + b(z - \mathrm{i})$.

c) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \dfrac{(\lambda + \mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}}(z + i) - \dfrac{(\lambda - \mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}}(z - \mathrm{i})$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M.
Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,\pi[$ tel que $\lambda = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ et l'expliciter.
4. La matrice M est-elle diagonalisable?

Exercice 1180
CCINP PC 2019
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f l'endomorphisme de E tel que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k) = \sum\limits_{i \neq k} e_i$.

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 1181
Mines-Ponts MP 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (\delta_{i,n+1-j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $A_n = \begin{pmatrix} I_n & J_n \\ J_n & I_n \end{pmatrix}$.
Diagonaliser A_n.

Exercice 1182
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a & b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & b & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser A_n.

Exercice 1183
CCINP MP 2021. CCP PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 1184
X MP 2007. X-ESPCI PC 2008 Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PC 2016. CCINP PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 1185
IMT MP 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée de 1 sur la première ligne, la première colonne et la diagonale, les autres coefficients étant nuls :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Déterminer les autres sous-espaces propres.

Exercice 1186
IMT PSI 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne, la première et la dernière lignes sont constituées de 1 et le reste de 0.
1. Déterminer le rang de A puis le noyau et l'image de A. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres ?
2. Calculer A^2. Montrer que, si λ est valeur propre de A, alors λ^2 est valeur propre de A^2.
3. En déduire les valeurs propres de A.

Exercice 1187
Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PC 2016. IMT PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 1188
CCINP MP 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les termes diagonaux (respectivement non diagonaux) sont égaux à a (resp. à b).
1. Calculer le polynôme caractéristique de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Calculer le polynôme minimal de M.
4. Calculer le déterminant de $I_n + M$.

Exercice 1189
Mines-Ponts PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$.

Exercice 1190
X MP 2020
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 1191
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $(a_2,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \backslash \{(0,\dots,0)\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de f et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a_2,\dots,a_n)$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

Exercice 1192
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer $\det(A)$ où :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Indication : considérer la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Exercice 1193
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable et $\mathrm{tr}(A)$ est non nulle.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 1194
Mines-Ponts PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Existe-t-il $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $(AB - BA)^2 = AB - BA$ et $AB - BA \neq 0_n$?

Exercice 1195
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $A - I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
1. Déterminer $\mathrm{sp}(A)$.
2. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 1196
X ESPCI PC 2011
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = a^{i-j}$.
1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les sous-espaces propres de M.

Exercice 1197
TPE PSI 2009. CCP PSI 2007
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \dfrac{a_i}{a_j}$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 1198
IMT PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $\mathrm{tr}(A) = n$.
Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que $A = I_n$.

Exercice 1199
TPE MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = A$ et $\operatorname{tr}(A) = n$.

Exercice 1200
CCP PSI 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_n = 0_n$.
1. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $\operatorname{tr}(A) \leqslant 0$.

Exercice 1201
CCP PC 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 2A^2 + A = 0_n$ et $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 1202
CCP PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 4A^2 - 4A = 0_n$ et $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 1203
Mines-Ponts PSI 2016. Mines-Ponts PC 2008. IMT PSI 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 = A^2$ et $\operatorname{tr}(A) = n$.

Exercice 1204
CCP PSI 2014
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 2A^2 - 3A$.
Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 1205
IMT MP 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -2A$.
Montrer que A est de rang pair.

Exercice 1206
Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$.
Montrer que A est de rang pair.

Exercice 1207
Mines-Ponts PC 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$.
Montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 1208
X - ESPCI PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.
Monter que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 1209
X - ESPCI PC 2017. Mines-Ponts PC 2017. IMT PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.
Déterminer $\operatorname{tr}(A)$ et $\det(A)$.

Exercice 1210
TPE MP 2005
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 4A$.
Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ est paire.

Exercice 1211
CCINP PC 2019
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 = 0_n$.
Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ est paire.

Exercice 1212
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0_n$.
Montrer que l'entier n est pair et que $-\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 1213
TPE MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0_n$.
Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.

Exercice 1214
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2019. TPE PSI 2016. CCP MP 2015. CCP PSI 2009. ENSEA PC 2011
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.
Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puis que $\det(A) > 0$.

Exercice 1215
CCP MP 2017
Soit $P = X^5 + X + 1$.
1. Montrer que P admet une unique réelle et que celle-ci est strictement négative.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A + I_{15} = 0_{15}$.
   Montrer que $\det(A) < 0$.

Exercice 1216
X - ESPCI PC 2013. Mines-Ponts PSI 2005. Mines-Ponts PC 2021. Centrale PC 2014. CCP MP 2014
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
1. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.
2. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A^2 \neq 0_n$.

Exercice 1217
Mines-Ponts PC 2016. CCP PSI 2007
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $A^n \neq 0_n$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 1218
IMT MP 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^2 - 2A$ est diagonalisable et que 1 n'est pas valeur propre de A.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 1219
Mines-Ponts PSI 2021. Mines-Ponts PC 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable, et $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer que A est un polynôme en B.
Qu'en est-il si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 1220
X MP 2007. Mines-Ponts MP 2021
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = I_2$.
Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 1221
Centrale PSI 2021. IMT PC 2021
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^{\mathrm{t}}M = I_n$.
Montrer que M est diagonalisable et symétrique.

Exercice 1222
Mines-Ponts PC 2019

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \varnothing$.
   Montrer que, pour toute $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices $\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 1223
Centrale PC 2009
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ?

Exercice 1224
X MP 2015. X - ESPCI PC 2014. Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2016. TPE MP 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1225
Mines-Ponts MP 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 1226
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

3 Trigonalisation

Exercice 1227
X - ESPCI PC 2011

1. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   La matrice $A + B$ est-elle nilpotente ?
2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que que A, B et $A + B$ sont nilpotentes.
   Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = 0$.

Exercice 1228
CCP PC 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M^2 + M = 0_n$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 1229
X ESPCI PC 2011
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisables, telles que $M = A + B$.

Exercice 1230
CCP PC 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 2A^3 - 2A^2$.
Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier naturel pair.

Exercice 1231
CCP MP 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres de A

   a) en se ramenant à la définition de valeur propre et de vecteur propre;
   b) en utilisant le polynôme caractéristique;
   c) en utilisant le polynôme minimal.
2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$? Si tel est le cas, déterminer une matrice de passage $P \in \mathcal{GL}_{2n}(\mathbb{C})$.

Exercice 1232
Mines-Ponts PC 2017
Réduire $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1233
X - ESPCI PC 2011
Comparer $\mathcal{N} = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, A^2 = 0_n\right\}$ et $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

Exercice 1234
Mines-Ponts PC 2016
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A et ${}^{\mathrm{t}}A$ sont semblables.

Exercice 1235
X-ESPCI PC 2018. Mines-Ponts PSI 2016
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 1236
X - ESPCI PC 2014. Mines-Ponts MP 2021
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

Exercice 1237
Mines-Ponts MP 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$.

Exercice 1238
X - ESPCI PC 2008. Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2017. Mines-Ponts PC 2021
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On suppose que $AB - BA = A$.
   Montrer que A est nilpotente.

Exercice 1239
Mines-Ponts PC 2021
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On suppose que $AB = 0_n$.
1. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
2. En déduire que A et B sont trigonalisables dans une même base.

4 Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Exercice 1240
X ESPCI PC 2011
1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0_n$?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0_n$?

Exercice 1241
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que, si AB est une combinaison linéaire de A, B et I_2, alors il en est de même de BA.

Exercice 1242
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $U = \mathrm{PGCD}(A,B)$ et $V = \mathrm{PPCM}(A,B)$.
Exprimer $\mathrm{Ker}(U(f))$, $\mathrm{Im}(U(f))$, $\mathrm{Ker}(V(f))$ et $\mathrm{Im}(V(f))$ à l'aide de $\mathrm{Ker}(A(f))$, $\mathrm{Im}(A(f))$, $\mathrm{Ker}(B(f))$ et $\mathrm{Im}(B(f))$.

Exercice 1243
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \varnothing$.
1. Montrer que $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = XB$ si, et seulement si, $X = 0_n$.
3. Montrer que, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unique, telle que $AX - XB = M$.

Exercice 1244
X MP 2016. Mines-Ponts MP 2008. CCP MP 2013. CCP PSI 2018. ENTPE - EIVP MP 2015
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ avec $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 1245
X - ESPCI PC 2014
Soit $(a,b) \in]0;1[^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.
Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1246
TPE PSI 2016
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est combinaison linéaire de A et A^2, puis déterminer A^n.

Exercice 1247
X - ESPCI PC 2014. Mines-Ponts PSI 2014
Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1248
Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Montrer que l'équation
$$X^p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 1249
TPE PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A^{-1} \in \mathrm{Vect}\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right)$.

Exercice 1250
CCP MP 2021
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^n = I_n$ et la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right)$ est libre.
Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 1251
Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PSI 2014
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que :
$$f \in \mathrm{Vect}\left(\left\{f^k \,/\, k \geqslant 2\right\}\right) \iff E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 1252
X MP 2020
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u,v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $u^2 = v^2 = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(u \circ v - v \circ u) = \mathrm{Ker}(u + v) \oplus \mathrm{Ker}(u - v).$$

Chapitre XIII

Espaces préhilbertiens réels

1 Produit scalaire. Norme

Exercice 1253
X PC 2020
Soit E un espace euclidien, x et y deux vecteurs non nuls de E.
Montrer que :
$$\|x-y\| \geqslant \frac{1}{2}\max(\|x\|,\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$

Exercice 1254
CCP PC 2018
Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, on pose $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.
1. Montrer que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 1255
CCINP PC 2021
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :
$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$
1. Calculer la norme de $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle T,P\rangle = P(0)$.

Exercice 1256
Mines-Ponts PC 2016
Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{tr}\left(A\,{}^{\mathrm{t}}\!A + {}^{\mathrm{t}}\!BB - 2AB\right) = 0$.
Montrer que $A = {}^{\mathrm{t}}\!B$.

Exercice 1257
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose :
$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2, \quad \langle M,N\rangle = \mathrm{tr}\left({}^{\mathrm{t}}\!MN\right).$$
1. Calculer $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \det(M) \leqslant \lambda\langle M,M\rangle\}$.
2. Calculer $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), (\mathrm{tr}(M))^2 \leqslant \lambda\langle M,M\rangle\}$.

Exercice 1258
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que :

$$(\operatorname{tr}(AB+BA))^2 \leqslant 4\operatorname{tr}\left(A^2\right)\operatorname{tr}\left(B^2\right).$$

Exercice 1259
CCINP PC 2021
Soit E un espace euclidien et $(a,b) \in E^2$. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = x - \langle a,x\rangle b$.
1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que f est bijectif si, et seulement si, $\langle a,b\rangle \neq 1$.

Exercice 1260
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_n$.
1. Montrer que $\operatorname{Ker}\left(A + {}^{\mathrm{t}}A\right) = \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Ker}\left({}^{\mathrm{t}}A\right)$.
2. Montrer que $A + {}^{\mathrm{t}}A$ est inversible si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Im}(A)$.

Exercice 1261
TPE MP 2014
Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.
Montrer que $\operatorname{Ker}(f + f^*) = \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(f^*)$.

Exercice 1262
ENS PC 2017. TPE PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A - I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles.

Exercice 1263
X PC 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B,C,D) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^4$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $J = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que ${}^{\mathrm{t}}MJM = J$.
Montrer que A et D appartiennent à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1264
X - ESPCI PC 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}$.
Montrer que les valeurs propres de A sont réelles.

Exercice 1265
ESCP Question courte 2009
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j, \quad \|e_i - e_j\| = 1.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 1266
Soit E un espace euclidien, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j, \quad \|x_i - x_j\| \geqslant 2.$$

Montrer que, si B est une boule fermée de rayon R contenant $x_1, \ldots, x_n$, alors $R \geqslant \sqrt{2\dfrac{n-1}{n}}$.

2 Orthogonalité. Projecteurs orthogonaux

Exercice 1267
X - ESPCI PC 2021. Mines-Ponts MP 2021. TPE PC 2019
Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1,\ldots,e_n) \in E^n$ tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \|e_k\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} \langle x,e_k\rangle^2 = \|x\|^2.$$

Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 1268
Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Montrer que $F^\perp$ et $G^\perp$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 1269
Mines-Ponts PSI 2017
Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si, et seulement si, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = (d(x,F))^2 + (d(x,G))^2.$$

Exercice 1270
X - ENS PSI 2016. Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2017
Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle.$$

1. Montrer que l'image d'une base orthonormée de E par f est une base orthonormée.
2. Montrer que l'application f est linéaire.

Exercice 1271
CCP PC 2016
Soit $(E,\langle\,,\rangle$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle f(x),x\rangle = 0$.
1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle f(y),x\rangle = -\langle f(x),y\rangle$.
2. Comparer $\operatorname{Ker}(f)$ et l'orthogonal de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 1272
Navale PSI 2017
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x),x\rangle = 0.$$

Montrer que $E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u)$.

Exercice 1273
TPE PC 2016
Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien, r et p deux projecteurs orthogonaux de E.
Soit λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ associée au vecteur propre u.
1. Montrer que u est dans $\operatorname{Im}(p)$ et que $r(u) - \lambda u$ est dans $(\operatorname{Im}(p))^\perp$.
2. Montrer que $\lambda\|u\|^2 = \|r(u)\|^2$.
3. Montrer que $\lambda \in [0;1]$.

Exercice 1274
Mines-Ponts PSI 2019. CCP PSI 2017
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.

Exercice 1275
TPE PC 2018
On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \quad \langle A,B \rangle = \operatorname{tr}\left({}^{\mathrm{t}}AB\right).$$

Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 1276
Mines-Ponts PC 2021
Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'application :
$$\varphi : (A,B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2 \longmapsto \operatorname{tr}\left({}^{\mathrm{t}}AB\right)$$
définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la distance de X à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 1277
CCP PSI 2018

1. Montrer que $\langle P,Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $X^2 + X + 1$ sur $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P'(0) = 0\}$.

Exercice 1278
CCP PSI 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \quad \langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

où $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$.
Déterminer la projection orthogonale de 1 sur $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, P(1) = 0\}$.

Exercice 1279
Mines-Ponts PSI 2016. Mines-Ponts PC 2019. CCP MP 2015
Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\Phi : (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2 \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a_0, \ldots, a_n$ pour que Φ soit un produit scalaire.
2. La condition précédente étant satisfaite, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer la distance de Q à $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.

Exercice 1280
IMT PC 2018
Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on pose $\langle A,B \rangle = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$.
Cette application définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la distance de M à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1281
IMT PC 2018
Soit $E = \mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R})$. Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.
On définit $F = \{f \in E \,/\, f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \,/\, f'' = f\}$.
1. Montrer que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Donner une base orthonormée de G.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux.
4. Donner l'expression de la projection orthogonale sur G.

Exercice 1282
TPE PC 2019. EIVP PC 2017
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 1283
X MP 2018
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 1284
Mines-Ponts PC 2018
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(\sqrt{t} - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 1285
Mines-Ponts PC 2021. CCP PSI 2014
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 1286
Mines-Ponts MP 2017
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \left(t^4 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 1287
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t\ln(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 1288
CCINP PC 2019
Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$. Soit $h : x \in [0;1] \longmapsto x\ln(x)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n : x \in [0;1] \longmapsto x^n$. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_{a,b} : x \in [0;1] \longmapsto x^2(\ln(x) - a - bx)^2$.
Soit enfin $F = \mathrm{Vect}(P_1,P_2)$. On munit F du produit scalaire défini par :

$$\forall (f,g) \in E^2 \quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f_{a,b} \in E$.
2. Montrer que $h \in E$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\langle h,P_n\rangle$.
3. Calculer $\langle P_1,P_2\rangle$, $\|P_1\|$ et $\|P_2\|$.
4. Trouver $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q_1 = \lambda P_1$ et $Q_2 = \dfrac{P_2 - \mu P_1}{\|P_2 - \mu P_1\|}$ forment une base orthonormée de F.
   Donner l'expression de la projection orthogonale de h sur F en fonction de Q_1 et Q_2. On notera g ce projeté.

5. On propose une autre methode pour déterminer g.
   Chercher $g = aP_1 + bP_2$ tel que $\displaystyle\int_0^1 x(h-g)(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 x^2(h-g)(x)\mathrm{d}x$.
6. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln(x) - a - bx)^2\mathrm{d}x$.

Exercice 1289
Mines-Ponts PC 2017
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2(\ln(t) - at - b)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 1290
CCP PSI 2005
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\ln(t) - at - b)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 1291
CCINP PSI 2019
Siot $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Pour tout $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)t^2\mathrm{d}t$.
1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n\ln(t)\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $F = \left\{x \longmapsto ax + b \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x\ln(x)$ pour tout $x \in]0;1]$.
   Déterminer le projeté orthogonal de u sur F.
4. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t\ln(t))^2t^2\mathrm{d}t$.

Exercice 1292
Mines-Ponts PC 2016. CCP PSI 2016
Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
1. Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 1293
Mines-Ponts PSI 2018
Soit $f : (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(1 + x_1t + \cdots + x_nt^n\right)^2\mathrm{d}t$.
Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$ et le déterminer.

Exercice 1294
Mines-Ponts MP 2019. Mines-Ponts PC 2017. IMT PSI 2018. TPE PSI 2017.
Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel de norme $\|\cdot\|$.
1. Soit p un projecteur de E.
   Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, on a :
   $$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$
2. Soit p et q deux projecteurs orthogonaux de E.
   a) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p$.
   b) Montrer que $\mathrm{sp}(p \circ q) \subset [0;1]$.
   c) On suppose que E est un espace euclidien de dimension n.
      Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
   d) Montrer que le résultat précédent n'est plus vrai si p et q ne sont pas orthogonaux.

3 Automorphismes orthogonaux. Matrices orthogonales

Exercice 1295
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}AA = A{}^{\mathrm{t}}A$.
Montrer que ${}^{\mathrm{t}}A^{-1}A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1296
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 1297
Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts PC 2019. IMT MP 2013. CCP PSI 2005. CCP PC 2014
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left| \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n.$$

Exercice 1298
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{p+q}(\mathbb{R})$.
Montrer que $(\det(A))^2 = (\det(D))^2$.

Exercice 1299
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \langle A,B \rangle = \mathrm{tr}\left({}^{\mathrm{t}}AB\right).$$

1. Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel F des matrices de trace nulle.
2. Donner la décomposition d'une matrice M sur $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

Exercice 1300
Mines-Ponts PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in]0;1[$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur (A,B) pour que $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1301
CCINP PC 2019
Soit $(E,\langle\,,\rangle)$ un espace euclidien et g un automorphisme orthogonal de E. On pose $f = g - \mathrm{Id}_E$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Montrer que y est dans l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire que $(\mathrm{Im}(f))^{\perp} = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 1302
CCP PC 2016
On considère une matrice A antisymétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère les matrices $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^{\mathrm{t}}\left({}^{\mathrm{t}}XAX\right)$ et en déduire que ${}^{\mathrm{t}}XAX = 0$.
2. Montrer que si A possède une valeur propre réelle, alors celle-ci est égale à 0. En déduire que M et N sont inversible.
3. Montrer que M et N commutent, que M et N^{-1} commutent.
   On pose $W = MN^{-1}$. Montrer que W est une matrice orthogonale et que -1 n'est pas valeur propre de W.
4. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont -1 n'est pas valeur propre.
   Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $U = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

Exercice 1303
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
   En considérant ${}^t\overline{X}AX$ où X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, montrer que $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
2. Pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.
   Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \,/\, -1 \notin \mathrm{sp}(\Omega)\}$.

4 Endomorphismes symétriques. Matrices symétriques

Exercice 1304
Mines-Ponts PSI 2017. Mines-Ponts PC 2017
Déterminer les matrices réelles antisymétriques et nilpotentes.

Exercice 1305
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux d'indices $(i,n+1-i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$, qui sont égaux à 1.
On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} J_n & I_n \\ I_n & J_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Justifier que la matrice A_n est diagonalisable.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A_n.

Exercice 1306
CCP PSI 2018

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1 et $A_{n+1} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & J_n & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A_{n+1} est diagonalisable.
2. Diagonaliser J_n.
3. Décrire les vecteurs du noyau de A_{n+1} en fonction de ceux du noyau de J_n.
4. Diagonaliser A_{n+1}.

Exercice 1307
CCINP PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = 1$, les autres coefficients étant nuls.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant n - 1$.
2. En déduire que A possède n valeurs propres distinctes.

Exercice 1308
Mines-Ponts MP 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_{n-1}) \in (\mathbb{R}^*)^{n-1}$.

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ possède n valeurs propres distinctes.

Exercice 1309
ENSEA PSI 2009
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0_n$.

Exercice 1310
X - ESPCI PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, semblable à son inverse. Montrer que $\operatorname{tr}\left(A^2\right) \geqslant n$.

Exercice 1311
ESCP Question courte 2005
Soit A et B deux matrices symétriques réelles telles que

$$A^2 + B^2 = A + B = 2I_n.$$

Que peut-on dire de A et B ?

Exercice 1312
Mines-Ponts PC 2005
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{sp}\left(A{}^{\mathrm{t}}A - {}^{\mathrm{t}}AA\right) \subset \mathbb{R}_+$.
Montrer que $A{}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AA$.

Exercice 1313
TPE PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (éventuellement répétées).
Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Exercice 1314
X - ESPCI PC 2016
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E de spectre ordonné $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.
Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x \rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 1315
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(\operatorname{tr}(A))^2 \leqslant \operatorname{rg}(A) \operatorname{tr}\left(A^2\right).$$

Exercice 1316
X MP 2018. X - ESPCI PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A{}^{\mathrm{t}}A$ et ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont semblables.

Exercice 1317
Mines-Ponts PC 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = I_n$.

Exercice 1318
CCP PSI 2006
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P\left(A^3\right)$.

Exercice 1319
Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2019. CCP PSI 2018. TPE MP 2005. CCINP PC 2021
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A{}^{\mathrm{t}}AA = I_n$.
1. Montrer que A est symétrique.
2. Déterminer toutes les matrices A solutions.

Exercice 1320
CCP PC 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A + {}^{\mathrm{t}}A$ est nilpotente.
Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 1321
CCINP PC 2019
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$. On suppose que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,1} + \ldots + a_{i,n} = 1.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}\left({}^{\mathrm{t}}(1, \ldots, 1)\right)$.
2. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \|X\|$ où $\left\|{}^{\mathrm{t}}(y_1, \ldots, y_n)\right\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k|$.
3. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
4. On pose $B = A + I_n = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   a) Montrer que :
   $$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad b_{i,i} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{i,j}.$$
   b) En déduire que B est inversible.
5. Montrer que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice R semblable à $\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.
6. Montrer que $R = \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1322
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On note α et β les plus grandes valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ et ${}^{\mathrm{t}}BB$ respectivement.
Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(AB)$, $\lambda^2 \leqslant \alpha\beta$.

Exercice 1323
Mines-Ponts PSI 2021
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note α et β les plus petite et plus grande valeurs propres de $S = \dfrac{1}{2}\left(A + {}^{\mathrm{t}}A\right)$.
1. Montrer que :
   $$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}XAX$$
   puis que :
   $$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \alpha\,{}^{\mathrm{t}}XX \leqslant {}^{\mathrm{t}}XAX \leqslant \beta\,{}^{\mathrm{t}}XX.$$
2. En déduire que les valeurs propres de A appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Exercice 1324
X PC 2001
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \left(\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2$. On ordonne les valeurs propres $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ de A et $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ de B.
Montrer que :
$$\mathrm{tr}(AB) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k.$$

Exercice 1325
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, E un espace euclidien de dimension n, $a \in E$ un vecteur unitaire, $k \in \mathbb{R}$ et f l'application de E définie par :
$$f(x) = x + k\langle a, x \rangle a.$$
1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 1326
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $(a,b) \in E^2$ avec a et b unitaires et (a,b) libre, et f l'application de E définie par :
$$f(x) = \langle a,x\rangle a + \langle b,x\rangle b.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Détermer les éléments propres de f.

Exercice 1327
Mines-Ponts MP 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB + BA = 0_n$.
Montrer que $AB = BA = 0_n$.

Exercice 1328
CCINP PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n, a et b deux vecteurs unitaires de E tels que la famille (a,b) soit libre et f l'application définie par :
$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a,x\rangle b + \langle b,x\rangle a.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer les éléments propres de f.

Chapitre XIV

Topologie des espaces vectoriels normés

1 Normes. Espaces vectoriels normés

Exercice 1329
ENSEA PC 2002
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
- $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $N(x) > 0$
- $N(0) = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $N(\lambda x + y) \leqslant |\lambda| N(x) + N(y)$.

Montrer que N est une norme.

Exercice 1330
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.
Montrer que $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ est une norme sur E.

Exercice 1331
CCP PSI 2006
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $N(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k |x_k|$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a_1, \ldots, a_n$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1332
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et f un endomorphisme de E. On définit l'application N sur E en posant $N(x) = \|f(x)\|$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme sur E.

Exercice 1333
Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $N(P) = \sup\{|P(z)| \,/\, |z| = 1\}$.
1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{C}[X]$ prenant la valeur 1 en 0.
   Déterminer la borne inférieure de N sur A_n.

Exercice 1334
Montrer que, sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \,/\, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$, les normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1\left(a + b\sqrt{2}\right) = \left|a + b\sqrt{2}\right| \qquad \text{et} \qquad N_2\left(a + b\sqrt{2}\right) = |a| + |b|$$

ne sont pas équivalentes.

Exercice 1335
Centrale PC 2010
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \max\limits_{x\in[-1;1]} |P'(x)|$.

1. Montrer que N_a est une norme.
2. Soit $(a,b) \in [-1;1]^2$. Montrer que N_a et N_b sont équivalentes.
3. Que dire si $a \in [-1;1]$ et $b > 1$?

Exercice 1336
Mines-Ponts MP 2019
Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.
1. Pour tout $f \in E$, on pose $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.
   a) Montrer que N est une norme sur E.
   b) Comparer les normes N et $\|\cdot\|_\infty$.
2. Pour tout $f \in E$, on pose $N'(f) = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$.
   a) Montrer que N' est une norme sur E.
   b) Comparer les normes N' et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 1337
CCP PC 2010
Soit $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et, pour tout $f \in E$, $N(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.
1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Les normes N et $\|\cdot\|$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 1338
Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R}) \,/\, f(0) = f(1) = 0\right\}$ et, pour tout $f \in E$, $N(f) = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (f''(t))^2 \mathrm{d}t}$.
1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 1339
Mines-Ponts MP 2016. IMT PC 2018
Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \sqrt{(f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 \mathrm{d}t}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.
3. Existe-t-il $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $f \in E$, $N(f) \leqslant a\|f\|_\infty$?
4. La norme N et la norme préhilbertienne canonique sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 1340
Mines-Ponts MP 2021
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et telles que $f(0) = 0$.
On considère l'application N_1 définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad N_1(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur E et que (E,N_1) est un espace de Banach.
2. Soit N_2 la norme de E définie, pour toute $f \in E$, par $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
   Montrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exercice 1341
Mines-Ponts MP 2021
Soit $E = \big\{ f \in \mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R}) \,/\, f(0) = f'(0) = 0 \big\}$.
Pour toute $f \in E$, on pose $N(f) = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$.
1. Montrer que N est une norme sur E.
2. On fixe $f \in E$ et on pose $g = f'' + 2f' + f$.
   Exprimer f en fonction de g.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour toute $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant aN(f)$.
4. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 1342
Mines-Ponts MP 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) = N(A)N(B)$?

Exercice 1343
X MP 2016. Mines-Ponts PC 2015
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \big\|P^{-1}AP\big\| = \|A\|.$$

Exercice 1344
Soit $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$, $\varphi \in E$ et N_φ l'application définie sur E par :
$$\forall f \in E, \quad N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty.$$
1. Montrer que N_φ est une norme sur E si, et seulement si, l'intérieur de $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.
2. Montrer que les normes N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes si, et seulement si, $\varphi^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.

2 Suites d'un espace vectoriel normé

Exercice 1345
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note :
$$N_1(P) = \left| a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{k} \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \sup_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |P(x)|.$$
1. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Montrer que $X^n \xrightarrow{N_1} -1$ et $X^n \xrightarrow{N_2} 0$.

Exercice 1346
TPE PSI 2018
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big|P^{(k)}(0)\big|$ et $N_2(P) = \sup\limits_{x \in [-1;1]} |P(x)|$.
1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \dfrac{1}{n} X^n$.
   Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour les normes N_1 et N_2.

Exercice 1347
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $(u,v) \in E^2$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergeant vers u et v respectivement. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont colinéaires.
Montrer que u et v sont colinéaires.

Exercice 1348
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers A et B. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont semblables.
Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 1349
TPE PSI 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et de diagonale $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_p = T + \operatorname{diag}\left(\frac{1}{p},\frac{2}{p},\ldots,\frac{n}{p}\right)$.
   Montrer que T_p a n valeurs propres distinctes à partir d'un certain rang.
2. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 1350
Mines-Ponts PSI 2018. Centrale PSI 2021
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, unitaire de degré n.
   Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im\mathrm{m}(z)|^n$.
2. Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Exercice 1351
Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que, si F est ouvert, alors $F = E$.

Exercice 1352
Mines-Ponts PC 2019
Soit A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E. On pose $A + B = \{a + b \,/\, a \in A \text{ et } b \in B\}$.
1. On suppose que A est ouverte. Montrer que $A + B$ est ouverte.
2. Si A et B sont fermées, alors $A + B$ est-elle fermée ?

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 1353
TPE MP 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.

Exercice 1354
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad N(AB) \leqslant \lambda N(A)N(B).$$

5 Applications sur un espace vectoriel normé

5.1 Cas général

Exercice 1355
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : x \in E \longmapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|^2}$.
1. Montrer que f est continue sur E.
2. Montrer que $f(E) = B\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 1356
Centrale PC 2010
On munit $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 \mathrm{d}t}.$$

Soit $\varphi : f \in E \longmapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.
Montrer que l'application φ est continue de $(E,\|\cdot\|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1357
Mines-Ponts MP 2013
Soit E un espace vectoriel normé et $T : E \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$T(x) = \frac{x}{\max(1,\|x\|)}.$$

1. Montrer que T est 2-lipschitzienne.
2. Montrer que, si E est un espace préhilbertien, alors T est 1-lipschitzienne.

Exercice 1358
Mines-Ponts PSI 2019
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $T : E \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$T(x) = \frac{x}{1+\|x\|}.$$

1. Montrer que $T(E) = B(0,1)$.
2. Montrer que T est 1-lipschitzienne et que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \Longleftrightarrow x = y.$$

Exercice 1359
X MP 2005. Mines-Ponts MP 2019
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f : K \longrightarrow K$ telle que :

$$\forall (x,x') \in K^2, \quad x \neq x', \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x')\| < \|x - x'\|.$$

1. Montrer que l'application f admet un unique point fixe, noté x.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $x_0 \in K$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Exercice 1360
Soient $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K un convexe compact de E et $f : K \longrightarrow K$ une application 1-lipschitzienne.
Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 1361
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace de Banach et $f : E \longrightarrow E$ une application.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ tel que :

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad \|f(x) - f(x')\| \leqslant \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(x') - x'\|).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 1362
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace de Banach, f et g deux applications de E dans E.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ tel que :

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad \|f(x) - g(x')\| \leqslant \alpha(\|f(x) - x\| + \|g(x') - x'\|).$$

Montrer que f et g admettent chacune un unique point fixe, celui-ci leur étant commun.

5.2 Cas des applications linéaires

Exercice 1363
ENS Paris MP 2016. Mines-Ponts MP 2017
Donner un exemple de forme linéaire non continue.

Exercice 1364
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On munit $\mathbb{C}_n[X]$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \|\mathrm{P}\| = \sup_{z \in [-1;1]} |P(z)|.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad |P(z_0)| \leqslant c\|P\|.$$

Exercice 1365
Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1. À quelle condition $N_a : P = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k X^k \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k p_k|$ est-elle une norme sur $\mathbb{C}[X]$?
2. Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$. À quelle condition les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?
3. Existe-t-il une suite $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $P \longmapsto P'$ soit continue ?

Exercice 1366
Soit E un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Montrer qu'il n'existe pas $(u,v) \in (\mathcal{L}_c(E))^2$ tel que $u \circ v - v \circ u = \alpha \mathrm{Id}_E$.

Exercice 1367
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'application définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(A) = \mathrm{tr}(A).$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme N définie par :

$$\forall A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(A) = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Calculer la norme subordonnée de φ.

Exercice 1368
Sur $\mathbb{R}^n$, on considère les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par :

$$\forall x = (x_1, \ldots ,x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|.$$

Déterminer les normes matricielles associées à $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 1369
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$ muni de la norme uniforme et L une forme linéaire sur E telle que, si $f \geqslant 0$, alors $L(f) \geqslant 0$.
Montrer que L est continue.

Exercice 1370

1. Donner deux normes non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui, au polynôme P, associe le polynôme P'.
   Donner un exemple de norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle D est continu et un exemple de norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle D n'est pas continu.
3. Soit M l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui, au polynôme P, associe le polynôme XP.
   Existe-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui rende simultanément D et M continus ?

Exercice 1371
Mines-Ponts MP 2015
a) Existe t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \longmapsto XP$ soit continu ?
b) Existe t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \longmapsto P'$ soit continu ?
c) Existe t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que l'opérateur $P \longmapsto XP'$ soit continu ?

Exercice 1372
On munit l'espace vectoriel ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Soit φ l'application définie sur ℓ^∞ par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty, \quad \varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 1373
On munit l'espace vectoriel ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Soit φ l'application définie sur ℓ^∞ par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty, \quad \varphi(u) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 1374
On munit l'espace vectoriel ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Soit φ l'application définie sur ℓ^∞ par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \quad \varphi(u) = \left(\frac{u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ.

Exercice 1375
On munit l'espace vectoriel ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Soit φ l'application définie sur ℓ^∞ par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \quad \varphi(u) = (2u_n - u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Montrer que l'application φ est une bijection linéaire de ℓ^∞ sur ℓ^∞.
2. Montrer que les applications φ et φ^{-1} sont continues et déterminer leur norme subordonnée.
3. Le corps de base étant $\mathbb{R}$, quelles sont les valeurs propres de φ ?

Exercice 1376
On munit l'espace vectoriel c_0 des suites complexes convergeant vers 0 de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Soit φ l'application définie sur c_0 par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}.$$

Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 1377
On munit $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Soit φ l'application définie sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \varphi(f) = f(1) - f(0).$$

Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 1378
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $|\cdot\|$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Soit $c \in]0;1[$ et φ l'application définie sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ par $\varphi(f) = f(c)$.
Montrer que l'application φ n'est pas continue.

Exercice 1379
Soit φ l'application définie sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \forall x \in [0;1], \quad \varphi(f)(x) = f(x) - f(0).$$

1. On munit $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|.$$

   Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.
2. On munit $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

   Montrer que l'application φ n'est pas continue.

Exercice 1380
On munit les espaces vectoriels $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ des normes $\|\cdot\|_\infty$ et N définies par :

$$\forall f \in E, \quad , \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad \forall f \in F, \quad N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ l'application définie par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0;1], \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 1381
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Soit φ l'application définie sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \forall x \in [0;1], \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 1382
On note E_1 et E_∞ l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ munis respectivement des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|.$$

Soit $\varphi : E_1 \longrightarrow E_\infty$ l'application définie par :

$$\forall f \in E_1, \quad \forall x \in [0;1], \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée. Montrer que celle-ci n'est pas atteinte.

Exercice 1383
On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues d'intégrale nulle sur $[0;1]$ et, pour $f \in E$, $\varphi(f)$ l'unique primitive de f appartenant à E.
Montrer que φ est un endomorphisme continu

a) si E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|;$$

b) si E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Exercice 1384
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Soit φ la fonction définie sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que l'application φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 1385
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Soit ψ l'application définie sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \psi(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Étudier la continuité de l'application ψ si $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 1386
Soit $g \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et φ_g l'application définie sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \varphi_g(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que φ est un endomorphisme continu de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et calculer sa norme subordonnée
a) si $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

b) si $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x}$$

c) si $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Exercice 1387
Soit E un espace vectoriel normé, φ une forme linéaire continue non nulle sur E et $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$.
1. Montrer que :

$$|||\varphi||| = \frac{|\varphi(x_0)|}{d(x_0,\mathrm{Ker}(\varphi))}$$

2. Montrer l'équivalence :

$$\exists a \in E \setminus \{0\}, \quad |||\,\varphi||| = \frac{\varphi(a)}{\|a\|} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists b \in \mathrm{Ker}(\varphi), \quad \|x_0 - b\| = d(x_0,\mathrm{Ker}(\varphi)).$$

3. On prend $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et φ la forme linéaire définie sur E par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x.$$

   Montrer que φ est continue et calculer $|||\varphi|||$.
   Existe-t-il $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $|\varphi(f)| = |||\varphi\,||| \cdot \|f\|$?

Chapitre XV

Nombres entiers

1 Coefficients binomiaux

Exercice 1388
X MP 2021. Olympiades internationales 1972
Montrer que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}.$$

Exercice 1389
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^n u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n!}$.

Exercice 1390
Résoudre l'équation d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n.$$

Exercice 1391
Résoudre le système d'inconnue $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\begin{cases} \dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{p+1} \\ 4\dbinom{n}{p} = 5\dbinom{n}{p-1} \end{cases}$$

Exercice 1392
Déterminer les entiers n et p tels que $\dbinom{n}{p-1}$, $\dbinom{n}{p}$ et $\dbinom{n}{p+1}$ soient en progression arithmétique.

Exercice 1393
1. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p \in [\![0,n]\!]$ et $2\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{p-1} + \dbinom{n}{p+1}$.

2. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p+3$. Montrer que $\binom{n}{p}, \binom{n}{p+1}, \binom{n}{p+2}, \binom{n}{p+3}$ ne forment pas une progression arithmétique.

Exercice 1394

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right)$.

Exercice 1395
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Exercice 1396
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leqslant p$. Montrer que :

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Exercice 1397
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leqslant p$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{p-k}{n-k} = 2^n \binom{p}{n}.$$

Exercice 1398
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leqslant p$. Montrer que :

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{p}{k}\binom{k}{n} = 2^{p-n} \binom{p}{n}.$$

Exercice 1399
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant m$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n+1-m}.$$

Exercice 1400
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0.$$

Exercice 1401
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0;1], \quad \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}.$$

Exercice 1402
ENSEA PSI 2008. IMT PC 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 1403
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Exercice 1404
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\binom{n}{k}+1\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}.$$

Exercice 1405 - Formule de Vandermonde
X PC 2001. Mines-Ponts MP 2016. Navale PC 2014
1. Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $p \leqslant m+n$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 1406
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n}.$$

Exercice 1407
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}^2 = n(n-1)\binom{2n-2}{n-2}$$

Exercice 1408
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{pn}{k} = (-1)^n\binom{pn-1}{n}.$$

Exercice 1409
1. Montrer que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \quad n > m, \quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}.$$

2. En déduire que :

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad n \geqslant m, \quad \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n}{m+k} = \binom{n-1}{m-1}.$$

Exercice 1410
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$.

Exercice 1411
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(n+k)!}$.

Exercice 1412
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Calculer

$$\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} a^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} a^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire

$$\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \qquad \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$$
$$\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k \qquad \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k$$
$$\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-3)^k \qquad \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} (-3)^k.$$

Exercice 1413
Soit $n \in \mathbb{N}$, impair. Montrer que :

$$\sum_{0 \leqslant 4k+2 \leqslant 2n} \binom{2n}{4k+2} = 2^{2n-2}.$$

Exercice 1414
Mines-Ponts PSI 2016
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 1415
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}.$$

Exercice 1416
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(n-k+1)}$.

Exercice 1417
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)!(n+k)!$.

Exercice 1418
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}}$.

On se propose de calculer S_n par deux méthodes.

1. *Première méthode*
   Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{\binom{n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}\right)$$
   En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
2. *Deuxième méthode*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $n!(n+2)S_n$ et en déduire l'expression de S_n.

Exercice 1419

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$x_1 + (1-x_1)x_2 + (1-x_1)(1-x_2)x_3 + \cdots + (1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1})x_n + (1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) = 1.$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot k!}{n^k}\binom{n}{k} = n.$$

Exercice 1420

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = 2.$$

Exercice 1421

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k} = 2^n.$$

Exercice 1422

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Montrer que :
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

Exercice 1423 - Formule d'inversion de Pascal

Mines-Ponts PC 2015

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k.$$
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} v_k$$

Exercice 1424

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i}\right) = 2^{2n}.$$

Exercice 1425
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $S(n,p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S(n,k)$.
2. En déduire $S(n,p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{0;1;2;3;4\}$.

Exercice 1426
Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$S(p,q) = \sum_{k=0}^{q} \binom{p+q-k}{p} 2^k + \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q-k}{q} 2^k.$$

1. Montrer que :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad S(p,q+1) + S(p+1,q) = S(p+1,q+1).$$
2. En déduire que :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad S(p,q) = 2^{p+q+1}.$$

Exercice 1427
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right)^2 = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Exercice 1428
1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{2n}{n+k} = n \binom{2n-1}{n}.$$
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de :
$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j) \binom{n}{i} \binom{n}{j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) \binom{n}{i} \binom{n}{j}.$$

Exercice 1429
1. Montrer que :
$$\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{n+k}{p+q} = \binom{n}{p} \binom{n}{q}.$$
2. En déduire que :
$$\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{n+p+q-k}{p+q} = \binom{n+p}{p} \binom{n+q}{q}.$$
   En particulier :
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}^2 \binom{n+2p-k}{2p} = \binom{n+p}{p}^2.$$

Exercice 1430 - Suite harmonique
Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite harmonique définie par :

$$H_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. a) Montrer que :
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right).$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} kH_k = \frac{n(n+1)}{2}\left(H_{n+1} - \frac{1}{2}\right).$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} H_k = 2 - \frac{1}{n}(H_n + 1).$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2n.$$

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + \frac{n}{2} \leqslant H_{2^n} \leqslant n+1.$$

Exercice 1431 - Identités d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad n(n-1)\cdots(n-j+1)(x+y)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\cdots(k-j+1)x^{k-j}y^{n-k}.$$

b) En déduire que :

$$\forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\cdots(k-j+1)(-1)^{n-k} = 0.$$

c) Montrer que :

$$\forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^j (-1)^{n-k} = 0.$$

2. a) Montrer la première identité d'Abel :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k} = (x+y+n)^n.$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k} = n^n - n^{n-1}.$$

3. a) Montrer la deuxième identité d'Abel :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y+n)^{n-1}.$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

2 Dénombrement

Exercice 1432
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(n_1, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$. On considère un mot composé de n_1 lettres $\ell_1, \dots, n_p$ lettres ℓ_p.
Déterminer le nombre d'anagrammes de ce mot.

Exercice 1433
Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer le nombre de partitions d'un ensemble à pq éléments en p classes ayant chacune q éléments ?

Exercice 1434
ENS MP 2018
Une barrière circulaire est constitué de 17 poteaux dont 5 sont pourris.
Montrer qu'il existe un ensemble de 7 poteaux consécutifs dont 3 sont pourris.

Exercice 1435
On considère un polygone convexe à n sommets.
1. Combien de diagonales ce polygone admet-t-il ?
2. On suppose que trois diagonales quelconques ne sont jamais concourantes.
   En combien de points intérieurs au polygone ces diagonales se coupent-elles ?
3. Combien de polygones (convexes ou non, croisés ou non) admettant les mêmes n sommets que le polygone donné peut-on construire ?

Exercice 1436
On considère dans le plan n droites distinctes non parallèles deux à deux et non concourantes trois à trois.
Déterminer le nombre de régions délimitées par ces n droites.

Exercice 1437
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que n couples se rencontrent et se serrent la main. Chaque personne serre la main de toutes les autres sauf celle de son conjoint.
Combien y a-t-il de poignées de mains échangées ?

Exercice 1438
Déterminer le nombre de relations d'ordre total sur un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1439
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Déterminer :
a) le nombre de lois de composition interne sur E;
b) le nombre de lois de composition interne commutatives sur E;
c) le nombre de lois de composition interne sur E admettant un neutre.

Exercice 1440 - Formule de Vandermonde
1. Soit $(b,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $p \leqslant m + n$. En dénombrant de deux façons le nombre de tirages simultanés de p boules dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires, Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{b}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{b+n}{p}.$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 1441
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des $(n+1)$-listes formées uniquement de 0 et de 1 et qui contiennent au moins $p+1$ chiffres 1.
En considérant d'une part, pour $p \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble E_k des listes de $\mathcal{E}$ ayant exactement $k+1$ chiffres 1 et d'autre

part l'ensemble F_k des listes de $\mathcal{E}$ pour lesquelles le $(p+1)$-ième chiffre 1 apparaît en $(k+1)$-ième position, montrer que :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} 2^{n-k}.$$

Exercice 1442

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal $2n$. On appelle partition par paires tout ensemble $\{p_1, \dots, p_n\}$ où $p_1, \dots, p_n$ sont des paires d'éléments de E deux deux disjointes.
   Déterminer le nombre de partitions par paires de E.
2. *Application*
   On considère 64 joueurs de tennis.
   De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi en simple ?
   De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi en double, les équipes étant tirées au sort ?

Exercice 1443

Centrale PSI 2008

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(A), \qquad \sum_{(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{Card}(A\cap B), \qquad \sum_{(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{Card}(A\cup B)$$

Exercice 1444

Soit E un ensemble fini et $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$.
Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{P}(E) \,/\, A \cup X = B\}$.

Exercice 1445

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n.
Déterminer le cardinal des ensembles $\mathcal{E} = \big\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \,/\, A \subset B\big\}$ et $\mathcal{E}' = \big\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \,/\, A \subsetneq B\big\}$.

Exercice 1446

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n.
Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E} = \big\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \,/\, A \cup B = E, A \cap B = \varnothing\big\}$.

Exercice 1447

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et E un ensemble de cardinal n.
Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E} = \big\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \,/\, \mathrm{Card}(A \cap B) = p\big\}$.

Exercice 1448

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n.
Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E} = \big\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \,/\, A \cup B = E\big\}$.

Exercice 1449

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n.
Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E} = \big\{(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3 \,/\, A \cup B \cup C = E\big\}$.

Exercice 1450

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{2n-k}{n-k} = 2^n \binom{2n}{n}.$$

Exercice 1451

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} \binom{n}{p}\binom{n}{q}\binom{n}{p+q} = \binom{3n}{n}.$$

Exercice 1452 - Nombre de surjections
Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E et F deux ensembles de cardinaux m et n respectivement. On note $S_{m,n}$ le nombre de surjections de E sur F.

1. Déterminer $S_{m,n}$ si
   a) $n > m$;
   b) $m = n$;
   c) $n = 1$;
   d) $n = 2$;
   e) $m = n + 1$.

On se propose de démontrer par deux méthodes que :

$$S_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m \qquad (\bigstar)$$

2. *Première méthode*
   a) En considérant, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'ensemble des applications de E dans F dont l'image est de cardinal k, montrer que :
   $$n^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{m,k}.$$
   (Par convention, on pose, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $S_{m,0} = 0$.)
   b) En déduire la formule $(\bigstar)$.
3. *Deuxième méthode*
   On répartit au hasard m jetons numérotés de 1 à m dans n cases numérotées de 1 à n. Chaque jeton est placé sur une case et chaque case peut recevoir plusieurs jetons.
   On note A l'ensemble des répartitions possibles et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, A_k l'ensemble des répartitions pour lesquelles la case numéro k est vide.
   a) Calculer $\mathrm{Card}(A)$ et $\mathrm{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.
   b) En déduire la formule $(\bigstar)$.
4. a) Montrer que :
   $$S_{m,n} = n(S_{m-1,n} + S_{m-1,n-1}).$$
   b) Montrer que $S_{n+2,n} = \dfrac{n(3n+1)(n+2)!}{24}$.
5. Calculer $S_{m,n}$ pour $(m,n) \in [\![1,7]\!]^2$.

Exercice 1453 - Les trous de Kaplansky

1. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \geqslant p$.
   Déterminer le cardinal de $\mathcal{E}_1 = \{(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1,n]\!]^p \,/\, 1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_p \leqslant n\}$.
2. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \geqslant p$.
   Déterminer le cardinal de $\mathcal{E}_2 = \{(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1,n]\!]^p \,/\, 1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_p \leqslant n\}$.
3. *Les trous de Kaplansky*
   Soit $(n,p,k) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $n \geqslant (p-1)k + p$.
   Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E}_3 = \{(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1,n]\!]^p \,/\, \forall i \in [\![1,p-1]\!], x_{i+1} - x_i > k\}$.

Exercice 1454
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$, c'est-à dire l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ n'ayant pas de point fixe, et on pose $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$ en convenant que $d_0 = 1$.

1. En considérant, pour $k \in [\![1,n]\!]$, l'ensemble F_k des permutations de $[\![1,n]\!]$ fixant l'entier k et en appliquant la formule du crible de Poincaré, montrer que :
   $$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
2. *Application*
   Déterminer, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, le nombre $f_{p,n}$ de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant p points fixes.

Exercice 1455

X PSI 2005

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$, c'est-à dire l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ n'ayant pas de point fixe, et on pose $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$ en convenant que $d_0 = 1$.

1. Pour $p \in [\![0,n]\!]$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

2. Montrer que :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

3. En déduire que :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Chapitre XVI

Nombres réels

1 Calculs

Exercice 1456
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt[3]{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} = 3$.
Calculer $\alpha^3 + \dfrac{1}{\alpha^3}$.

Exercice 1457
Calculer :
$$\frac{\left(10^4+324\right)\left(22^4+324\right)\left(34^4+324\right)\left(46^4+324\right)\left(58^4+324\right)}{\left(4^4+324\right)\left(16^4+324\right)\left(28^4+324\right)\left(40^4+324\right)\left(52^4+324\right)}.$$

Exercice 1458
Soit $(a,b,c,A,B,C) \in \mathbb{R}^6$. On suppose que :
$$aC - 2bC + cA = 0 \qquad \text{et} \qquad ac - b^2 > 0.$$
Montrer que :
$$AC - B^2 \leqslant 0.$$

Exercice 1459
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Montrer que :
$$-\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1.$$

Exercice 1460
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3$ tel que $a + b + c \geqslant abc$.
Montrer que :
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc.$$

Exercice 1461
1. Montrer que :
$$\forall x \in [0;1], \quad x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$
2. En déduire que :
$$\forall (a,b,c) \in [0;1]^3, \quad \min(a(1-b),b(1-c),c(1-a)) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 1462
Soit $(a,b) \in]1,+\infty[^2$. Montrer que :
$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1} \geqslant 8.$$

Exercice 1463
Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On note A et G les moyennes arithmétique et géométrique de x et y :
$$A=\frac{x+y}{2} \qquad \text{et} \qquad G=\sqrt{xy}.$$
1. On suppose que $y \geqslant x$. Montrer que :
$$\frac{(x-y)^2}{8y} \leqslant A-G \leqslant \frac{(x-y)^2}{8x}.$$
2. On suppose que $x \neq y$. Montrer que :
$$G<\frac{(x-y)^2}{8(A-G)}<A.$$

Exercice 1464
Soit $(a,b,x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$ avec $a+b \geqslant 1$.
Montrer que :
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y} \geqslant \frac{1}{ax+by}.$$

Exercice 1465
Soit $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$. Montrer que :
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Exercice 1466
Soit $(a,b,c,x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^5$ tel que
$$ax+by \leqslant bx+cy \leqslant cx+ay.$$
Montrer que $b \leqslant c$.

Exercice 1467 - Inégalité de Nesbitt
Soit $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$.
1. Montrer l'inégalité de Nesbitt :
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$
2. Montrer que :
$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2} \geqslant \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Exercice 1468
Présélection olympiades internationales 2008
Soit $(a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$ tel que :
$$abcd=1 \qquad \text{et} \qquad a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}.$$
Montrer que :
$$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}.$$

Exercice 1469
Présélection olympiades internationales 2009
Soit $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ tel que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = a + b + c$.
Montrer que :

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

Exercice 1470
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $a < b$. Montrer que :

$$(n+1)a^n < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Exercice 1471
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ tel que :

$$a + b + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5.$$

Montrer que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}.$$

Exercice 1472
Présélection olympiades internationales 2010
Soit $x_1, \ldots, x_{100}$ des réels positifs tels que, pour tout $k \in [\![1;100]\!]$, $x_k + x_{k+1} + x_{k+2} \leqslant 1$ (avec $x_{101} = x_1$ et $x_{102} = x_2$).
Déterminer la valeur maximale de la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{100} x_k x_{k+2}.$$

Exercice 1473
Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2\sqrt{z-2} + \sqrt{u} + \sqrt{v} = x + y + z + u + v.$$

Exercice 1474
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{16x + \sqrt{\cdots + \sqrt{4^n x + 3}}}}} - \sqrt{x} = 1.$$

Exercice 1475
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} = \sqrt{x+a+b-c}$$

en discutant en fonction de a,b et c,

Exercice 1476
IMT MP 2017
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$.

Exercice 1477
Mines-Ponts PC 2017
Résoudre dans $\mathbb{R}$ dans l'équation : $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=1$.

Exercice 1478
Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^3 = 2y-1 \\ y^3 = 2z-1 \\ z^3 = 2x-1. \end{cases}$$

2 Partie entière

Exercice 1479
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres de n écrit en base 10 est égal à $\lfloor \ln_{10}(n) \rfloor + 1$.

Exercice 1480
Résoudre l'équation :

$$\lfloor 3x \rfloor = 2 + \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 1481
Résoudre l'équation : $x^2 - 8\lfloor x \rfloor + 7 = 0$.

Exercice 1482
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 1483
Montrer que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \quad \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n.$$

Exercice 1484
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2 \leqslant 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leqslant 1.$$

Exercice 1485
Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 1486
Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor.$$

Exercice 1487
Déterminer :

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor.$$

Exercice 1488
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer :

$$\left\lfloor \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2+1}}}} \right\rfloor.$$

Exercice 1489
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left\lfloor \sqrt{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\sqrt{x}} \right\rfloor.$$

Exercice 1490
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n + 1.$$

Exercice 1491
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 1492
Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \right\rfloor = n - 1$$

Exercice 1493
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n - 1.$$

Exercice 1494
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[, \quad \left\lfloor \frac{1 + \left\lfloor \frac{1+nx^2}{x} \right\rfloor}{x} \right\rfloor = n.$$

Exercice 1495
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{x_k}{a} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rfloor.$$

Exercice 1496
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \leqslant \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 1497
1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor.$$

Exercice 1498
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n.$$

Exercice 1499
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Exercice 1500
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in [-1;1]^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$.
Montrer que :
$$\left| \sum_{k=1}^{n} k x_k \right| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Exercice 1501
X MP 2018
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \sqrt{2} n \right\} > \frac{1}{2\sqrt{2} n}.$$

Exercice 1502
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\left\lfloor \frac{25x-2}{4} \right\rfloor = \frac{13x+4}{3}.$$

Exercice 1503
Olympiades panafricaine 2005
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Résoudre l'équation : $\lfloor x \rfloor \{x\} = 2005x$.

Exercice 1504
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\lfloor \frac{n + 2 - \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8n+24}{25} \right\rfloor.$$

Exercice 1505
Olympiades polonaises 1995
Soit $(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q})^4$ tel que $a + b = 1$.
Montrer que :
$$c + d = 1 \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor + \lfloor nd \rfloor.$$

Exercice 1506
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n(2n+1)$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$, unique, tel que $u_p \leqslant k < u_{p+1}$. Exprimer p en fonction de k.

Exercice 1507
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont les premiers termes sont $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\dots$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 1508
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \left(\sqrt{2}+1\right)^n \right\rfloor$ est un entier pair.

Exercice 1509
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\rfloor$ est un entier impair.

Exercice 1510
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} \right\rfloor$ est divisible par 2^{n+1}.

Exercice 1511 - Identité d'Hermite
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'identité d'Hermite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

2. *Application*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor.$$

Exercice 1512
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+3} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+5} \right\rfloor.$$

Exercice 1513
Putnam 1948
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor.$$

Exercice 1514
ENS Cachan, Rennes MP 2015
Soit p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Chapitre XVII

Suites

1 Calcul de limites

Exercice 1515
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$.

Exercice 1516
Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

Exercice 1517
Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor.$$

Exercice 1518
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 1519
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 1520
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k}}.$$

Exercice 1521
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Exercice 1522
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Exercice 1523
Mines-Ponts PC 2015
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}.$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 1524
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k}.$$

Exercice 1525
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k^2-k}}{n^2}.$$

Exercice 1526
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{nk+1}.$$

Exercice 1527
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Exercice 1528
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{((n-1)!)^\alpha}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1+k^\alpha)}.$$

Exercice 1529
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \left(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^{\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}}.$$

Exercice 1530
X - ESPCI PC 2014. ENSEA PSI 2013
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!.$$

Exercice 1531
Centrale MP 2019. CCP PSI 2005
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\binom{n}{k}} = \frac{nu_n}{2}.$$

Exercice 1532
CCP PSI 2017
Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 1533
ENTPE-EIVP PSI 2009
Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n^n = b$.
Soit $(p,q)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $p+q=1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(pa_n+qb_n)^n$.

Exercice 1534
Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_p,a_1,\ldots,a_p)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2p}$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p} a_k x_k^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{k\in[\![1,p]\!]} x_k \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p} a_k x_k^{-n}\right)^{\frac{-1}{n}} = \min_{k\in[\![1,p]\!]} x_k.$$

Exercice 1535
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue.
Montrer la convergence et déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^n}.$$

Exercice 1536
Mines-Ponts PC 2019
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right).$$

Exercice 1537
Putnam 1977
Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$.

Exercice 1538
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 1539
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

Exercice 1540
Mines-Ponts MP 2013
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)$$

Exercice 1541
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$$

Exercice 1542
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right).$$

Exercice 1543
1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) \leqslant x \leqslant (x+1)\ln(x+1).$$

2. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \leqslant \mathrm{e}^n \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

   b) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 1544
ESCP Question courte 2006
Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)$.

Exercice 1545
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}(a+kb)^{\frac{1}{n}}.$$

Calculer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1546
X MP 2007. X - ESPCI PC 2015. Mines-Ponts MP 2018
Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right).$$

Exercice 1547
Mines-Ponts MP 2017
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a^{\frac{1}{2^k}}+b^{\frac{1}{2^k}}}{2}\right).$$

Exercice 1548
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^k}.$$

Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1549
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeur strictement positives telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\prod_{k=1}^{n}u_k\right)^{\frac{1}{n}} = n+1.$$

Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1550
X - ESPCI PC 2011
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n}(k!)^{\alpha}$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1551
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in [0;1]^n$.
   Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geqslant 1-\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leqslant \frac{x^2}{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{|x|^k}{k!}.$$

3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Exercice 1552
X MP 2007
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(u_0,u_1) \in \mathbb{R}^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{nu_{n+1} + u_n}{n+1}$.

2 Convergence. Divergence

Exercice 1553
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes.
Montrer que les suites $(\max(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\min(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 1554
Centrale PC 2014
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Montrer que les suites $(\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Exercice 1555
Centrale PC 2019
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la suite $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi P(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1556
Centrale PC 2008
Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 1557
IMT PSI 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!.$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 1558
Mines-Ponts MP 2021
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $d_n = H_n - \ln(n)$.
1. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et converge.
On note γ sa limite.
2. Montrer que :

$$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \gamma \leqslant H_p + H_q - H_{pq} \leqslant 1.$$

Exercice 1559
Soit $(u_n)_{n\in\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que :

$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad u_n \leqslant \frac{p}{n} + \frac{1}{p}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 1560
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1. Montrer que, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ également.
2. Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ également.

Exercice 1561
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

1. Montrer que, si $\ell < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que, si $\ell > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que, si $\ell = 1$, alors on ne peut rien conclure quant à la convergnce de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1562
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

1. Montrer que, si $\ell < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que, si $\ell > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que, si $\ell = 1$, alors on ne peut rien conclure quant à la convergnce de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1563
Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ également.
   Étudier la récipoque.
2. *Application*
   Déterminer la limite de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :
   a) $u_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$;
   b) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;
   c) $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdot(n+n)}$;
   d) $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$;
   e) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

Exercice 1564
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\left(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 1565
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0;1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

Exercice 1566
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \left|v_n - \frac{1}{2}\right|^2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

Exercice 1567
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 1568
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que les suites $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $S\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}$ respectivement.
1. Montrer que $S^2 \geqslant 4P$.
2. Montrer que, si $S^2 > 4P$, alors on ne peut pas conclure que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
3. Montrer que, si $S^2 = 4P$, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 1569
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\left(u_n^3-v_n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 1570
Soit $a\in\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $(u_n+v_n+w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_n^2+v_n^2+w_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $3a$ et $3a^2$ respectivement.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers a.

Exercice 1571
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
1. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_n+1}=0$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_n^2+1}=0$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 1572
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n=\dfrac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}$.
Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si, et seulement si, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 1573
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{u_n}+\mathrm{e}^{v_n}\right)=2.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 1574
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\cdots+(n-1)\sqrt{n+1}}}}$.

Exercice 1575
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+)^2$ tel que $\alpha+\beta<1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+3}\leqslant \alpha u_{n+2}+\beta u_n.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 1576
Centrale PSI 2017. CCP PC 2011. ESCP Question courte 2006.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle.
1. Montrer que, si $u_n\sim\dfrac{1}{n}$, alors $u_n+u_{n+1}\sim\dfrac{2}{n}$.
   La réciproque est-elle vraie ?

2. Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, alors la réciproque est vraie.

Exercice 1577
ESCP Question courte 2007
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et λ un réel strictement positif.
L'équivalence suivante est-elle vérifiée ?

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda \Longleftrightarrow (u_n)^n \sim \lambda^n.$$

Exercice 1578
X - ESPCI PC 2008
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
1. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
2. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
3. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 1579
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.
On suppose que les suites $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}au_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}bu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1580
Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ respectivement telles que $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
Montrer que les suites $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

Exercice 1581
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à valeurs strictement positives telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n - u_n^2.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1582 - Lemme de Fekete ou lemme sous-additif
ENS PC 2017
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive sous-additive, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{m+n} \leqslant u_m + u_n.$$

Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\inf\left\{\dfrac{u_n}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 1583
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive convergeant vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
On suppose que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_p - u_q| \leqslant a_p + a_q.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1584
X - ESPCI PC 2015. Mines-Ponts MP 2021
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée telle que $\left(u_n + \dfrac{u_{n+1}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 1585
Mines-Ponts MP 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée telle que $\left(u_n+\dfrac{u_{2n}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 1586
X MP 2007
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{U}^n$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $u_k=\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^k$.
Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet n pour valeur d'adhérence.

Exercice 1587
X MP 2007
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.
   Montrer que l'ensemble $\{u_n-\lfloor u_n\rfloor \,/\, n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[0;1]$.
2. Montrer que la suite $(\sin(\ln(n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[-1;1]$.

Exercice 1588
X MP 2005. Mines-Ponts MP 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit vide, soit un intervalle.

Exercice 1589 - Théorème de Cesàro
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$$

Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell\in\mathbb{C}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

Exercice 1590 - Une réciproque du théorème de Cesàro
Soit $\ell\in\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle monotone et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k.$$

Montrer que, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

Exercice 1591 - Lemme de l'escalier
Soit $\ell\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell$.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\ell.$$

Exercice 1592
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs strictement positives convergeant vers $\ell\in\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}u_k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Exercice 1593
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty}u_{2n}=a\qquad\text{et}\qquad\lim_{n\to+\infty}u_{2n+1}=b.$$

Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k.$$

Exercice 1594
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 1595
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+2}-u_n)=0$.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{n}=0.$$

Exercice 1596
X - ESPCI PC 2017. Mines-Ponts MP 2021
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives a et b.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=ab.$$

Exercice 1597
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On suppose que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{u_k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 1598
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$v_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k.$$

Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{C}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Exercice 1599
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers 0 avec $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante.
On suppose que la suite $\left(\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}$.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 1600 - Théorème de Stolz-Cesàro
X - ESPCI PC 2018
Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante divergeant vers $+\infty$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell\in\mathbb{R}$.
On suppose que la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 1601
Mines-Ponts MP 2021
On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $\ell\in\mathbb{R}$ si :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k=\ell.$$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant au sens de Cesàro vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $f(\ell)$.
Déterminer les fonctions continues au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1602
ENS MP 2013
Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante telle que :

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\,, \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n^\alpha$.

3 Suites monotones

Exercice 1603
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = (n+1)u_n^2$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1604
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = u_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{3^n}$.

1. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant 2 - \frac{1}{3^{n-2}}.$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 1605
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{1}{S_{n+1}}((S_n - 1)u_n + u_{n-1}).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 1606
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle majorée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}\sqrt[2^n]{2} \geqslant u_n.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1607
Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 1608
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^k\right).$$

Exercice 1609
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$$

Exercice 1610
Soit $\alpha \in]0;1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0,u_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $u_0 < u_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \alpha^n u_{n-1}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1611
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+1+k)}}.$$

Exercice 1612
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}.$$

On se propose d'établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par deux méthodes.

1. *Première méthode*
   Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1}^2 \leqslant 1 + u_n\sqrt{2}.$$
   En déduire que la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. *Deuxième méthode*
   Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$v_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}.$$
   En déduire que la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 1613
X - ESPCI PC 2014
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle minorée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 1614
CCINP PC 2021
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n+1} < 2 - \frac{1}{u_n}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 1615
Navale PC 2017
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0;1[\quad \text{et} \quad (1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1616
X MP 2007
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle est minorée.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle est bornée.

Exercice 1617
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ et $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$.
On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geqslant 0$.
1. Montrer que la suite $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle converge.
3. Montrer que la suite $(n\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\Delta^2 u_k$ converge.

4 Suites adjacentes

Exercice 1618
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

On admet que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers e.

2. Montrer que e est irrationnel.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant v_n - u_n.$$
En déduire que :
$$\mathrm{e} - u_n \sim \frac{1}{n \cdot n!}.$$
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - v_{n+1} \leqslant v_n - \mathrm{e} \leqslant v_n - u_{n+3}.$$
En déduire que :
$$v_n - \mathrm{e} \sim \frac{1}{n^3 \cdot n!}.$$

Exercice 1619
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1620
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n^2 \cdot n!}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1621
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un nombre irrationnel.

Exercice 1622
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1623
IMT PSI 2017
Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

Exercice 1624
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1625
Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ les suites définies par :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

Exercice 1626
CCP PSI 2013
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1627
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et convergeant vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k.$$

1. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite ℓ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \alpha_{n+1}.$$

Exercice 1628
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1629
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k\cdot k!}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(1+\frac{1}{n\cdot n!}\right)u_n.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1630
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1631
Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = 2^{n+1}a\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2^{n+1}a\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 1632 - Moyenne arithmético-géométrique
Mines-Ponts MP 2016. X - ESPCI PC 2010
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 1633 - Suites de Schwob
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Déterminer leur limite commune.

Exercice 1634
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par $(u_0,v_0)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Déterminer la limite ℓ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent de $u_n-\ell$.

Exercice 1635
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1636
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1637
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 1638
Soit $(\lambda,\mu) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} \end{cases}$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient adjacentes.
2. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas général.

Exercice 1639
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n v_n} + v_n}{3} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 1640
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $u_0 < v_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n v_n}}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + \sqrt{u_n v_n}}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. a) Montrer que :

$$\forall (x,x') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad x < x', \quad \frac{x'-x}{x'} \leqslant \ln(x') - \ln(x) \leqslant \frac{x'-x}{x}.$$

b) En considérant la suite $\left(\dfrac{v_n - u_n}{\ln(v_n) - \ln(u_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1641
CCP PC 2014. ESCP 2011
On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}.$$

1. On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $a_0 = b_1 = 1$ et $a_1 = b_0 = 0$.
   a) Étudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.
   c) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$
   d) Montrer que les deux suites $\left(\dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   On notera ℓ leur limite commune.
   e) Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   f) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| \leqslant \frac{1}{b_n b_{n+1}}.$$
   g) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - \ell b_n)$.
   h) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - \mu b_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.
2. Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.
   a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que :
   $$u_0 = \lambda a_0 - \lambda' b_0 \qquad \text{et} \qquad u_1 = \lambda a_1 - \lambda' b_1.$$
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda a_n - \lambda' b_n$.
   c) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lambda' = \lambda\ell$.

5 Suites récurrentes

5.1 Suites usuelles

Exercice 1642
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k = 4u_n + 2$.
1. Montrer que la suite $(u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 1643
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1 + 2\sqrt{u_n + 1}$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 1644
Putnam 1993
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = 1.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \lambda u_n - u_{n-1}$.

Exercice 1645
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n}{u_0 u_n}.$$

Exercice 1646
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique à termes strictement positifs.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_0} + \sqrt{a_n}}.$$

Exercice 1647
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} u_k^2 = \frac{n}{2n-1}\left(u_1^2 - u_{2n}^2\right).$$

Exercice 1648
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique si, et seulement si, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est.

Exercice 1649
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(u_0,u_1) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $u_1 < u_0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}}$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Exercice 1650
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - u_{n+2}$ et $w_n = u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si, et seulement si, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$.

Exercice 1651
Olympiades de Moscou 1963
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = u_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 + 2}{u_n}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est un entier naturel impair.

Exercice 1652
ICNA PSI 2017
Déterminer les fonctions bijectives $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ vérifiant :

$$\forall x \in [0;1], \quad f(2x - f(x)) = x$$

Exercice 1653
Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $qu_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de q et u_0.

Exercice 1654
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_{n+1}}\right).$$

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
Montrer que $u_0u_1 = 1$.

Exercice 1655
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{C}}$ la suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{az_n + b\overline{z_n}}{a+b}$.
Étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1656
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{C}}$ la suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{az_n - b\overline{z_n}}{a+b}$.
Étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1657
Navale PSI 2019
Étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ avec $\mathrm{Arg}(z_0) \in]0,\pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

Exercice 1658
Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(u_0,v_0,v_0) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{v_n + w_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + w_n}{2} \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Exercice 1659
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $(u_1,v_1) \in]0;1[^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_1(1 - u_n - v_n) + u_n \\ v_{n+1} = v_1(1 - u_n - v_n) + v_n \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 1660
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 1 + \sqrt{24u_n + 1}}{16}$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 1661
Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n.$$

Montrer que $\dfrac{1}{b^n}\left(u_{n+1}^2 - au_{n+1}u_n + bu_n^2\right)$ ne dépend pas de n.

Exercice 1662
X MP 2017. X - ESPCI PC 2016. Mines-Ponts PC 2021
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ f)(x) + f(x) = 12x$$

Exercice 1663
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, continues, vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ f)(x) + af(x) = b(a+b)x$$

Exercice 1664
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{24u_n^2 + 1}$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 1665 - Suite de Fibonacci
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k$.
   b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)F_k = F_{n+4} - (n+3).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k-1}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} F_k$.
4. Montrer la formule de Lucas (1876) :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} F_k F_{k+1} = F_{2n+1}^2 - 1.$$
6. Montrer la formule de Cassini (1680) et Simson (1753) :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$
7. a) Montrer que :
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n.$$
   b) En déduire les formules de Lucas (1876) :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}.$$
8. Montrer la formule d'Ocagne :
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad n \geqslant m, \quad F_n F_{m+1} - F_m F_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}.$$
9. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{F_{k-1}}{2^k} = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}.$$
10. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n-1-k}{k}.$$
11. Montrer que :
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{m+k} = F_{m+2n}.$$
12. Montrer la formule de Binet :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$
13. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n + F_{n-1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n + F_{n-1}.$$

5.2 Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1666
ENS MP 2005. X MP 2018. Mines-Ponts PC 2018. CCP PSI 2009
Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction 1-lipschitzienne et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0;1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + f(u_n)}{2}$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1667
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(2 - au_n)$.

Exercice 1668
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 + 1$.

Exercice 1669
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 1670
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,\alpha[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{(\alpha+1)u_n + \alpha^2}{u_n + \alpha + 1}$.

Exercice 1671
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$.

Exercice 1672
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{16 + u_n^2}{2}}$.

Exercice 1673
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

Exercice 1674
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geqslant \dfrac{7}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5}{2} + \sqrt{u_n - \dfrac{7}{4}}$.

Exercice 1675
Mines-Ponts MP 2013. Centrale PC 2014. ENSEA - ENSIIE MP 2014
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \dfrac{1 + 2u_n}{1 + 3u_n}$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1676
Mines-Ponts MP 2014
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \dfrac{u_n^2 + 1}{3u_n^2 + 1}$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1677
X PC 2001
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{2(u_n + 1)}$.

Exercice 1678
CCINP PC 2019

1. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n).$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = 1 - u_n$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2-v_n}.$$
   En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \frac{2}{n+3}.$$
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{v_n} \leqslant \frac{2n+5}{4} + \frac{1}{2}\ln(n+1).$$
5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 1679
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{(u_n+1)^2}{4}$.

Exercice 1680
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$.

Exercice 1681
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

Exercice 1682
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $a \leqslant b$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+ab}{a+b}$.

Exercice 1683
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$.

Exercice 1684
CCP PC 2017
Soit $c \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + c$.
1. Résoudre l'équation $x = x^2 + c$ en fonction de c.
2. On suppose que $c \in \left[0,\frac{1}{4}\right]$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
3. On suppose que $|c| > 2$ et on pose $\alpha = |c| - 1$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \geqslant |c|\alpha^{n-1}$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
4. On suppose que $c \in \left]\frac{1}{4},2\right]$.
   Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant c - \frac{1}{4}.$$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
5. On suppose que $c \in]-2;0]$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $|c|$.

Exercice 1685
X MP 2005. Mines-Ponts PC 2017.
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
   a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) On suppose que $u_0 \in]0;1[$. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.
2. Généralisation
   Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^{\alpha+1}$.
   Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1686
X - ESPCI PC 2008
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$.

Exercice 1687
Mines-Ponts MP 2014. CCP PSI 2005
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$.
1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 1688
X - ESPCI PC 2017
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \geqslant -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite ℓ.
2. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 1689
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + u_n^2$.

Exercice 1690
Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2$.

Exercice 1691
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

Exercice 1692
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geqslant 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^3 + u_n - 1}{3u_n^2 + 1}$.

Exercice 1693
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 3au_n}{3u_n^2 + a}$.

Exercice 1694
X - ESPCI PC 2016. Mines-Ponts PC 2019
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.
2. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 1695
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1$.

Exercice 1696
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$.

Exercice 1697
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(u_n^3 + 1\right)$.

Exercice 1698
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1699
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1700
X MP 2013. X - ESPCI PC 2019. Mines-Ponts MP 2018. Centrale PSI 2016. TPE PSI 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \geqslant 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.
3. On suppose que $u_0 = 5$. Montrer que : $45 < u_{1000} < 45{,}1$.

Exercice 1701
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{au_n}{\sqrt{a^2 + u_n^2}}$.

Exercice 1702
Soit $r \in]0;1[$, $a \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = r + u_n - \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}$.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1703
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0;1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1 - u_n}}$.

Exercice 1704
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lfloor u_n \rfloor + (u_n - \lfloor u_n \rfloor)^2$.

Exercice 1705
X -ESPCI PC 2015
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n}$.

Exercice 1706
IMT PC 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. En admettant le théorème de Césaro, déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1707
X MP 2007. X - ESPCI PC 2015. Mines-Ponts PSI 2005. CCP MP 2016

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.
   a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

2. Généralisation
   Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n^\alpha}$.
   Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 1708
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} + 1$.

Exercice 1709
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$.
1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1710
X MP 2005. Centrale PSI 2017. TPE MP 2005
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$
1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1711
Mines-Ponts PC 2019
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{u_n} - 1}{u_n}\right)$.

Exercice 1712
Mines-Ponts MP 2013
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\ln(u_n)}$.
1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 1713
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 < a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \ln(a - u_n)$.

Exercice 1714
Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \,]0,\mathrm{e}^a[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(a - \ln(u_n))$.

Exercice 1715
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1$.

Exercice 1716
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $a < b$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a + b - \dfrac{ab}{u_n}$.

Exercice 1717
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0;2[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n}{2 - u_n}}$.

Exercice 1718
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > -\dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(2u_n + 1)$.

Exercice 1719
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

Exercice 1720
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

Exercice 1721
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0;1]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=(1-u_n)^2$.

Exercice 1722
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [-2;2]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{2-u_n}$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1723
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n^2}$.

Exercice 1724
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n}$.

Exercice 1725
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{1-u_n}{1+u_n^2}$.

Exercice 1726
Soit $\lambda \in]0;1]$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;1[$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1-\lambda u_n^2$.

5.3 Autres suites récurrentes

Exercice 1727
X-ESPCI PC 2015
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $x_0=1$ et, pour tout n, $x_{n+1}=x_0\times\cdots\times x_n+2$.
Déterminer un équivalent de x_n.

Exercice 1728
Mines-Ponts MP 2016
Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=u_n+\dfrac{a}{(u_1\cdots u_n)^{\frac{1}{n}}}$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 1729
Centrale PC 2014
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1\in\mathbb{R}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\mathrm{e}^{-\frac{u_n}{n}}$.
1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 1730
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0=u_0$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}=\frac{v_n+u_{n+1}}{1+u_{n+1}v_n}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 1731
Centrale PC 2014
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{n+1+u_n}$.
Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 1732
X - ESPCI PC 2013
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}_+$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+n^2}$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1733
Mines-Ponts MP 2018
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n}$.
Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 1734
X MP 2007
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = |u_n - n|$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1735
X - ESPCI PC 2014. Mines-Ponts MP 2021
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n}{2n + 2^{n+1}u_n}$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1736
Mines-Ponts MP 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Déterminer un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 1737
Concours général 1995
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geqslant 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 1738
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.
Donner un équivalent puis un développement asymptotique de u_n.

Exercice 1739
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{1 + u_{n+1}u_n}$.
1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1740
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1 + u_n}{1 + u_{n+1}} u_{n+1}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1741
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(u_0,u_1) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.
1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   En déduire qu'elle est convergente puis déterminer sa limite.
   Aboutir à une contradiction.
2. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
3. Montrer que :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_{n+2} - 2| \leqslant \frac{1}{3}(|u_{n+1} - 2| + |u_n - 2|).$$
4. Soit $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite définie par $v_{n_0} = |u_{n_0} - 2|$, $v_{n_0+1} = |u_{n_0+1} - 2|$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_{n+2} = \dfrac{1}{3}(v_{n+1} + v_n)$.
   Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - 2| \leqslant v_n$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 1742
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0,u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(u_0,u_1) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.

1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   En déduire qu'elle est convergente puis déterminer sa limite.
   Aboutir à une contradiction.
2. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 2$.
3. Montrer que :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_{n+2} - 4| \leqslant \frac{1}{3}(|u_{n+1} - 4| + |u_n - 4|).$$
4. Soit $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite définie par $v_{n_0} = |u_{n_0} - 4|$, $v_{n_0+1} = |u_{n_0+1} - 4|$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_{n+2} = \dfrac{1}{3}(v_{n+1} + v_n)$.
   Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - 4| \leqslant v_n$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 1743
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(u_0,u_1) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{u_{n+1} + u_n}$.

Exercice 1744
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1 > u_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{2}$.

1. a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} > u_{n+1} > u_n > 1.$$
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{2}$ et $w_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(v_n)$.
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de u_{n+1} et u_n.
   b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{2u_{n+1}}{u_n^2} - 1\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   c) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant w_{n+1} - w_n \leqslant \frac{c}{2^{n+1}}.$$
   En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. a) Montrer que :
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad p > n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant w_p - w_n \leqslant \sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^{k+1}v_k} \leqslant \frac{1}{2^n v_n}.$$
   b) On note ℓ la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que :
$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant \ell - w_n \leqslant \frac{1}{2^n v_n}.$$
   c) En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1745
Centrale PSI 2021
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(u_0,u_1) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + a}{u_n + b}$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} \leqslant M = \frac{a(b+1)}{b^2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+5} \geqslant m = \frac{a}{M+b}.$$

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $b > 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\alpha_n = \inf\limits_{k\geqslant n} u_k$ et $\beta_n = \sup\limits_{k\geqslant n} u_k$.

2. Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
   On note α et β leurs limites respectives.

3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{n+2} \geqslant \frac{\alpha_{n+1}+a}{\beta_n+b} \qquad \text{et} \qquad \beta_{n+2} \leqslant \frac{\beta_{n+1}+a}{\alpha_n+b}.$$
En déduire que :
$$\alpha \geqslant \frac{\alpha+a}{\beta+b} \qquad \text{et} \qquad \beta \leqslant \frac{\beta+a}{\alpha+b}.$$
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1746
Mines-Ponts MP 2019
Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(u_0,u_1) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \ln(1+u_{n+1}) + \ln(1+u_n)$.

Exercice 1747
Mines-Ponts MP 2021
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2}$.
Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{2^n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication. — Considérer $\theta_n = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Exercice 1748
Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PSI 2015
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+nu_n^2}$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1749
X - ESPCI PC 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1750
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_n + (n+1)u_{n+1}}{n+2}.$$

Exercice 1751
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_{n-1}}{n+1}$.
Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5.4 Suites récurrentes simultanées

Exercice 1752
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(x_0,y_0) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0;0)\}$ et les relations de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n^2+y_n^2} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{x_n^2+y_n^2} \end{cases}$$
Étudier la convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1753

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0,w_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = v_n + \dfrac{1}{w_n} \\ v_n = w_n + \dfrac{1}{u_n} \\ w_n = u_n + \dfrac{1}{v_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas bornées.

Exercice 1754
ESCP Question courte 2017
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{v_n} \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_n}{u_{n+1}}(u_{n+1} - u_n).$$
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

Exercice 1755
Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $0 < u_0 < v_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

Exercice 1756
Soit $\alpha \in]0;1[$. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(u_0,v_0) \in]0;1[^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n^2 + (1-\alpha)v_n^2 \\ v_{n+1} = (1-\alpha)u_n^2 + \alpha)v_n^2 \end{cases}$$

Exercice 1757
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(u_0,v_0) \in]0;1[^2$, $u_0 \leqslant v_0$, et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n^{v_n} \\ v_{n+1} = v_n^{u_n} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 1758
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $1 \leqslant u_0 \leqslant v_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{v_n}}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + \sqrt{u_n}}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite que l'on déterminera.

Exercice 1759
Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{7 - v_n} \\ v_{n+1} = \sqrt{7 + u_n} \end{cases}$$

Exercice 1760
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0,w_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ \dfrac{3}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} + \dfrac{1}{w_n} \\ w_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite.

Exercice 1761
X - ESPCI PC 2015
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0) \in [0;1]^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \int_0^1 \min(x,v_n)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \int_0^1 \max(x,u_n)\mathrm{d}x.$$

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1762
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $-1 \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant w_0 \leqslant 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 \min(x,v_n,w_n)\mathrm{d}x \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 \text{milieu}(x,u_n,w_n)\mathrm{d}x \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 \max(x,u_n,v_n)\mathrm{d}x \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 1763
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $0 \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant w_0 \leqslant 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \min(x,v_n,w_n)\mathrm{d}x \\ v_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \text{milieu}(x,u_n,w_n)\mathrm{d}x \\ w_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \max(x,u_n,v_n)\mathrm{d}x \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 1764
Centrale MP 2005
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$, $w_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = |v_n - w_n| \\ v_{n+1} = |w_n - u_n| \\ w_{n+1} = |u_n - v_n| \end{cases}$$

Montrer que ces trois suites sont convergentes, l'une vers 0 et les deux autres vers des limites égales.

6 Suites implicites

Exercice 1765
CCP PSI 2016
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n.
2. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de x_n.

Exercice 1766
X - ESPCI PC 2013
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n.
2. Déterminer la limite puis un équivalent de x_n.

Exercice 1767
X MP 2011. X - ESPCI PC 2019. Mines-Ponts PC 2021. CCP PSI 2014
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n.
2. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de x_n.

Exercice 1768
ESCP Question courte 2006
Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n solution de l'équation :

$$\ln(x) + x = \frac{1}{n}$$

Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
En notant ℓ sa limite, donner un équivalent de $x_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 1769
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, unique, tel que $u_n + \ln(u_n) = n$.
Donner un développement asymptotique à 3 termes de u_n.

Exercice 1770
Centrale PC 2011
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$.
1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = n$ admet deux solutions u_n et v_n avec $0 < u_n < 1 < v_n$.
2. Étudier les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ en déterminant leurs limites éventuelles.
3. Déterminer des développements asymptotiques à deux termes de u_n et v_n.

Exercice 1771
Mines-Ponts PC 2018
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ possède une unique solution $x_n \in \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 1772
Mines-Ponts MP 2011
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\mathrm{cotan}(x) = x$ admet une unique solution x_n sur l'intervalle $]n\pi, n\pi + \pi[$.
2. Déterminer un équivalent de x_n.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n\pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

   Déterminer la nature des séries de termes généraux $x_n - n\pi$ et $(-1)^n(x_n - n\pi)$.

Exercice 1773
ENS PC 2015. Mines-Ponts PSI 2015. X MP 2005. CCINP PC 2021
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi \,/\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ par $f(x) = \tan(x) - x$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
2. Déterminer un développement asymptotique à 4 termes de x_n.

Exercice 1774

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, l'équation $\dfrac{x^n + x^{-n}}{x + x^{-1}} = n$ admet, sur $]0;1]$, une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 1775

Banque PT 2012

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $f_n(x) = x^n - \cos(x)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet, sur $[0;1]$, une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1776

X - ESPCI PC 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n le polynôme défini par $P_n(X) = X^{2n} + X^2 - 1$.

1. Montrer que P_n possède deux racines réelles de signes opposés.
   On note x_n la racine positive.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 1777

HEC ECS Exercice sans préparation 2006. X - ESPCI PC 2014

Soit, pour tout n entier non nul, $P_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0;1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$. (On définit ainsi une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$).
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que x_n converge vers un réel que l'on précisera.
4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $1 - x_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 1778

Mines-Ponts MP 2005

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1779

CCP PSI 2013. TPE PSI 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis celle de la série de terme général x_n^α selon les valeurs de α..

Exercice 1780

CCP PSI 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n + \sqrt{n}x - 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge puis déterminer un équivalent de x_n.

Exercice 1781

Mines-Ponts MP 2014

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x\mathrm{e}^{nx}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un équivalent de x_n.
4. Préciser la nature des séries de termes généraux x_n et x_n^2.

Exercice 1782

CCP PSI 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^x - nx$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n avec $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge puis déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.
3. Déterminer un équivalent de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$.

Exercice 1783
IMT MP 2013
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + nx - 1$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de x_n.

Exercice 1784
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n - x - n$.
1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de x_n.

Exercice 1785
X MP 2011. Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2009. Centrale PSI 2016. Centrale PC 2008. Telecom PSI 2013.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.
1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de x_n.

Exercice 1786
CCP PC 2010
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \ln(x) + \dfrac{x}{n} - 1$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet, sur $\mathbb{R}_+^*$, une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1787
CCP PC 2010
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x + \dfrac{n}{2}\ln(x) - n$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \left[1,\mathrm{e}^2\right]$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1788
Mines-Ponts PC 2011
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $]0;1[$ par $f_n(x) = (n-1)\ln(1-x) + nx$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un équivalent de x_n.

Exercice 1789
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^n\ln(x)$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 1790
Mines-Ponts PC 2019. Centrale PC 2016
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$.
1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2. Déterminer un développement asymptotique à 4 termes de x_n.

Exercice 1791
Mines-Ponts MP 2017. Centrale PC 2011

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$ admet, sur $\mathbb{R}_+$, deux solutions u_n et v_n avec $u_n < v_n$.
2. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n et v_n.

Exercice 1792
X MP 2013. Mines-Ponts PSI 2018. Centrale PSI 2017. ENSEA MP 2014. CCINP PSI 2021. IMT PSI 2013.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$ puis que, pour tout $n \geqslant 2$, $x_n \in]0;1[$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite ℓ.
3. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$

Exercice 1793
Mines-Ponts MP 2011
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k - 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente et déterminer sa limite.

Exercice 1794
Soit $\lambda \in]0;1[$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lambda \mathrm{e}^x$$
admet une unique solution x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 1795
Pour $n \geqslant 2$, on considère le polynôme réel $P = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k$
1. Combien le polynôme P_n a-t-il de racines réelles ?
2. Soit ρ_n l'unique racine strictement positive de P_n. Déterminer la limite de ρ_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P_n distincte de ρ_n. Montrer que $|\lambda| < \rho_n$.

Exercice 1796
Centrale PSI 2005
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$.
1. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n pour $n = 0{,}1$ et 2.
2. Pour quelles valeurs de n me polynôme P_n s'annule-t-il sur $\mathbb{R}$?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n l'unique racine de P_{2n+1}.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n \in [-2n - 1{,}0[$.
   En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers $-\infty$.
   Déterminer un équivalent de r_n.

Exercice 1797
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet, sur $\mathbb{R}_+$, une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1798
Mines-Ponts MP 2021. ESCP Question courte 2012
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $r_n \in]0;1[$ tel que $P_n'(r_n) = 0$.
2. Montrer que $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k}$.
   En déduire $\lim_{n\to+\infty} r_n$ ainsi qu'un équivalent de r_n.

Exercice 1799
Mines-Ponts MP 2013
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-k)$ et on note r_n la plus grande racine réelle de P_n'.
Montrer que $r_n \sim n$, puis déterminer un équivalent de $r_n - n$.

7 Divers

Exercice 1800
X ESPCI PC 2008
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^n - 3u_n$.
Déterminer les valeurs de a_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante.

Exercice 1801
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que a^n, b^n et c^n soient les longueurs des côtés d'un triangle pour une infinité d'entiers n.
Montrer que le triangle ayant a, b et c pour longueurs est isocèle.

Exercice 1802
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PSI 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer qu'il existe deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement croissante et décroissante telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$.

Exercice 1803
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \{\sqrt{n}\}$ est dense dans l'intervalle $[0,1[$.

Exercice 1804
Olympiades internationales 2014
Soit $a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots$ une suite infinies d'entiers strictement positifs.
Prouver qu'il existe un unique entier $n \geqslant 1$ tel que :

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Chapitre XVIII

Fonctions - Généralités

Exercice 1805
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z)f(\mathrm{i}z) = z^2.$$
Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) + f(-z) = 0.$$

Exercice 1806
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 1807
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement décroissante telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + f(x)) = x + f(x).$$
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = x.$$

Exercice 1808
Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y > x, \quad f(y) - f(x) > \sqrt{y-x}.$$

Exercice 1809
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geqslant 3f(x+2y+3z).$$

Exercice 1810
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

Exercice 1811
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 1812
Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)+xy=f(x)f(y).$$

Exercice 1813
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction strictement décroissante telle que:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)+f(f(x)+f(y))=f(f(x+f(y))+f(y+f(x)).$$

Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(f(x))=x.$$

Exercice 1814
Olympiades internationales 2008
Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\frac{(f(x))^2+(f(y))^2}{f\left(z^2\right)+f\left(t^2\right)}=\frac{x^2+y^2}{z^2+t^2}.$$

pour tout $(x,y,z,t)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$ avec $xy=zt$.

Exercice 1815
Soit $a\in\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:]-a,a[\longrightarrow I$ une fonction bijective et impaire.
Montrer que f^{-1} est impaire.

Exercice 1816
Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ monotone et périodique.

Exercice 1817
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x).$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 1818
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique. On suppose que l'ensemble $\{f(n)\,/\,n\in\mathbb{N}^*\}$ admet une infinité d'éléments.
Montrer que la période de f et un nombre irrationnel.

Exercice 1819
IMO 1968
Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}.$$

1. Montrer que la fonction f est périodique.
2. Donner un exemple de telle fonction si $a=1$.

Exercice 1820
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{3\}$ une fonction. On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+a)=\frac{f(x)-5}{f(x)-3}$$

Montrer que la fonction f est périodique.

Exercice 1821
Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(g(x)) = g(f(x)) = -x.$$

Montrer que f et g sont impaires.

Exercice 1822
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(a+x) = f(a-x) \quad \text{et} \quad f(2a+x) = -f(2a-x).$$

Montrer que la fonction f est périodique et impaire.

Exercice 1823
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$;
- $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = -1$.

Montrer que la fonction f est périodique.

Exercice 1824
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right) = f(x) + f\left(x + \frac{13}{42}\right).$$

Montrer que la fonction f est périodique.

Exercice 1825
Mines-Ponts PC 2021
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non injective et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = g(f(x),y).$$

Montrer que la fonction f est périodique.

Exercice 1826
Mines / Ponts et Chaussées 2001
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction croissante.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 1827
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f,g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ deux fonctions croissantes telles que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que f et g admettent un point fixe commun.

Chapitre XIX

Fonctions - Limites et continuité

1 Limite

Exercice 1828
Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[$ une fonction croissante et $g :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et que g est croissante sur $]a, +\infty[$.
Montrer que la fonction f est constante.

Exercice 1829
Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 1830
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{m \to +\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}$.
Montrer que $f = \mathbb{1}_{|\mathbb{Q}}$.

Exercice 1831
Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{e}^x$.

2 Continuité

Exercice 1832
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xf(y)) = xy.$$

Exercice 1833
X MP 2014
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.
Montrer que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1834
X - ESPCI PC 2014
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) - f(x) = x.$$

Exercice 1835
X MP - MPI 2023
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que f est à la fois 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique.
Montrer que la fonction f est constante.

Exercice 1836
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Exercice 1837
Mines-Ponts MP 2019. Centrale PC 2008
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \longmapsto f(x)$ est croissante et $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1838
Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \quad \text{avec} \quad x = \dfrac{p}{q}, \quad p \wedge q = 1. \end{cases}$$

3 Continuité sur un intervalle

Exercice 1839
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) > f(x) > 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda > 1$ tel que :

$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) \geqslant \lambda f(x).$$

Exercice 1840
Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 1841
Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I telle que $I \subset f(I)$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 1842
Mines-Ponts MP 2001
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \circ f$ admet un point fixe.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 1843
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que la fonction $|f|$ est constante sur I.
Montrer que la fonction f est constante sur I.

Exercice 1844
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in I$, $(f(x))^2 = f(x)$.
Montrer que la fonction f est constante sur I.

Exercice 1845
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer que, pour tout $a \in [0;1]$, il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(a+c) = f(c)$.

Exercice 1846
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell<1$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 1847
X - ESPCI PC 2019
Soit $t\in\mathbb{R}$ et f une fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f(c+t)=f(c)$.

Exercice 1848
Centrale PSI 2013
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue décroissante.
Montrer que la fonction f admet un unique point fixe.

Exercice 1849
Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Déterminer les valeurs de $m\in\mathbb{R}$ pour lesquelles l'équation :

$$|x-a|+|x-b|+|x+a|+|x+b|=m(a+b)$$

admet au moins une solution réelle.

Exercice 1850
Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que le système :

$$\begin{cases} x=f(y)\\ y=f(z)\\ z=f(x)\end{cases}$$

a une unique solution.

Exercice 1851
Soit $I=[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur I telles que $f(a)=g(b)=0$ et $f(b)=g(a)=1$.
Montrer que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+$, il existe $\alpha\in[0;1]$ tel que $f(\alpha)=\lambda g(\alpha)$.

Exercice 1852
X - ESPCI PC 2017. Mines-Ponts MP 2021
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, f une fonction continue sur $[a,b]$ et $(p,q)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.
Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que :

$$(p+q)f(c)=pf(a)+qf(b).$$

Exercice 1853
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in[0;1]^n$.
Montrer qu'il existe $c\in[0;1]$ tel que :

$$f(c)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k).$$

Exercice 1854
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in[0;1]^n$.
Montrer qu'il existe $c\in[0;1]$ tel que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|c-x_k|=\frac{1}{2}.$$

Exercice 1855
Soit P un polynôme non nul. Montrer que l'équation $|P(x)|=\mathrm{e}^x$ admet au moins une solution.

Exercice 1856
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$, et $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)$.
Montrer que le polynôme $P = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) + \beta \prod_{k=1}^{n} (X - b_k)$ admet n racines réelles.

Exercice 1857
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, P et Q les polynômes définis par :

$$P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k - 1} X^k.$$

Montrer que, si 1 et 2^{n+1} sont des racines de Q, alors P a une racine inférieure à 2^n.

Exercice 1858
Mines-Ponts MP 2018
Soit $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ avec $a \neq 0$, $P = aX^2 + (c-b)X + e - d$ et $Q = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$.
Montrer que, si P possède une racine dans $[1, +\infty[$, alors Q possède une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1859
X MP 2013
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et minorée.
Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) - f(x) \leqslant |x - x_0|.$$

Exercice 1860
Un marcheur parcourt 10 km en deux heures.
Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il parcourt exactement 5 km.

Exercice 1861
Un moine part de son monastère à 7 h du matin. Il monte jusqu'au sommet d'une montagne, s'arrêtant quand il est fatigué et selon son rythme. Il arrive au sommet à midi. Il y passe l'après midi, y dort et repart le lendemain à 7 h en suivant exactement le même chemin qu'à l'aller pour arriver à midi au monastère.
Montrer qu'il existe un endroit où le moine est passé exactement à la même heure que la veille.

Exercice 1862
Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$ et $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe deux points de $\mathbb{U}$ diamétralement opposés ayant même image par f.

Exercice 1863
Existe-t-il une application $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\exp(f(z)) = z$?

Exercice 1864
X - ESPCI PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{U}^n$.
Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $\prod_{k=1}^{n} |z - z_k| = 1$.

Exercice 1865
Concours général 2005
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f\left(x + \dfrac{3}{10}\right) \neq f(x)$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{7}{10}\right]$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins sept zéros dans l'intervalle $[0;1]$.
2. Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses; on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

Exercice 1866
Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 1867 - Théorème des cordes universelles de Paul Lévy
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_f$ admet une corde horizontale de longueur $\dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que, si ℓ n'est pas de la forme $\dfrac{1}{n}$, alors $\mathcal{C}_f$ n'admet pas nécessairement une corde horizontale de longueur $\ell \in]0;1[$.
3. Montrer que, si $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de corde horizontale de longueur $\ell \in]0;1[$, alors elle admet deux cordes horizontales de longueurs $1-\ell$.

Exercice 1868
Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que :
$$\forall x_1 \in I, \quad \exists x_2 \in I, \quad f(x_1) = g(x_2).$$
Montrer qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Exercice 1869
Montrer qu'il n'existe aucune fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 1870
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ f \circ f(x) + f(x) = 2x.$$

Exercice 1871
ENS MP 2007
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :
– f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, *i.e.* l'image de tout intervalle de $\mathbb{R}$ par f est un intervalle;
– pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1872
Mines-Ponts MP 2016
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective.
1. Montrer que f admet une infinité de zéros.
2. Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f.

Exercice 1873
ENS MP 2007
Montrer qu'il n'existe aucune fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que tout réel admet exactement deux antécédents par f.

Exercice 1874
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que tout réel admet au plus deux antécédents par f.
Montrer qu'il existe un réel admettant exactement un antécédent par f.

Exercice 1875
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et K un segment inclus dans $f(I)$.
Montrer qu'il existe un segment $J \subset I$ tel que $f(J) = K$.

Exercice 1876
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.
On suppose qu'il existe une fonction continue $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle la fonction $f + g$ est décroissante.
Montrer que la fonction f s'annule sur $[a,b]$.

Exercice 1877
Mines-Ponts PSI 2016
Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g$ est décroissante.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe.

Exercice 1878
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$, unique, tel que $\left(\sqrt{2}+1\right)^n = \sqrt{p+1}+\sqrt{p}$

Exercice 1879
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que :

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} g(x).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 1880
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que :

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \inf_{x\in[a,b]} g(x) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} g(x) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 1881
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2021
Soit f et g deux fonctions continues de $[0;1]$ dans lui-même et telles que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in [0;1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Exercice 1882
X PC 2001. Olympiades internationales 1992
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(x^2+f(y)\right) = y + (f(x))^2.$$

Exercice 1883
Mines-Ponts PC 2021
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

Exercice 1884
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ où $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).
Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ ou $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 1885
Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, où f^n désigne la n-ième itérée de f.

Exercice 1886
Mines-Ponts PC 2021
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0;1],[0;1])$ telles que $f \circ f = f$.

Exercice 1887
X PC 2001
Montrer que l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \sum\limits_{k=1}^{70} \dfrac{k}{x-k} \geqslant \dfrac{5}{4}\right\}$ est une réunion finie d'intervalles disjoints.
Calculer la somme de leurs longueurs.

Exercice 1888
X - ESPCI PC 2019
1. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

2. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{3^n}.$$

3. Soit $c \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) = c\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

a) pour $c \in]-1;1[$;
b) pour $c = -1$;
c) pour $c = 2$.

4 Continuité uniforme

Exercice 1889
Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1890
Montrer que la fonction ln est uniformément continue sur $[1,+\infty[$ mais ne l'est pas sur $]0;1]$.

Exercice 1891
La fonction $x \longmapsto \cos(x\sin(x))$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1892
Mines-Ponts MP 2016
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_\alpha(x) = \cos(x^\alpha)$.
La fonction f_α est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 1893
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est uniformément continue sur $[a,+\infty[$.

Exercice 1894
Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1895
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(nx) = 0$.

Exercice 1896
Mines-Ponts MP 2018
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant a|x| + b.$$

Exercice 1897
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$.
1. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

2. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Chapitre XX

Fonctions - Dérivation

1 Généralités

Exercice 1898
ESCP Question courte 2008
Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $(k,\alpha)\in\mathbb{R}_+^*\times]1,+\infty[$ tel que :

$$\forall(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad |f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|^\alpha.$$

A-t-on le même résultat si on suppose que $\alpha\in]0;1[$?

Exercice 1899
ENS PC 2018
Soit $(f,g)\in\left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)^2$ et $a\in\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\leqslant g(x)\qquad\text{et}\qquad f(a)=g(a).$$

Montrer que les tangentes aux courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et g au point d'abscisse a sont égales.

Exercice 1900
X MP 2012
Déterminer $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

Exercice 1901
Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, dérivables en 0, telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)=2f(x).$$

Exercice 1902
Déterminer les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$, dérivables en 1, telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f\left(x^2\right)=2f(x).$$

Exercice 1903
Déterminer les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, dérivables en 0, telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)=(f(x))^2.$$

Exercice 1904
X - ESPCI PC 2019
Soit I un intervalle ouvert contenant 0, f une fonction définie sur I, continue en 0. On suppose que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ admet une limite finie ℓ en 0.
Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0)=\ell$.

Exercice 1905
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0.
On suppose qu'il existe $k \in]0;1[$ tel que $\ell = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(kx)}{x}$ existe et soit finie.
Montrer que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de ℓ et k.

Exercice 1906
X - ESPCI PC 2011
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 4f(x) + 3x + 1$.

Exercice 1907
ENSAE 2001
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ f)(x) = 3 + \frac{x}{2}.$$

Exercice 1908
X - ESPCI PC 2017. Mines-Ponts PC 2019
1. Montrer que la fonction cos admet dans $\mathbb{R}$ un unique point fixe.
2. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f \circ f = \cos$.

Exercice 1909 - Formule de Vandermonde
1. Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $p \leqslant m+n$. En calculant la dérivée p-ième de $x \longmapsto x^{m+n}$ de deux façons, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 1910
Centrale PC 2008
Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n!.$$

Exercice 1911
1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arctan}^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(\mathrm{Arctan}(x))\sin\left(n\left(\mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

2. En déduire les racines de $\mathrm{Arctan}^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1912
Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]1,+\infty[, \quad f^{(2n+1)}(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]1,+\infty[, \quad f^{(2n)}(x) < 0.$$

Exercice 1913
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^n \ln(x)$.
1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(n)}(x) = n! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right).$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 1914
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} k^n = (-1)^{n+1} n!.$$

Indication. — Remarquer que, si f est la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$, alors on a $f^{(n)}(0) = k^n$.

Exercice 1915
Mines-Ponts MP 2013
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n x^{n+1} f_n^{(n)}(x).$$

Exercice 1916
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2 Étude de fonctions

Exercice 1917
Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant \min(m,n), \quad \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1.$$

Exercice 1918
Montrer que :

$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, \quad 2x < \sin(2x) + \tan(x).$$

Exercice 1919
Montrer que :

$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, \quad 3x < 2\sin(x) + \tan(x).$$

Exercice 1920
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x(2 + \cos(x)) \geqslant 3\sin(x).$$

Exercice 1921
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{2n}(x) + \sin^{2n}(x) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 1922
Montrer que :
$$\forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, +\infty\right[, \quad \left(1+\frac{1}{x^2}\right) x \sin\left(\frac{1}{x}\right) > 1.$$

Exercice 1923
Montrer que :
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cos(x) < \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2.$$

Exercice 1924
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$
Montrer que :
$$\forall (x_1,x_2) \in]0;1[^2 \quad , \quad x_1 + x_2 < 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1+x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

Exercice 1925
Montrer que :
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{1}{\sin^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}.$$

Exercice 1926
Montrer que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi} x + \frac{x}{12\pi}\left(\pi^2 - 4x^2\right).$$

Exercice 1927
Montrer que :
$$\forall x \in [0,\pi], \quad \sin^2(x) \leqslant \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x).$$

Exercice 1928
Montrer que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \sin(\tan(x)) \geqslant x.$$

Exercice 1929
Montrer que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad \tan(\sin(x)) \geqslant x.$$

Exercice 1930
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x)).$$

Exercice 1931
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left(x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{Arctan}(x) > 1.$$

Exercice 1932
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{Arctan}(x) \geqslant \frac{3x}{1 + 2\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 1933
Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Montrer que :
$$\forall x \in [0;1], \quad \frac{1}{2^{\alpha-1}} \leqslant x^\alpha + (1-x)^\alpha \leqslant 1.$$

Exercice 1934
1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$
2. En déduire que $\mathrm{e}^\pi < \pi^{\mathrm{e}}$.

Exercice 1935
Montrer que :
$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad \ln(1+\cos(x)) \leqslant \ln(2) - \frac{x^2}{4}.$$

Exercice 1936
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant (1+x)\ln(1+x) \leqslant x + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 1937
1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad 0 < \frac{x\ln(x)}{x^2-1} < \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que $2^{\sqrt{2}} < \mathrm{e}$.

Exercice 1938
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{2}{2x+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

Exercice 1939
1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$
2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x(\ln(x))^2 \leqslant (x-1)^2.$$

Exercice 1940
Montrer que :
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x - \frac{5x^2}{6(2+x)}.$$

Exercice 1941
Montrer que :
$$\forall k \geqslant 2, \quad \forall x \in [0;1], \quad 0 \leqslant \ln\left(1-\frac{x}{k}\right) - x\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{2x(1-x)}{k^2}.$$

Exercice 1942
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n}$.
Montrer que :
$$\forall x \in [0;1], \quad \prod_{k=1}^{n}(xa_k + (1-x)b_k) \leqslant \max\left(\prod_{k=1}^{n} a_k, \prod_{k=1}^{n} b_k\right)$$

si, et seulement si, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-b_k}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-b_k}{b_k}\right)\geqslant 0.$$

Exercice 1943
Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)<\frac{1}{x}+\ln(x).$$

Exercice 1944
1. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^x\leqslant x\mathrm{e}^x+1.$$

2. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \mathrm{e}^x\leqslant x^2\mathrm{e}^x+x+1.$$

Exercice 1945
Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \mathrm{e}^x\leqslant(1+x)^{1+x}.$$

Exercice 1946
Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leqslant x^x.$$

Exercice 1947
Montrer que :

$$\forall x\in[0,\mathrm{e}[,\quad (\mathrm{e}+x)^{\mathrm{e}-x}\geqslant(\mathrm{e}-x)^{\mathrm{e}+x}.$$

Exercice 1948
Montrer que :

$$\forall x\in]0;1[,\quad x^x(1-x)^{1-x}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Exercice 1949
Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2n+1}.$$

Exercice 1950
Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\leqslant\frac{x}{n}\left(\mathrm{e}^x-1\right).$$

Exercice 1951
Soit $(a,b)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[^2$, $a\leqslant b$. Montrer que :

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{\sin(a)}{\sin(b)}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{a}{b}.$$

Exercice 1952
Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $a\leqslant b$. Montrer que :

$$\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a\leqslant b\mathrm{e}^b-a\mathrm{e}^a.$$

Exercice 1953

1. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad y > x, \quad \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}.$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}.$$

Exercice 1954

Soit $(a,b) \in [1,+\infty[$, $a \leqslant b$. Montrer que : $b^{a-1} \leqslant a^{b-1}$.

Exercice 1955

Montrer que :
$$\forall (a,b) \in [1,+\infty[, \quad a \leqslant b, \quad \forall x \in]0;1], \quad (1+x^a)^b \geqslant \left(1+x^b\right)^a.$$

Exercice 1956

IMT PC 2009

Montrer que :
$$\forall (a,b) \in [1,+\infty[^2, \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad 1 + x^a y^b \leqslant (1+x)^a(1+y)^b.$$

Exercice 1957

Montrer que :
$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad x^y + y^x > 1.$$

Exercice 1958

Montrer que :
$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \mathrm{e}^{x-1} + \ln(x) - 2x + 1 \geqslant 0.$$

Exercice 1959

Montrer que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad xy \leqslant \mathrm{e}^x + y(\ln(y)-1)$$
avec égalité si, et seulement si, $y = \mathrm{e}^x$.

Exercice 1960

Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 3, \quad \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

Exercice 1961

Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 8, \quad \sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}.$$

Exercice 1962

Soit $(x,p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ avec $p < q$. Montrer que :
$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p < \left(1+\frac{x}{q}\right)^q.$$

Exercice 1963

Mines-Ponts PSI 2016

1. Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left(1+\frac{1}{t}\right)^t < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}.$$

2. En déduire que :
$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \left(1+\frac{x}{y}\right)^y < \mathrm{e}^x < \left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}.$$

Exercice 1964
CCP PC 2018
Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(x) = f(x)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f'(x) + f(x) = \lambda \mathrm{e}^x$.

Exercice 1965
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f''(x) \geqslant 0.$$
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0.$$

Exercice 1966
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f''(x) \leqslant f(x).$$
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant \operatorname{ch}(x).$$

Exercice 1967
X - ESPCI PC 2016
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\forall x \in [0;1], \quad |f'(x)| \leqslant M|f(x)|.$$
Montrer que f ne s'annule pas sur $[0;1]$.

3 Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis

3.1 Théorème de Rolle

Exercice 1968
Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1969
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ sont finies et égales.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1970
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a)f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $(c_1,c_2,c_3) \in]a,b[^3$ avec $c_1 < c_2 < c_3$ tel que $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 1971
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PSI 2015. X PC 2007. CCP PSI 2013
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n, scindé sur $\mathbb{R}$.
1. Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P^{(k)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

On pose $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

2. Montrer que :
$$\forall k \in [\![1,n-1]\!], \quad a_{k+1}a_{k-1} \leqslant a_k^2.$$

3. On suppose que les racines de P sont simples.
   Montrer qu'un coefficient nul de P ne peut pas être encadré par deux coefficients non nuls de même signe.
4. On suppose que les racines de P sont simples.
   Montrer que deux coefficients consécutifs de P ne peuvent être nuls.

Exercice 1972
Mines-Ponts PC 2005
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n ayant n racines réelles distinctes.
Montrer que $P^2 + 1$ a $2n$ racines complexes distinctes.

Exercice 1973
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$ admet au moins une solution dans $]0;1[$.

Exercice 1974
Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$. Montrer que l'équation $a\cos(x) + b\cos(2x) + c\cos(3x) + d\sin(x) + e\sin(2x) + f\sin(3x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0,2\pi[$.

Exercice 1975
Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + g(x) = f'(x) - g'(x).$$

Montrer que, si x_1 et x_2 sont deux solutions consécutives de l'équation $f(x) = g(x)$, alors l'équation $f(x) + g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]x_1,x_2[$.

Exercice 1976
X - ESPCI PC 2013
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $f''(c) = 2$.

Exercice 1977
X - ESPCI PC 2019
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n + ax + b$.
1. Montrer que la fonction f s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de fonction avec trois racines réelles distinctes.
3. Montrer que, si n est pair, alors f s'annule au plus deux fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1978
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1979
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $bf(a) = af(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = cf'(c).$$

Exercice 1980
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(c)f'(c) = c$$

Exercice 1981
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}.$$

Exercice 1982
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables. On suppose que sa courbe représentative rencontre la droite d'équation $y = x$ au moins trois fois.
Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f''(\gamma) = 0$.

Exercice 1983
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $x_0 \notin [a,b]$ et f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c passe par le point de coordonnées $(x_0,0)$.

Exercice 1984
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0,a[$.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à la courbe de représentative de f passe par l'origine.

Exercice 1985
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c passe par le point de coordonnées $(c-1,0)$.

Exercice 1986
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) + \alpha f(c) = 0.$$

Exercice 1987
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$

Exercice 1988
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, qui ne s'annule pas sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}.$$

Exercice 1989
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1;1]$ s'annulant en -1, 0 et 1, et g la fonction définie sur $[-1;1]$ par $g(x) = 2x^4 + x + f(x)$.
Montrer qu'il existe $c \in]-1;1$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 1990
X-ESPCI PC 2017
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f''(c) = f(c).$$

Exercice 1991
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = f'(b)$.
Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f''(c) = \lambda(f'(c))^2.$$

Exercice 1992
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$. On suppose que f admet au moins trois zéros distincts sur $[a,b]$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f''(c) + f(c) = 2f'(c).$$

Exercice 1993
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$g'(c)f(c) + f'(c) = 0$$

Exercice 1994
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Exercice 1995
Centrale PC 2018
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et g définie sur $[a,b[$ par
$$g(x) = (f(x) - f(a)) \exp\left(\frac{1}{x - b}\right).$$

1. Montrer que g est dérivable sur $]a,b[$ et calculer g'.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{(c - b)^2}.$$

Exercice 1996 - Théorème de Flett
Mines-Ponts MP 2021
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(a) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Exercice 1997
1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que, pour tout $x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$.
Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$ puis qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2. Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $a < b$, et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(c) - cf'(c).$$

Exercice 1998
Soit $(\alpha,\beta) \in]1,+\infty[^2$ et f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que :
$$\alpha\frac{f'(c)}{f(c)} = \beta\frac{f'(1 - c)}{f(1 - c)}.$$

Exercice 1999
Mines-Ponts MP 2017
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a,b]$, n fois dérivable sur $]a,b[$, telle que, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $f^{(k)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(\alpha) = 0$.

Exercice 2000
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a,b]$, n fois dérivable sur $]a,b[$, et $(a_1,\dots,a_n) \in I^n$, n zéros distincts de f $(a_1 < \dots < a_n)$.
Montrer que :

$$\forall x \in [a_1,a_n], \quad \exists \alpha \in]a_1,a_n[, \quad f(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-a_1)\cdots(x-a_n).$$

Exercice 2001
Mines-Ponts MP 2017
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$.
Montrer que :

$$\forall x \in]a,b[, \quad \exists c \in]a,b[, \quad f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c).$$

Exercice 2002
Soit I un intervalle d'intérieur non vide, $(a,b,c) \in I^3$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I.
Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d).$$

Exercice 2003
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et trois fois dérivable sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c).$$

Exercice 2004
X PSI 2005
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.
Montrer que :

$$\forall x \in [0;1], \quad \exists \alpha \in]0;1[, \quad f(x) = \frac{f^{(4)}(\alpha)}{24}x^2(1-x)^2.$$

Exercice 2005
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$Q(X) = \left(X^2+1\right)P(X)P'(X) + X\left((P(X))^2 + (P'(X))^2\right).$$

Montrer que, si P admet au moins n racines réelles distinctes strictement supérieures à 1 ($n \in \mathbb{N}^*$), alors Q admet au moins $2n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 2006
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ tel que l'ensemble Z des zéros de f soit infini.
Montrer que f et f' ont au moins un zéro commun.

Exercice 2007
Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0,\dots,0\}$, $b_0,\dots,b_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{e}^{b_k x}.$$

Montrer que la fonction f s'annule en au plus n réels.

3.2 Théorème des accroissements finis

Exercice 2008
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_-)^2$. Montrer que :
$$|\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a| \leqslant |b-a|.$$

Exercice 2009
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $a \leqslant b$. Montrer que :
$$\frac{b-a}{b^2+1} \leqslant \operatorname{Arctan}(b) - \operatorname{Arctan}(a) \leqslant \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Exercice 2010
IMT PSI 2016
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x.$$

Exercice 2011
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $a \leqslant b$. Montrer que :
$$\frac{b-a}{b} \leqslant \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \frac{b-a}{a}.$$

Exercice 2012
X - ESPCI PC 2011
1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Déterminer :
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}.$$

Exercice 2013
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(0)=0$ et f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) \geqslant \frac{f(x)}{x}.$$

Exercice 2014
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};[-1;1])$ telle que :
$$(f(0))^2 + (f'(0))^2 = 4.$$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :
$$f(x) + f''(c) = 0.$$

Exercice 2015
X MP 2008
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf'(x) + f(x) \in [a,b].$$
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in [a,b].$$

Exercice 2016
Soit f une fonction dérivable et bornée sur $\mathbb{R}_+$ telle que f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 2017
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de $[0;1]$, deux à deux distincts, tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n.$$

Exercice 2018
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de $[0;1]$, deux à deux distincts, tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = n.$$

Exercice 2019
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f'' soit positive sur $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + f'(x)) \geqslant f(x).$$

Exercice 2020
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et à valeurs strictement positives.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right).$$

Exercice 2021
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}.$$

Exercice 2022
Soit $(x,p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ avec $p < q$.
En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q.$$

Exercice 2023
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $a < b$. Montrer qu'il existe $(x,y) \in]a,b[^2$ tel que :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{x+y} = a^x b^y.$$

Exercice 2024
X - ESPCI PC 2019
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que $|f| + |1 + f'| \leqslant 1$.

Exercice 2025
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Monter qu'il existe $(\alpha_1,\alpha_2) \in]0;1[^2$ tel que $f'(\alpha_1)f'(\alpha_2) = 1$.
2. Monter qu'il existe $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in]0;1[^3$ tels que $f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)f'(\alpha_3) = 1$.

Exercice 2026
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On suppose que f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
2. La conclusion subsiste-t-elle si on ne suppose plus f' uniformément continue ?

Exercice 2027
Soit $(\ell,\ell') \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telles que :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+} xf'(x) = \ell'.$$

Montrer que $\ell' = 0$.

Exercice 2028
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 2029 - Théorème de Darboux
X MP 2017. Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PC 2021
Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 2030
Résoudre sur $[1,+\infty[$ l'équation : $9^x - 8^x = x^2$.

Exercice 2031
On a :

$$2^0 + 5^0 = 3^0 + 4^0 \qquad \text{et} \qquad 2^1 + 5^1 = 3^1 + 4^1.$$

Existe-t-il d'autres réels x tels que :

$$2^x + 5^x = 3^x + 4^x\,?$$

Exercice 2032
On a :

$$2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2 \qquad \text{et} \qquad 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Existe-t-il deux couples distincts (x_1,y_1) et (x_2,y_2) d'entiers naturels non nuls tels que les égalités :

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \qquad \text{et} \qquad x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3$$

soient vérifiées simultanément ?

Exercice 2033
Soit p un nombre premier et a,b,c,d des entiers positifs distincts tels que $a^p + b^p = c^p + d^p$.
Montrer que :

$$|a - c| + |c - d| \geqslant p.$$

Exercice 2034
X MP 2014

1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\Delta(f) : x \longmapsto f(x+1) - f(x)$.
   Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists t_n(x) \in]0;1[, \quad \Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x + nt_n(x)).$$
   où $\Delta^n(f) = \Delta(f) \circ \cdots \circ \Delta(f)$ (n fois).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}$.

4 Formules de Taylor

4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Exercice 2035
En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right)$, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 2036
X MP 2018
Montrer que :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}, \quad \frac{\sin(t)}{t} \leqslant 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}.$$

Exercice 2037
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 1 - \frac{x}{3}x + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leqslant 1 - \frac{x}{3}x + \frac{2x^2}{9}.$$

Exercice 2038
Déterminer le minimum de $\displaystyle\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x$ dans l'ensemble E des fonctions $f \in \mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a$ où a est un réel donné.

Exercice 2039
X MP 2016. Mines-Ponts MP 2017
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\|f'\|_\infty \leqslant \frac{2}{b-a}\|f\|_\infty + \frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty.$$

4.2 Formules de Taylor-Lagrange

Exercice 2040
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Exercice 2041
X - ESPCI PC 2010. CCINP MP 2019
Soit P un polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant |P(x)|.$$

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(\alpha) = 0$.
2. Montrer que la fonction f est nulle.
3. Le résultat subsiste-t-il si P est de degré pair ?

Exercice 2042
Soit $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} xf''(x) = 0.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

Exercice 2043
X MP 2013
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que $|f''(\alpha)| \geqslant 4$.

Exercice 2044
Soit $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable telle que $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in]-1;1[$ tel que $f^{(3)}(\alpha) \geqslant 3$.

Exercice 2045
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que f'' est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 2046
Mines-Ponts MP 2013
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2047
Soit $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$.
Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $c \in]a,a+2h[$ tel que

$$f(a+2h) = 5f(a) - 4f(a+h) + 2h(f'(a) + 2f'(a+h)) + \frac{h^4}{6} f^{(4)}(c).$$

Exercice 2048
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et trois fois dérivable sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(c).$$

Exercice 2049
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4$, cinq fois dérivable.
Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f''(b) - f''(a)) + \frac{(b-a)^5}{720} f^{(5)}(c).$$

Exercice 2050
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité de Taylor-Lagrange assure que :

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \theta_n(h) \in]0;1[, \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^k(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_n(h))$$

1. On suppose que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$.
   Montrer que :
   $$\lim_{h\to 0} \theta_n(h) = \frac{1}{n+1}.$$
   Que peut-on dire de θ_n si f est une fonction polynomiale de degré au plus égal à $n+1$?
2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :
   $$f^{(n+1)}(a) = f^{(n+2)}(a) = \cdots = f^{(n+p-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(n+p)}(a) \neq 0.$$
   Montrer que :
   $$\lim_{h\to 0} \theta_n(h) = \sqrt[p]{\frac{n!p!}{(n+p)!}}.$$

Exercice 2051 - Inégalités de Kolmogorov
X MP 2021. Mines-Ponts MP 2016
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$.
Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, M_k est fini et :

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

4.3 Formule de Taylor-Young

Exercice 2052
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les limites :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

Exercice 2053
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}$$

Exercice 2054
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2.$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f''(x) \geqslant f'(x)^2.$$
2. On suppose de plus que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que la fonction $\ln \circ f$ puis que f est convexe.

Exercice 2055
Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \exists \theta(h) \in]0,1[, \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta(h)h).$$

Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = \dfrac{1}{n+1}$.

5 Fonctions convexes

Exercice 2056
Montrer que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ en revenant à la définition.

Exercice 2057
Montrer que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ en revenant à la définition.

Exercice 2058
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions convexes sur I.
1. Montrer que la fonction $\max(f,g)$ est convexe sur I.
2. La fonction $\min(f,g)$ est-elle convexe sur I ?

Exercice 2059
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions convexes, positives et de même monotonie sur I.
Montrer que la fonction fg est convexe sur I.

Exercice 2060
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone, surjective et convexe.
Étudier la convexité de f^{-1}.

Exercice 2061
1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b,c) \in I^3$, $a < b < c$, et f une fonction convexe sur I.
   Montrer que :
   $$f(a-b+c) \leqslant f(a) - f(b) + f(c).$$
2. *Application*
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(a_1,a_2,a_3) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$, $a_1 < a_2 < a_3$. Montrer que :
   $$\sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3} \geqslant \sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3}.$$

Exercice 2062
Montrer qu'une fonction est à la fois convexe et concave si, et seulement si, elle est affine.

Exercice 2063
X MP 2013
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction concave.
Montrer que f est sous-additive sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire :
$$\forall (x_1,x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2).$$

Exercice 2064
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x < y$ et $z < t$.
Montrer que :
$$f(x+t) + f(y+z) \leqslant f(x+z) + f(y+t).$$

Exercice 2065 - Inégalité de Popoviciu
ENS MP 2018
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que :
$$\frac{2}{3}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{3}(f(x)+f(y)+f(z)) + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Exercice 2066
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine telles que :
$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad f(a) = g(a) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$
Montrer que les fonctions f et g sont égales.

Exercice 2067 - Fonction logarithmiquement convexe
1. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. On suppose de plus que g est croissante.
   Montrer que la fonction $g \circ f$ est convexe.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction. f est dite logarithmiquement convexe (ou log-convexe) si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.
   a) Soit X une variable aléatoire possédant une densité φ et telle que l'espérance $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{sX}\right)$ soit définie pour tout $s \in \mathbb{R}$.
      Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(s) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{sX}\right)$ est logarithmiquement convexe.

b) Montrer que si la fonction f est logarithmiquement convexe, alors elle est convexe.
Étudier la réciproque

c) Montrer que f est logarithmiquement convexe si, et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha : x \longmapsto f(x)\alpha^x$ est convexe.

d) Soit $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
Montrer que, si f et g sont logarithmiquement convexes, alors la fonction $f+g$ est logarithmiquement convexe.

Exercice 2068
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que si f est convexe et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. f est dite sous-additive sur $\mathbb{R}_+^*$ si on a :

$$\forall (x_1,x_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2).$$

a) Montrer que si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f est sous-additive sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que si la fonction f est convexe et sous-additive sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2069
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x) - \ell x$ tend vers une limite finie ou vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$.
3. a) On suppose que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
Montrer que la fonction f est positive.
b) On suppose que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote $\mathcal{D}$.
Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{D}$.

Exercice 2070
Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction convexe et strictement croissante définie sur $[a, +\infty[$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 2071
Mines-Ponts MP 2016

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que la fonction f est constante.
2. La conclusion subsiste-t-elle pour $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$?

Exercice 2072
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 2073
CCP-TPE-INT-IVP 1996
Soit $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$. On pose $g(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que les fonctions f et g sont simultanément convexes.

Exercice 2074
Mines-Ponts MP 2019
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que $x \longmapsto xf(x)$ est convexe si, et seulement si, $x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est convexe.

Exercice 2075
Soit I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Montrer que la fonction f est continue sur I.

Exercice 2076
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.
1. a) Montrer que si f admet un minimum local, alors il s'agit d'un minimum global.
   b) Que peut-on dire de l'ensemble des points où f atteint son minimum ?
2. On suppose que f est dérivable et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$.
   Montrer que f admet un minimum global en a.
3. On suppose que f est deux fois dérivable et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geqslant \alpha$.
   Montrer que f admet un minimum unique.
   A-t-on encore ce résultat si on suppose uniquement $f'' > 0$?

Exercice 2077
Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que, pour tout $(x,y) \in]a,b[^2$, $x < y$, il existe $\zeta \in]x,y[$, unique, tel que

$$f'(\zeta) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Montrer que f est strictement convexe ou strictement concave sur $]a,b[$.

Exercice 2078
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe admettant une limite finie en $+\infty$.
1. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On suppose dans cette question que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.
   b) Montrer que le résultat de la question précédente n'est plus valable sans l'hypothèse de convexité.

Exercice 2079
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe.
Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x) - xf'(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2080 - Inégalité d'Hermite-Hadamard
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe.
Montrer que :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 2081
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dont la dérivée seconde est minorée par $k \in \mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\forall t \in [0;1], \quad tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) \geqslant \frac{k}{2}t(1-t)(b-a)^2$$

Réciproquement, soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in [0;1]$ et tout $(c,d) \in [a,b]^2$, on ait :

$$tf(c) + (1-t)f(d) - f(tc + (1-t)d) \geqslant \frac{k}{2}t(1-t)(d-c)^2.$$

Montrer que f'' est minorée par k.

Exercice 2082
Centrale PSI 2014
Soit $(\alpha,\beta\gamma) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]^3$ avec $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$.
Montrer que :

$$\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) \leqslant \frac{1}{8}.$$

Exercice 2083
X MP 2017
Soit T un triangle, α, β et γ ses angles géométriques, éléments de $]0;\pi[$.
Montrer que :

$$\frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\sin(\beta)} \geqslant \frac{8}{3+2\cos(\gamma)}.$$

Exercice 2084
1. Montrer que :

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x.$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x + \frac{x}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right).$$

Exercice 2085
Soit $(x,y) \in [0;1]^2$. Montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Exercice 2086 - Inégalité de Nesbitt
Soit $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$. Montrer que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Exercice 2087 - Inégalité arithmético-géométrique
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.
Montrer que :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 2088 - Inégalité de Ky Fan
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in \left]0,\frac{1}{2}\right]^n$.
Montrer que :

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)}{\left(\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\right)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k}{\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Exercice 2089
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(x_1,\ldots,x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Exercice 2090
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in [1, +\infty[$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}+1}.$$

Exercice 2091
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0;1]^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
Montrer que :

$$1 + \prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)^{\lambda_k}.$$

Exercice 2092
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$.
Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{x_k} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Exercice 2093
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in]0;1[^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in]0;1[^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
Montrer que :

$$1 + \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)^{-1} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+x_k}{x_k}\right)^{\lambda_k}.$$

Exercice 2094
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in]0;1[^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in]0;1[^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
Montrer que :

$$\frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+x_k}{1-x_k}\right)^{\lambda_k}.$$

Exercice 2095
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in]0;\pi[^n$. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(x_k)}{x_k} \leqslant \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}\right)^n.$$

Exercice 2096
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in]0;\pi[^n$. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin(x_k) \leqslant \sin^n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Exercice 2097

Soit $a>1$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in]0;1[^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k=1$.

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^a \geqslant \frac{\left(n^2+1\right)^a}{n^{a-1}}.$$

Exercice 2098

Montrer que :

$$\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\quad (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant x\ln(x)+y\ln(y).$$

Exercice 2099

Mines-Ponts MP 2014

Soit $(x,y,a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$. Montrer que :

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)\leqslant x\ln\left(\frac{x}{a}\right)+y\ln\left(\frac{y}{b}\right).$$

Exercice 2100

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n}$.

1. Montrer que :

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{b_k}{a_k}}\leqslant \exp\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\ln(a_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}\right)\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\ln(a_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}\geqslant\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right).$$

Exercice 2101

X MP 2007

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

Montrer que :

$$\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 2102 - Inégalité de Hölder

Soit $(p,q)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$.

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 2103 - Inégalité de Minkowski

Soit $p>1$, $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$.

Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 2104
École Polytechnique MP 2017
Soit f une fonction concave et strictement décroissante sur $[0;1]$ telle que $f(0)=1$ et $f(1)=0$.
Déterminer $\max\limits_{(x,y,z)\in K} f(x)f(y)f(z)$ où $K=\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3 \ / \ x+y+z=1\right\}$.

6 Variations de fonctions. Extremums

Exercice 2105
Soit $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^m(1-x)^n$.
Déterminer les extrema de f.

Exercice 2106
Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \mathrm{e}^x \geqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 2107
Mines-Ponts MP 2019. Centrale PSI 2013
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)\geqslant 0$.
Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P^{(k)}(x)\geqslant 0$.

Exercice 2108
Soit f une fonction dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que :

$$f(c)f'(c)=c.$$

Exercice 2109
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,x')\in\mathbb{R}^2,\quad x\neq x',\quad f'(c)\neq\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}.$$

Montrer que $f''(c)=0$.

Exercice 2110
Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$, f une fonction continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a]$ telle que $f(0)=0$ et $f(a)f'(a)<0$.
Montrer qu'il existe $c\in]0,a]$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 2111
X PC 2020
Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\geqslant f''(x)\geqslant 0\quad\text{et}\quad f'(x)\geqslant 0.$$

Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\geqslant f'(x).$$

Exercice 2112
Singapour 2000
Soit $(a,b,c,d)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$ tel que $a^2+b^2=(c^2+d^2)^3$.
Montrer que :

$$\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\geqslant 1.$$

Chapitre XXI

Fonctions usuelles

1 Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques

Exercice 2113
1. Simplifier $\dfrac{\cos(p)-\cos(q)}{\sin(p)+\sin(q)}$.
2. En déduire $\tan\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 2114
Calculer $\sin^8\left(\dfrac{5\pi}{24}\right)-\cos^8\left(\dfrac{5\pi}{24}\right)$.

Exercice 2115
Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2116
Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{15}\right)-\cos\left(\dfrac{2\pi}{15}\right)-\cos\left(\dfrac{4\pi}{15}\right)+\cos\left(\dfrac{7\pi}{15}\right)$.

Exercice 2117
Montrer que :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{3}{4}.$$

Exercice 2118
Montrer que :

$$\sin^3\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{8}.$$

Exercice 2119
Montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 2120
Montrer que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Exercice 2121
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{k}\big(\cos^k(x) + \sin^k(x)\big)$.
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}.$$

Exercice 2122
Soit $(x,y) \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[^2$ tel que :
$$\cos^2(x-y) = \sin(2x)\sin(2y).$$
Montrer que :
$$x + y = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2123
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = 3$.
Calculer $\dfrac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}$.

Exercice 2124
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Calculer $\cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Exercice 2125
Soit $(\alpha,\beta) \in]0,\pi[\times]\pi,2\pi[$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x+\alpha) + \sin(x+\beta) + \sqrt{2}\cos(x) = 0.$$
Déterminer les valeurs de α et β.

Exercice 2126
Olympiades de Roumanie 1959
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan^2(a)\tan^2(b) = 1 + \tan^2(a) + \tan^2(b)$.
Montrer que :
$$\sin(a)\sin(b) \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Exercice 2127
Soit $(a,b,c,d) \in [0,\pi]^4$ tel que :
$$\cos(a) + 7\cos(b) = 4(\cos(c) + 2\cos(d)) \qquad \text{et} \quad \sin(a) + 7\sin(b) = 4(\sin(c) + 2\sin(d)).$$
Montrer que :
$$2\cos(a-d) = 7\cos(b-c).$$

Exercice 2128
Soit $(a,b,c,d) \in [0,\pi]^4$ tel que :
$$2\cos(a) + 6\cos(b) + 7\cos(c) + 9\cos(d) = 0 \qquad \text{et} \quad 2\sin(a) - 6\sin(b) + 7\sin(c) - 9\sin(d) = 0.$$
Montrer que :
$$3\cos(a+d) = 7\cos(b+c).$$

Exercice 2129
Soit $(a,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{\cos(x)+\cos(y)+\cos(z)}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin(x)+\sin(y)+\sin(z)}{\sin(x+y+z)} = a.$$

Montrer que :

$$\cos(y+z)+\cos(z+x)+\cos(x+y) = a$$

Exercice 2130
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+\sin(x))(1+\cos(x)) \leqslant \frac{3}{2}+\sqrt{2}.$$

Exercice 2131
Soit $(a,b) \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[^2$. Montrer que :

$$\left(\frac{\cos^2(a)}{\cos(b)}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2(a)}{\sin(b)}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow a = b.$$

Exercice 2132
Soit $(a,b) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$.
Montrer que :

$$\sin^6(a)+3\sin^2(a)\cos^2(b)+\cos^6(b) = 1$$

si, et seulement si, $a = b$.

Exercice 2133
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x)\sin(2x)\sin(3x) \leqslant \frac{3}{4}.$$

Exercice 2134
Montrer que l'équation :

$$\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\sin(4x) = \frac{1}{2}$$

n'a pas de solution réelle.

Exercice 2135
Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, montrer que :

$$\tan(3a)-\tan(2a)-\tan(a) = \tan(3a)\tan(2a)\tan(a).$$

Exercice 2136
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x-y$, $y-z$ et $z-x$ n'appartiennent pas à $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$.
Montrer que :

$$\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x).$$

Exercice 2137
Soit $(a,b) \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[^2$ et $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Montrer que :

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} = \frac{x}{y} \Longleftrightarrow \frac{\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{x-y}{x+y}.$$

Exercice 2138
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(x_1,\ldots,x_n) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2(x_k) = 1.$$

Montrer que :

$$\sqrt{n-1}\sum_{k=1}^{n} \sin(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \cos(x_k).$$

Exercice 2139
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij\cos(a_i - a_j) \geqslant 0.$$

Exercice 2140
X - ESPCI PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\cos(t_i + t_j) + \cos(t_i - t_j) \geqslant -n.$$

Exercice 2141
1. Exprimer $\tan(a) - \tan(b)$ en fonction de $\sin(a-b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0,2\pi[$ tel que, pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$, $\cos(k\alpha) \neq 0$.
   Calculer :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cos(k\alpha)\cos((k+1)\alpha)}.$$

Exercice 2142
1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Montrer que :
$$\tan(x) = \text{cotan}(x) - 2\text{cotan}(2x).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ où elle est définie, calculer la somme :
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan\left(2^k x\right).$$

Exercice 2143
Olympiades internationales 1966
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \frac{k\pi}{2^p}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\left(2^k x\right)} = \text{cotan}(x) - \text{cotan}\left(2^n x\right).$$

Exercice 2144
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\tan\left(2^k\right)}{\cos\left(2^{k+1}\right)}.$$

Exercice 2145
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}.$$

Exercice 2146
X - ESPCI PC 2008
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{\sin(nx)}{n} \leqslant 1.$$

Exercice 2147
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} |\sin(x_k)| + \left|\cos\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \geqslant 1.$$

Exercice 2148
1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$. Montrer que :

$$1 + \frac{1}{\cos(2x)} = \frac{\tan(2x)}{\tan(x)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ où il est défini, calculer le produit :

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{\cos\left(2^k x\right)}\right).$$

Exercice 2149
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right)$.

Exercice 2150
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \tan^2\left(\dfrac{2^k\pi}{2^n + 1}\right)\right)$.

Exercice 2151
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$. Calculer :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \tan^2\left(2^k x\right)}{\left(1 - \tan^2\left(2^k x\right)\right)^2}.$$

Exercice 2152
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2^{p+1}\left(\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right) \,/\, p \in [\![1,n]\!] \text{ et } k \in \mathbb{Z}\right\}$. Calculer :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$$

Exercice 2153
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi \cdot 3^k}{3^n + 1}\right)\right) = 1.$$

Exercice 2154
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = -\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^{n-1}}.$$

Exercice 2155
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Exercice 2156
Résoudre l'équation :

$$\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1.$$

Exercice 2157
Résoudre l'équation :

$$\cos^{11}(x) - \sin^{11}(x) = 1.$$

Exercice 2158
Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 2x \\ \sin(x-y) = 2y \end{cases}$$

Exercice 2159
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in [-2; 2]^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$.
Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right| \leqslant 2n.$$

Exercice 2160 - 30
Montrer que :

$$2\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2161
Calculer $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 2162
Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \text{Arccos}(\cos(x)) + \frac{1}{2}\text{Arccos}(\cos(2x))$.

Exercice 2163
Tracer les courbes représentatives des fonctions $\text{Arcsin} \circ \sin$, $\text{Arccos} \circ \cos$, $\text{Arctan} \circ \tan$, $\text{Arcsin} \circ \cos$ et $\text{Arccos} \circ \sin$.

Exercice 2164
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 2165
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Exercice 2166
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Exercice 2167
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Exercice 2168
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 2169
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arccos}\left(4x^3-3x\right)$.

Exercice 2170
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Exercice 2171
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Exercice 2172
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

Exercice 2173
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

Exercice 2174
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 2175
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$.

Exercice 2176
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$.

Exercice 2177
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$.

Exercice 2178
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$.

Exercice 2179
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \text{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

2 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Exercice 2180
Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 2181
Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}.$$

Exercice 2182 - Lemme de Gibbs
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n}$. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k = 1$.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(q_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k).$$

Exercice 2183
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation :

$$\ln_a(x) = \ln_x(a).$$

Exercice 2184
Résoudre l'équation :

$$\ln\left(x^2 - 1\right) + \ln(4) = \ln(4x - 1).$$

Exercice 2185
Résoudre l'équation :

$$\ln\left(\frac{x+5}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x) + \ln(5)).$$

Exercice 2186
Résoudre l'équation :

$$\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3)).$$

Exercice 2187
1. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

2. *Applications*
   a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

   b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right) \leqslant \frac{b}{a}.$$

Exercice 2188
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $b \geqslant a$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.
2. En déduire que :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln(2))^2.$$

Exercice 2189
Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation :

$$2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \cdots + 3^{x+n}.$$

Exercice 2190
Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2) \end{cases}$$

Exercice 2191
Soit $x \in]\mathrm{e}, +\infty[$. Simplifier $x^{\varphi(x)}$ avec $\varphi(x) = \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$.

Exercice 2192
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $a = \mathrm{e}^{x^2}$ et $b = \dfrac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$.
Simplifier a^b.

Exercice 2193
Centrale PC 2013
Comparer 3^π et π^3.

Exercice 2194
Résoudre l'équation :

$$2^{x^3} = 3^{x^2}.$$

Exercice 2195
Résoudre l'équation :

$$3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

Exercice 2196
Résoudre l'équation :

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Exercice 2197
Centrale PC 2013. ENSEA PSI 2016
Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation : $3^x + 4^x = 5^x$.

Exercice 2198
Résoudre l'équation :

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x.$$

Exercice 2199
Résoudre l'équation :

$$x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 2200
Résoudre l'équation :

$$x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2201
Résoudre l'équation :

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x.$$

Exercice 2202
Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 = y^3 \end{cases}$$

Exercice 2203
Résoudre l'équation :

$$\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}+\sqrt{x^2-8x+7}}^{\,x}+\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt{x^2-8x+7}}^{\,x}=2^{1+\frac{x}{4}}.$$

Exercice 2204
Soit $(a,b,c)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ tel que $abc=1$.
Montrer que :

$$a^2+b^2+c^2\leqslant a^3+b^3+c^3.$$

Exercice 2205
X - ESPCI PC 2008
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ pour que :

$$\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\quad (x+y)^\alpha\geqslant x^\alpha+y^\alpha.$$

3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

Exercice 2206
Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \left(\frac{1-\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}(x)}\right)^n=\frac{1+\mathrm{th}(nx)}{1-\mathrm{th}(nx)}.$$

Exercice 2207
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{ch}(kx)\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{sh}(kx).$$

Exercice 2208
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(a+kb)\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=0}^{n}\mathrm{sh}(a+kb).$$

Exercice 2209
1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{th}(x)=2\mathrm{coth}(2x)-\mathrm{coth}(x).$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, calculer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\mathrm{th}\left(2^kx\right).$$

Exercice 2210 - 30
1. Simplifier $\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))+\mathrm{Arccos}(\mathrm{th}(x))$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\mathrm{th}(x)=\dfrac{5}{13}$.
3. En déduire que :

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)+\mathrm{Arccos}\left(\frac{5}{13}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2211
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

Exercice 2212
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2f(x)\sqrt{1 + f^2(x)}.$$

Chapitre XXII

Fonctions - Intégration sur un segment

1 Propriétés de l'intégrale

Exercice 2213
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b < c$ et $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \leqslant \max\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\mathrm{d}x\right).$$

Exercice 2214
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.
Montrer que :

$$\int_a^b \min(f(t),g(t))\mathrm{d}t \leqslant \min\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right) \quad \text{et} \quad \int_a^b \max(f(t),g(t))\mathrm{d}t \leqslant \max\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 2215
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Déterminer les fonctions continues $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$.

Exercice 2216
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ si, et seulement si, f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 2217
Soit $a \in [1,+\infty[$ et $f : [1,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
1. Montrer que :

$$\int_1^a \lfloor x\rfloor f'(x)\mathrm{d}x = \lfloor a\rfloor f(a) - \sum_{k=1}^{\lfloor a\rfloor} f(k).$$

2. Déterminer une expression analogue pour $\displaystyle\int_1^a \left\lfloor x^2\right\rfloor f'(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2218
Déterminer la partie entière de $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$.

Exercice 2219
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant f(x) + f'(x) \leqslant 1.$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f(x) - f(0)\mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant \left|1 - \mathrm{e}^{-x}\right|.$$

Exercice 2220
X MP 2005
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$, m (respectivement M) le minimum (resp. le maximum) de f sur $[0;1]$.
Montrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant -mM.$$

Exercice 2221
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad \int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $|f(x_0)| \geqslant 2^n(n+1)$.

Exercice 2222
X MP 2013
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $(f,g) \in \left(\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}_+^*\right)\right)^2$. On note m et M le minimum et le maximum de $\dfrac{f}{g}$ sur $[a,b]$ respectivement.
Montrer que :

$$\left(\int_a^b (f(t))^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

Exercice 2223
Déterminer les fonctions continues $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f(x)(x - f(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

Exercice 2224
Soit f une fonction décroissante définie sur $[0;1]$.
Montrer que :

$$\forall \alpha \in]0;1[, \quad \alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2225
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ telle que :

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x = 1.$$

Montrer que :

$$|f(1) - f(0)| \leqslant 1.$$

Exercice 2226
Mines-Ponts MP 2021
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}_+)$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leqslant M$.

1. Montrer que :
$$\forall x \in [0;1], \quad \left|(f(x))^2 - (f(0))^2\right| \leqslant 2M \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que :
$$\left|\int_0^1 (f(x))^3 \mathrm{d}x - (f(0))^2 \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

Exercice 2227
Mines-Ponts MP 2018
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que :
$$\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 2228
X ESPCI PC 2008
Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R}) \,/\, f(0) = f(1) = 0\right\}$.
Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on déterminera, tel que :
$$\forall f \in E, \quad \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant M \sup_{x\in[0;1]} |f''(x)|.$$

Exercice 2229
1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \inf_{a\in\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{x}{a} + \ln(a) - 1\right).$$
2. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue.
   Montrer que :
$$\int_0^1 f(x)\ln(g(x))\mathrm{d}x \leqslant \ln\left(\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right).$$

Exercice 2230
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :
$$\forall x \in [a,b], \quad f'(x) > f(x) > 0.$$
Montrer que :
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} < \frac{1}{f(a)} - \frac{1}{f(b)}.$$

Exercice 2231
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable telle que f' soit décroissante et $f'(0) > f(0) = 0$.
Montrer que :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(f(x))^2 + 1} < \frac{f(1)}{f'(1)}.$$

Exercice 2232
X MP 2005
Soit f et g deux fonctions continues et croissantes sur $[0;1]$.
Montrer que :
$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2233
X - ESPCI PC 2016. Centrale PSI 2014
Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2234
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in]0;1[$ tel que :

$$f(x_0) = \frac{1 - x_0^n}{1 - x_0}.$$

Exercice 2235
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que :

$$\frac{1}{1+x_0} < f(x_0) < \frac{1}{2x_0}.$$

Exercice 2236
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f'(x) = 1 + x^2 + f^2(x).$$

Montrer que $b - a < \pi$.

Exercice 2237
ENS PSI 2017. X - ESPCI PC 2014
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},R)$ telle que :

$$f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}.$$

Montrer que f possède une limite finie ℓ en $+\infty$ et que $\ell \leqslant 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2238
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(c)\int_a^c g(t)\mathrm{d}t = g(c)\int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2239 - Lemme de Gronwall
X - ESPCI PC 2016
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $(u,v) \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+))^2$. On suppose que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [a,b], \quad u(x) \leqslant c + \int_a^x u(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que :

$$\forall x \in [a,b], \quad u(x) \leqslant c\exp\left(\int_a^x v(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 2240
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + (c-a)g(c) = \int_c^b g(t)\mathrm{d}t + (b-c)f(c).$$

Exercice 2241

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f$une fonction telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \neq 0$.

Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in]a,b[^2$ tel que :

$$a < \alpha < \beta < b \qquad \text{et} \qquad \int_a^\alpha f(t)\mathrm{d}t = (b-\alpha)f(\beta).$$

Exercice 2242 - Inégalité de Steffensen

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $g : [a,b] \longrightarrow [0;1]$ une fonction intégrable et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante. On pose $\lambda = \displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Montrer que :

$$\int_{b-\lambda}^b f(x)d\,x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{a+\lambda} f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2243

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

Montrer que :

$$\int_a^b |f'(x)f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

Exercice 2244

X - ESPCI PC 2017. Mines-Ponts MP 2017

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \in [0;1]$.

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x (f(t))^3\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 2245

ESCP Question courte 2010

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$. On définit la fonction F sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en posant :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{xf(t)}{x+t}\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2246

Mines-Ponts MP 2021. ESCP Question courte 2011

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant:

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $h : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction h est décroissante.
2. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

Exercice 2247
X - ESPCI PC 2019
Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles deux fois dérivables sur $[0;1]$ et $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in E, \quad \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 2248
X - ESPCI PC 2013
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer que :

$$\forall x \in [0;1], \quad |f(x)| \leqslant \sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t}.$$

Exercice 2249
X - ESPCI PC 2008
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$.
Montrer que :

$$\int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t.$$

Exercice 2250
ENS PC 2018
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$.
Montrer que :

$$\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 x^2(f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

Déterminer le cas d'égalité.

Exercice 2251
Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad a < b, \qquad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Exercice 2252
Mines-Ponts MP 2014
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $a < b$. Montrer que :

$$\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2 \leqslant \frac{b-a}{4}(\ln(b) - \ln(a)).$$

Exercice 2253
X - ESPCI PC 2013
Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x \geqslant 4$.

Exercice 2254
ENSEA MP 2013
Déterminer les fonctions continues $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ telles que :

$$\int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2255
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que :

$$\int_a^b (f(t))^2 \mathrm{d}t = \int_a^b (f(t))^3 \mathrm{d}t = \int_a^b (f(t))^4 \mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction f est constante égale à 0 ou 1.

Exercice 2256
ESCP Question courte 2013
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^n \mathrm{d}t$ et on suppose que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
1. En raisonnant par l'absurde, montrer que, pour tout $t \in [0;1]$, $|f(t)| \leqslant 1$.
2. En considérant la suite $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que, pour tout $t \in [0;1]$, $f(t) \in \{-1,0,1\}$.
3. En déduire f.

Exercice 2257
X MP 2018
Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 2$ et $f(x)f'(x) \geqslant \sin(x)$?

Exercice 2258
X MP 2016. Mines-Ponts MP 2021. Centrale MP 2014
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(x))^2 + (1 + f'(x))^2 \leqslant 1.$$

Montrer que la fonction f est nulle.

Exercice 2259
Mines-Ponts PC 2017
Soit $f \in \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que la fonction f s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.
Donner un exemple d'une telle fonction non nulle.

Exercice 2260
Mines-Ponts PC 2021
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \int_a^b t^k f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a,b[$.

Exercice 2261
Mines-Ponts MP 2021
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n$.
1. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \int_{x_k}^{y_k} P(t)\mathrm{d}t = 0.$$

   Montrer que le polynôme P est nul.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$, non nul, tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \int_{x_k}^{y_k} P(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 2262
Mines-Ponts MP 2021
Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in [0;1], \quad \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1-x^2}{2}.$$

Montrer que :

$$\int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{3}.$$

Exercice 2263
X MP 2018
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave et continue telle que $f(0) = 1$.
Montrer que :

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

Exercice 2264
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour toute $f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$, on ait :

$$a(f(1))^2 + b(f(0))^2 \leqslant M\int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t + \int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t.$$

Exercice 2265
X MP 2021
Soit $K \in \mathcal{C}\left([0;1]^2,\mathbb{R}_+^*\right)$ et $(f,g) \in \left(\mathcal{C}\left([0;1],\mathbb{R}_+^*\right)\right)^2$ telles que :

$$\forall x \in [0;1], \quad g(x) = \int_0^1 f(t)K(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^x g(t)K(x,t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 2266 - Majoration de l'erreur pour la méthode des trapèzes
X MP 2018
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2}\right| \leqslant \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Exercice 2267
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(z) = \frac{1}{n!}\int_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{e}^{tz}\mathrm{d}t.$$

1. a) Calculer $I_0(z)$ et $I_1(z)$.
   b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad I_{n+2}(z) = \frac{4}{z^2}I_n(z) - \frac{4n+6}{z^2}I_{n+1}(z).$$
   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme A_n à coefficients entiers et de degré n tel que
   $$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad I_n(z) = \frac{1}{z^{2n+1}}(\mathrm{e}^z A_n(z) - \mathrm{e}^{-z}A_n(-z)).$$
2. Soit $z \in \mathbb{Q}^*$ tel que $\mathrm{e}^z \in \mathbb{Q}^*$.
   Montrer l'existence d'un entier non nul D tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n I_n(z) \in \mathbb{N}^*.$$
   Montrer par ailleurs que $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n I_n(z) = 0$.
   Conclure.

3. *Application*
   Montrer que si $r \in \mathbb{Q}^*$, alors $\mathrm{e}^r \notin \mathbb{Q}$ et, si $r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$, alors $\ln(r) \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2268 - Preuve de Ivan Niven de l'irrationalité de π
X MP 2016. X PSI 2018
Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n et f_n les fonctions polynomiales définies par :

$$P_n(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x).$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.
2. En considérant $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_n'(x)\sin(x) - f_n(x)\cos(x))\mathrm{d}x$, montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2269 - Première formule de la moyenne
X - ESPCI PC 2016. Centrale MP 2017
1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $(f,g) \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}))^2$ avec g positive.
   Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(c)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
2. Application
   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, croissante, et $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2270 - Inégalité de Young
X - ESPCI PC 2008. Mines-Ponts MP 2005
Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = 0$.
1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x).$$
2. Montrer que :
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \int_0^a f(t)\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\mathrm{d}t \geqslant ab.$$
   Étudier le cas d'égalité.

2 Techniques de calcul d'intégrales

2.1 Intégration par parties

Exercice 2271
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
Montrer que :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2272
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\mathrm{d}t$.

Exercice 2273
Mines-Ponts PSI 2017
Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^3(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2274
En considérant $\displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 2275
Soit $f\in\mathcal{C}^2([0,2\pi],\mathbb{R})$, convexe. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

Exercice 2276
X MP 2018
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2277
X - ESPCI PC 2021
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\cos^{n}(x)\mathrm{d}x$.

2.2 Changement de variable

Exercice 2278
Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $a<b$. Calculer l'intégrale

$$I=\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{\frac{b}{x}}}{x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 2279
Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x\ln(x)}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2280
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2281
Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{t}{1+t+t^2+t^3}\mathrm{d}t=\operatorname{Arctan}(x)-\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2282
X MP 2005
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2283
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2284
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2285
Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - x + 1}\mathrm{d}x$.

Exercice 2286
Putnam 1987
Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x$.

Exercice 2287
Putnam 2005
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2288
Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)\cos(x)}}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\sin(x)\cos(x)}}\mathrm{d}x$.
Montrer que $I = J$ et calculer leur valeur.

Exercice 2289
Soit $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\displaystyle\int_0^\alpha \ln(1+\tan(\alpha)\tan(x))\mathrm{d}x$.

Exercice 2290
CCP PSI 2016
1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(a+b-x) = f(x).$$

   Montrer que :

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$.

Exercice 2291
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x_1,x_2) \in [0;1]^2, \quad x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1) \leqslant 1.$$

Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2292
Mines-Ponts MP 2013
Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(3x^2 - 2x^3\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f\left(3x^2 - 2x^3\right)\mathrm{d}x.$$

3 Sommes de Riemann

Exercice 2293
X - ESPCI PC 2014
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 2294
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 2295
CCINP PC 2019
Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$.

Exercice 2296
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 2297
Soit $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$.

Exercice 2298
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$.

Exercice 2299
X - ESPCI PC 2014
Soit $p \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$.

Exercice 2300
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

Exercice 2301
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 2302
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Exercice 2303
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

Exercice 2304
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{a^k}$.

Exercice 2305
Calculer $\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$.

Exercice 2306
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{k+1}{kn+n^2}$.

Exercice 2307
Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2014
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$.

Exercice 2308
Mines-Ponts PSI 2005. CCINP PC 2021. ENTPE-EIVP PC 2015
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2309
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2310
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2311
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n+1} \frac{1}{2k+1}$.

Exercice 2312
Soit $p \in]1,+\infty[$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{p-1}(k+1)$.

Exercice 2313
Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p(k+1)^p$.

Exercice 2314
Soit $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $\alpha+\beta=1$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (n+k)^{-\alpha}(n+k+1)^{-\beta}$.

Exercice 2315
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Exercice 2316
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^k k^2}}$.

Exercice 2317
X PSI 2020. Mines-Ponts MP 2021
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 2318

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Exercice 2319

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} \left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2320

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}}$.

Exercice 2321

Montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}.$$

Exercice 2322

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2323

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\right) - n\right)$.

Exercice 2324

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

1. Montrer que $P_n = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$.
2. Étudier la convergence de la suite $\left(P_n^{\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2325

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \alpha < \beta$. On note $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)$.

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et calculer sa limite en cas de convergence.

Exercice 2326

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right)$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2327

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. On note $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}]\right)\right)$.

   Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. *Application.* — Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)}{2n(2n+2)\cdots(4n-2)}.$$

Exercice 2328

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Sans utiliser de primitive, calculer $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

Exercice 2329

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Sans utiliser de primitive, calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2330

Soit f une fonction intégrable sur $[0;1]$ et g une fonction dérivable et à dérivée bornée sur $[0;1]$.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2331 - Intégrale de Poisson

Mines-Ponts MP 2016

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Calculer $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2332 - Inégalité de Jensen

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2333

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$.
   Montrer que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln \circ f(x)\mathrm{d}x \leqslant \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

2. *Application*
   Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \mathrm{d}x.$$

Exercice 2334

1. Montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[, \quad |\ln(1+x) - x| \leqslant x^2.$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction intégrable sur $[a,b]$.
   Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

Exercice 2335

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Exercice 2336
Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}.$$

Exercice 2337
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que f' soit bornée sur $]0;1[$. On note $M = \sup_{x\in]0;1[} |f'(x)|$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

Exercice 2338
Mines-Ponts MP 2021
Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) = n\ln(n) + an + b + o(1).$$

Exercice 2339
1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a,b]$.
   Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) + \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b)-f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

2. *Application*
   Montrer que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 2340
Soit f et g deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant x\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2341
X MP 2018. X - ESPCI 2014
Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que la fonction g est T-périodique.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T f(t)g(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^T g(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 2342
Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose :

$$u_{n,p} = \frac{1}{p^n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{p}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\frac{p}{p}}\right)^n.$$

Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et $\lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}$.

4 Calcul de primitives

Exercice 2343
IMT MP 2013
Déterminer la primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)(3-x)}$ tendant vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2344
Calculer $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

Exercice 2345
Calculer $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2346
Calculer $\displaystyle\int x\tan^2(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2347
Calculer $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2348
Calculer $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2349
Calculer $\displaystyle\int x(\mathrm{Arctan}(x))^2\mathrm{d}x$.

Exercice 2350
Calculer $\displaystyle\int \frac{x^2}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2351
Calculer $\displaystyle\int \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2352
Calculer $\displaystyle\int \frac{x^2\ln(x)}{\left(x^3+1\right)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2353
Calculer $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \cos(\ln(x))\mathrm{d}x$.

Exercice 2354
Calculer $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$.

5 Suites définies par une intégrale

Exercice 2355
Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}.$$

Exercice 2356

Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}\left([0;1],\mathbb{R}_+^*\right)\right)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 g(x)f^n(x)\mathrm{d}x$.

Étudier la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2357

Mines-Ponts PSI 2017

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(t))^n\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Exercice 2358

Mines-Ponts MP 2021

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2359

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

1. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x$.
   a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |I_n - J_n| \leqslant \frac{1}{2n(2n+1)}.$$
   b) Calculer J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   c) En déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2360

Centrale MP 2005. IMT MP 2017. IMT PC 2019

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer la limite I de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer un équivalent de $I_n - I$.

Exercice 2361

Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{x^n+1}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x$.

Exercice 2362

CCP MP 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Calculer I_0, I_1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n$.
3. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent de I_n.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = (-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)\right).$$

5. En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Exercice 2363 - Intégrales de Wallis

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)\mathrm{d}x.$$
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Calculer W_0 et W_1.
4. a) Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n,$$
puis que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad W_nW_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)}.$$
b) En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad W_{2n}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\quad \text{et}\quad W_{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
5. a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{W_{n+1}}{W_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
b) En déduire que :
$$W_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 2364

X MP 2013

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{2^{n-k}-1}{n-k}.$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge puis déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 2365

Mines-Ponts MP 2018

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{2+\cos(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2366

Mines-Ponts MP 2016

Déterminer un équivalent de $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{(1+t+t^2)^n}$ quand $n\to+\infty$.

6 Intégrales fonctions des bornes

Exercice 2367

CCINP PC 2019

Déterminer les fonctions $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ telles que :
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 2yf(x)=\int_{x-y}^{x+y}f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2368

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 2369

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de f.
2. Montrer que f est dérivable et étudier les variations de f.
3. Déterminer, si elles existent, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$.

Exercice 2370

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

On note encore f le prolongement par continuité ainsi obtenu.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et étudier ses variations.
4. Justifier que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

Chapitre XXIII

Analyse asymptotique

Exercice 2371
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs strictement positives telles que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$. Montrer que $u_n + w_n \sim v_n + x_n$.

Exercice 2372
X MP 2017. X - ESPCI PC 2017
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
Montrer que la fonction f est bijective puis déterminer un développement asymptotique à deux termes de sa fonction réciproque en $+\infty$.

Exercice 2373
X - ESPCI PC 2016
Soit f la fonction définie sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
2. Déterminer un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

Exercice 2374
Mines-Ponts PC 2017
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

Exercice 2375
X - ESPCI PC 2014
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\sin(x))^{\frac{1}{\cos(x)}}$.

Exercice 2376
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\sin(x))^{\frac{1}{\cos^2(x)}}$.

Exercice 2377
Centrale 2001. IMT PSI 2013
Déterminer la limite de $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\dfrac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$.

Exercice 2378
Mines-Ponts PC 2014
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^{\frac{x+1}{x}} - (x-1)^{\frac{x}{x-1}}\right)$.

Exercice 2379
CCP PSI 2007. IMT PC 2016
Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 2380
Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\mathrm{ch}(x))-\ln(\cos(x)))^2}{\sqrt{\mathrm{ch}(x)}+\sqrt{\cos(x)}-2}$

Exercice 2381
Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2(x)}+\frac{1}{\ln(\cos(x))}\right)$

Exercice 2382
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x)=((x+1)(x+2)\cdots(x+n))^{\frac{1}{n}}-x.$$

Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2383
IMT PC 2019
Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Calculer

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 2384
Déterminer un équivalent en 0 de $x\longmapsto\frac{1}{1-x}-(1+x)^{\mathrm{e}^x}$.

Exercice 2385
Déterminer un équivalent en 0 de $x\longmapsto\sin(\ln(1+x))-\ln(1+\sin(x))$.

Exercice 2386
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-x$.
1. Montrer que la fonction f est bijective.
2. Déterminer le $DL_4(0)$ de f^{-1}.

Chapitre XXIV

Séries

1 Séries à termes positifs (ou de signe constant)

1.1 Calculs de sommes

Exercice 2387
Mines-Ponts PSI 2017
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{2^n}$.

Exercice 2388
CCP MP 2013
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2+3n}{2^n}$.

Exercice 2389
Mines-Ponts PC 2018
Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^3+3^n}{n!}$.

Exercice 2390
Putnam 2001
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\langle n\rangle$ l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$.
Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\langle n\rangle}+2^{-\langle n\rangle}}{2^n}.$$

Exercice 2391
Putnam 1984
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{6^n}{(3^n-2^n)(3^{n+1}-2^{n+1})}$.

Exercice 2392
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n}{3^{2^{n-1}}+1}$.

Exercice 2393
TPE MP 2005
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2+3n}$.

Exercice 2394
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Exercice 2395
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

Exercice 2396
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Exercice 2397
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 2398
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{3n^2+1}{(n^3-n)^3}$.

Exercice 2399
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2-\frac{1}{2}}{n^4+\frac{1}{4}}$.

Exercice 2400
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n(n+1)}}$.

Exercice 2401
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n-1)}$.

Exercice 2402
Putnam 1977
Soit $x \in]0;1[$. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

Exercice 2403
CCP PSI 2007. Navale PC 2021
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^\alpha}$.
1. Étudier la nature de la série de terme général u_n.
2. Calculer la somme de la série pour $\alpha = 1$.

Exercice 2404
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Exercice 2405
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$.

Exercice 2406
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

Exercice 2407
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$.

Exercice 2408
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)}$.

Exercice 2409
CCP PC 2009
Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$.
1. Montrer que, si $p = 0$ ou $p = 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans la suite que $p \geqslant 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n.$$
En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+1)u_n).$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = (n+1)u_n$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
En déduire que la série de terme général u_n converge.
3. Déterminer la somme de la série de terme général u_n.

Exercice 2410
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$.

Exercice 2411
Mines-Ponts PC 2019
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 2412
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n}}$.

Exercice 2413
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})\cdots(1+\sqrt{n})}$.

Exercice 2414
ENSEA MP 2014. IMT PC 2021
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 2415
EIVP PC 2017. TPE PC 2019
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$.

Exercice 2416
Mines-Ponts PC 2021
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{3}{n^2+3n+1}\right)$.
Indication. — Écrire $\dfrac{3}{n^2+3n+1}$ sous la forme $\dfrac{n+3-n}{1+n(n+3)}$.

Exercice 2417
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$.

Exercice 2418

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2^n}$.

Exercice 2419

Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2420

IMT PSI 2016

Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$.

Exercice 2421

Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$.

Exercice 2422

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{2^n} \tan\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2423

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} 3^{n-1} \sin^3\left(\dfrac{a}{3^n}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2424

Soit $a \in \left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right[$. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \ln\left(2\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right) - 1\right)$.

Exercice 2425

Soit $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$.

Exercice 2426

HEC ECS Exercice sans préparation 2014. Mines-Ponts PC 2014. CCP MP 2015. IMT MP 2021

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors sa somme.

Exercice 2427

Mines-Ponts PSI 2021. Mines-Ponts PC 2016. IMT PSI 2016. TPE PC 2013

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors sa somme.

Exercice 2428

X MP 2007. Centrale MP 2005

Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{(4n+1)(4n+3)}$.

Exercice 2429

CCP MP 2005

Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{2^n(n+1)}$.

Exercice 2430
Mines-Ponts PSI 2017
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(4n+2)2^n}$.

Exercice 2431
X - ESPCI PC 2014. Centrale PC 2014
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(8n+5)(8n+1)}$.

Exercice 2432
EIVP MP 2016
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 2433
Mines-Ponts MP 2016
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-3\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}{n(n+1)}$.

Exercice 2434
Mines-Ponts MP 2013
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\left(4n^2-1\right)}$.

Exercice 2435
Mines-Ponts MP 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série de terme général $\frac{H_n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Exercice 2436
X MP 2005
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right)$.

Exercice 2437
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}$.

Exercice 2438
X MP 2021. CCP PSI 2014. IMT PC 2021
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

Exercice 2439
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$.

Exercice 2440
Mines-Ponts PC 2021
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} n\ln\left(\frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right)$.

Exercice 2441
X MP 2018

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 2\sqrt{n} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ positif.
2. Exprimer ℓ en fonction de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2}$.
3. Montrer que :

$$\ell = \left(1+\sqrt{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 2442
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = x^n + nu_n$.
Montrer que :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^n}{u_{n+1}}\right) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 2443
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1. Montrer que la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{F_{n+1}}{F_nF_{n+2}}$.
2. Montrer que la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{F_nF_{n+2}}$.
3. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$.
4. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{F_{2^n}}$.
   Indication. — Appliquer la formule d'Ocagne :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad n \geqslant m, \quad F_nF_{m+1} - F_mF_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}.$$

Exercice 2444
X - ESPCI PC 2015
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2)$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Exercice 2445
Mines-Ponts MP 2014
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_n + (n+1)u_{n+1}}{n+2}$$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2446
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2447
CCINP PC 2019
Soit $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par $S_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \prod\limits_{i=0}^{k-1}(X-i)$.

1. a) Calculer S_1, S_2 et S_3. Quel est le degré de S_n ?
   b) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(S_0,S_1,\ldots,S_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
   c) Calculer $S_k(n)$ pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k S_k(X)$.

   a) Montrer que :
$$\forall n \geqslant m, \quad \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{(n-k)!}.$$

   b) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{P(n)}{n!}$ converge et exprimer sa somme en fonction des a_k.

   c) Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{n!}$ pour $p \geqslant 2$ et calculer sa somme.

Exercice 2448
ESCP 2011
Soit a un nombre réel tel que $a > 2$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} a_1 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2 \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. a) Montrer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante :
$$a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 \left(a_1^2 - 4\right).$$
   b) Déterminer, en fonction de a, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$.
3. a) Simplifier, pour k supérieur ou égal à 2 : $\frac{a_k}{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} - \frac{a_{k+1}}{a_1 a_2 \cdots a_k}$.
   b) En déduire, en fonction de a, l'existence et la valeur de : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$.

Exercice 2449
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{u_n} - 1}{u_n}\right)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2450
Centrale PC 2011
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, on note $S(n)$ le nombre de chiffres dans la représentation de n en base k.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{S(n)}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme

a) pour $k = 10$;
b) pour $k = 2$.

Exercice 2451 - Calcul de $\zeta(2)$
1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi \left(at + bt^2\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]0,\pi], \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
3. a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$. Montrer que :
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t = 0.$$

b) En déduire que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2452 - Calcul de $\zeta(2)$
ENS PSI 2017. Mines-Ponts MP 2019. Mines-Ponts PC 2021
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$, unique, tel que :
$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad P_n\left(\operatorname{cotan}^2(t)\right) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de P_n puis calculer leur somme.
3. Montrer que :
$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(t).$$
4. En déduire la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2453 - Calcul de $\zeta(2)$
X MP 2017
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{W_p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t.$$
3. En déduire la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1.2 Étude de la convergence

Exercice 2454
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ convergent et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Exercice 2455
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, croissante et divergeant vers $+\infty$.
Existe-t-il des suites positives $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $b_n \leqslant a_n c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la série de terme général b_n diverge tandis que la série de terme général c_n converge?

Exercice 2456
Montrer que, si, parmi deux séries à termes strictement positifs, l'une au moins est divergente, alors leur produit de Cauchy diverge.

Exercice 2457
Montrer que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 2458
Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 2459
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 2460
Déterminer la nature de la série de terme général $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Exercice 2461
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 2462
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

Exercice 2463
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$

Exercice 2464
X - ESPCI PC 2013
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général $x^{\frac{1}{n}} - 1$.

Exercice 2465
TPE PSI 2010
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n \mathrm{e}^{-u_n}}{n^2}$.
Déterminer la nature de la série de terme général v_n.

Exercice 2466
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Étudier la nature de la série de terme général $\cos\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right) - 1$.

Exercice 2467
CCP MP 2005
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+2}}$.

Exercice 2468
IMT PC 2019
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$.
Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{S_n}$.

Exercice 2469
Telecom MP 2014
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k)}$.

Exercice 2470
IMT PC 2018
Déterminer la nature de la série de terme général $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 2471
CCP PSI 2013
Déterminer la nature de la série de terme général $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

Exercice 2472
Déterminer la nature de la série de terme général $\exp\left(-\sqrt{\ln(n)}\right)$.

Exercice 2473
Mines-Ponts MP 2021
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.

Exercice 2474
Mines-Ponts MP 2021
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(\ln(n))}}$.

Exercice 2475
Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)}$.

Exercice 2476
X - ESPCI PC 2015. Mines-Ponts PSI 2016.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n$.
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ puis la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n - 1}{n}$.

Exercice 2477
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Exercice 2478
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$.

Exercice 2479
PSI 2013
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n}\left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)$.

Exercice 2480
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 2481
ESCP 2008 - Question courte
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.
Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2482
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(2 - 3^{\frac{1}{k}}\right)$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2483
CCINP PC 2019
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}\right)$.

Exercice 2484
Mines-Ponts PSI 2013
Déterminer la nature de la série de terme général $\operatorname{Argch}(n) - \operatorname{Argsh}(n)$.

Exercice 2485
Déterminer la nature de la série de terme général $\operatorname{Argch}\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Exercice 2486
Mines-Ponts PSI 2019
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)}$.
1. Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - 1$.

Exercice 2487
Mines-Ponts MP 2014
Déterminer la nature de la série de terme général $\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$.

Exercice 2488
Mines-Ponts PC 2017
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de la série de terme général $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + a\tan\left(\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Exercice 2489
PSI 2013
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $n^\alpha\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 2490
Mines-Ponts PC 2017
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n\ln(n)}$.

Exercice 2491
CCP PC 2010
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1+b^n}$.

Exercice 2492
Soit $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}\right)$.

Exercice 2493
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ converge.

Exercice 2494
ENSEA MP 2017
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$.

Exercice 2495
Mines-Ponts MP 2013
Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$.

Exercice 2496
X - ESPCI PC 2013
Soit $f \in \mathcal{C}^3([-1;1],\mathbb{R})$. Montrer que la série de terme général $n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2f'(0)$ converge.

Exercice 2497

Centrale PC 2008
Déterminer la nature de la série de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k^2+(n+k)^2}$.

Exercice 2498
Mines-Ponts PC 2017
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^\alpha + (n-k)^\alpha}$.

Exercice 2499
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Étudier la nature de la série de terme général $\operatorname{Arctan}(n+\alpha) - \operatorname{Arctan}(n)$.

Exercice 2500
Centrale PC 2008
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\operatorname{Arctan}(n))^\alpha$.

Exercice 2501
Mines-Ponts PC 2018
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0;1]^n$. Comparer $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Arccos}(\alpha_k)$ et $\operatorname{Arccos}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de réels strictement positifs divergeant vers $+\infty$.
   Déterminer la nature de la série de terme général $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right)$.

Exercice 2502
Mines-Ponts PC 2018
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n!}{x^n} \prod\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{x}{k}\right)$.
1. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2503
Mines-Ponts PC 2019. IMT MP 2018
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^\alpha}{a \prod\limits_{k=1}^{n} (1+a^k)}$.

Exercice 2504
Mines-Ponts PC 2013. ESCP 1999
Soit a un nombre réel positif ou nul. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+a)}$ $(n \geqslant 1)$, où $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k$ désigne le produit $x_1 x_2 \cdots x_n$.
1. On suppose que $a \in [0;1]$. Montrer que la série de terme général u_n est divergente.
2. On suppose que $a > 1$ et on note $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$, pour $n \geqslant 2$.
   a) Établir la relation :
   $$\forall n \geqslant 2, \quad S_{n-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1} u_n.$$
   b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
   c) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2505
Mines-Ponts MP 2021
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

Exercice 2506

Étudier la nature de la suite et de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+\mathrm{e}^{-t}+\cdots+\mathrm{e}^{-nt}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2507

Mines-Ponts PC 2013

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Déterminer la nature de la série de terme général I_n.

Exercice 2508

CCP PC 2005

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes réels positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice 2509

CCP PC 2005

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{u_n}}$ converge.

Exercice 2510

Mines-Ponts PC 2017

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs positives telles que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ convergent.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice 2511

Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts PC 2016

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives.

1. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
   Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.
   La propriété réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
   Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt[p]{\prod\limits_{k=0}^{p-1} u_{n+k}}$ converge.

Exercice 2512

Centrale 2001

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs.

Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Exercice 2513

X MP 2021

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante à valeurs strictement positives. On suppose que $u_0 = 1$ et que la série de terme général $\dfrac{u_n^2}{u_{n+1}}$ converge.

Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geqslant 4.$$

Exercice 2514
ENS MP 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs positives. On suppose que la série de terme général v_n converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n + v_n$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2515
X MP 2015. X - ESPCI PC 2016. Mines-Ponts MP 2005
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes positifs.

1. Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
2. La conclusion subsiste-t-elle si la suite n'est pas décroissante ?
3. Les séries de termes généraux u_n et nu_n^2 sont-elles de même nature ?

Exercice 2516
X MP 2005. Mines-Ponts PC 2017.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0 et telle que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k - nu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exercice 2517
ENS PSI 2017. X PC 2005. Centrale MP 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs.

1. On suppose que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n S_n = 1$$
où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la somme partielle d'indice n de la série de terme général u_n.
   a) Montrer que la série de terme général u_n diverge puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   b) Déterminer un équivalent de u_n.
   c) Réciproquement, montrer que, si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $v_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \sum\limits_{k=0}^{n} v_n = 1$.
2. Généralisation
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \sum_{k=0}^{n} u_n^\alpha = 1.$$
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 2518
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{u_n}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2519
X MP 2005
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives et strictement croissante.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Exercice 2520
X - ESPCI PC 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives et strictement croissante.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n-u_{n-1}}{u_n}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Exercice 2521
ENSEA MP 2014
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels convergeant vers 0.
Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n(u_{n-1}-u_n)$ sont de même nature. En cas de convergence, comparer leurs sommes.

Exercice 2522
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha\in]0;1[$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n^{\frac{1}{n}}\leqslant 1-\frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Exercice 2523 - Règle de Raabe-Duhamel
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives. On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que :
- si $\alpha>1$, alors la série de terme général u_n converge;
- si $\alpha<1$, alors la série de terme général u_n diverge.

Exercice 2524 - Règle de Gauss
X MP 2017. Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2021
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs strictement positives. On suppose qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\quad\text{avec } \beta>1.$$

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\alpha>1$.

Exercice 2525
Soit $(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)}.$$

Exercice 2526
Mines-Ponts MP 2017
Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs réelles strictement positives telle que $\ln(u_n)\sim-\ln(n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge?

Exercice 2527
X - ESPCI PC 2017
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n\sim\alpha\ln(n)$.
1. Montrer que la série de terme général e^{-u_n} converge si $\alpha>1$, diverge si $\alpha<1$.
2. Montrer que l'on ne peut pas conclure si $\alpha=1$.

Exercice 2528
Mines-Ponts MP 2005
Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$u_n^{\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 2529

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et que $b_n = 1 + O\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$.

Étudier la nature de la série de terme général $a_n^{b_n}$.

Exercice 2530

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup\limits_{k\geqslant n} u_k$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est-elle convergente ?

Exercice 2531

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Montrer que la série de terme général $v_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^{-1}\right)^{-1}$ converge.

Exercice 2532

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$v_0 = u_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{1+u_{n+1}v_n}.$$

Étudier la nature de la série de terme général $1 - v_n$.

Exercice 2533

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

   Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ sont de même nature et, qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

2. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ une série convergente à termes réels positifs.

   Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(n!u_1u_2\cdots u_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!u_1u_2\cdots u_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 2534

HEC ECS - Exercice sans préparation 2015

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à termes strictement positifs et de limite nulle.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n}$.

1. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ en fonction de la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
2. Quel résultat obtient-on dans le cas $u_n = \dfrac{1}{n}$?

Exercice 2535

X MP 2013

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$.

Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Exercice 2536
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels positifs.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(v_1+v_2+\cdots+v_n)(u_{n-1}-u_n)$ converge.

Exercice 2537
Mines-Ponts PC 2015
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\dfrac{a_n}{u_n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

Exercice 2538 - Critère de condensation de Cauchy
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante convergeant vers 0.
1. Soit $\alpha\in[1,+\infty[$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante telle que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad p_{n+1}-p_n\leqslant\alpha(p_n-p_{n-1}).$$
Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1}(p_n-p_{n-1})u_{p_n}$ sont de même nature.
2. En déduire que, si $p\in]1,+\infty[$, alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} p^n u_{p^n}$ sont de même nature.
3. Donner un exemple de suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive décroissante convergeant vers 0 telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge et pour laquelle il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\sum_{n\geqslant 1}(p_n-p_{n-1})u_n$ converge.
4. En appliquant le critère de condensation de Cauchy, retrouver la règle de convergence de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ et de la série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

Exercice 2539
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs et $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$.
Montrer que, si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} f(u_n)$ converge.

Exercice 2540
TPE PC 2005
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\operatorname{Arctan}(a_n+\tan(u_n))$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n<\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2541
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\frac{1}{1+n^2u_n}.$$
Discuter la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

Exercice 2542
Mines-Ponts PC 2007
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n=\dfrac{1}{1+n^2u_n}$.
Montrer que, si la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Exercice 2543
CCINP PSI 2021
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n^2}\right).$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2}u_n.$$
2. Montrer que, si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer que la réciproque est fausse.
Indication. — Considérer $v_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice 2544
X - ESPCI PC 2014. Mines-Ponts PC 2018. IMT PC 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n}\right).$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série de terme général u_n converge.

Exercice 2545
Mines-Ponts PC 2021
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(v_0,v_1) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n + u_n v_{n-1}$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exercice 2546
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$, $u_0 < v_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{v_n - u_n}{2n+2} \\ v_{n+1} = v_n - \dfrac{v_n - u_n}{2n+2} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Déterminer leur limite commune.

Exercice 2547
X MP 2007
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{v_n} \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

Exercice 2548
CCP PC 2014. IMT PSI 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.
Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 2549
X PC 2020. Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2019
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ et $f'(x) < 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n f(u_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 2550
CCP PSI 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}\mathrm{e}^{u_{n+1}} = \frac{1}{2}u_n$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est unique.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge.
4. En considérant la série de terme général $\ln\left(2^{n+1}u_{n+1}\right) - \ln\left(2^n u_n\right)$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim \frac{c}{2^n}$.

Exercice 2551
X-ESPCI PC 2015
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 pour que cette suite soit bornée.

Exercice 2552
IMT PC 2021
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n^2 u_n$.
1. Donner la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2553
X MP 2017. Mines-Ponts MP 2005. Centrale MP 2005. Centrale PSI 2017. Centrale PC 2008. CCP MP 2017
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b}u_n.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. La condition de la question précédente étant satisfaite, calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Exercice 2554
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n}$.
Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2555
TPE PSI 2017. CCP PSI 2018. TPE PC 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

Exercice 2556
X - ESPCI PC 2008
1. Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
2. Montrer la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = n + \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$.

Exercice 2557
Mines-Ponts PC 2017
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.
1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On suppose dans la suite de l'exercice que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n^2$.
3. Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ell - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n u_n}.$$

5. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.
6. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n+1}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2558
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}}.$$

Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 2559
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PSI 2013
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(u_n)$.
1. Montrer que la suite $(2^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell > 0$.
2. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 2560
X - ESPCI PC 2016. Mines-Ponts MP 2019. Mines-Ponts PC 2019
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $a_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 2a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n^2}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2561
Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ une suite à valeurs dans $]0;1[$ telle que la série de terme général $\dfrac{u_n}{-\ln(u_n)}$ converge.
Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{\ln(n)}$ converge.

Exercice 2562
Mines-Ponts MP 2016
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.

Exercice 2563
X - ESPCI PC 2018. IMT MP 2013
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 2564
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit M_n le plus petit entier M tel que :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{M} > n.$$

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{M_n}$.

Exercice 2565
IMT PC 2016
Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} T_k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + \frac{T_n}{(n+1)^2}.$$

2. Conclure quant à la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\varphi(n)}{n^2}$.

Exercice 2566
Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application bijective.
Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{\sigma(n)}$, $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{\sigma(n)^2}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n\sigma(n)}$.

Exercice 2567
X MP 2021. X - ESPCI PC 2015. Mines-Ponts PC 2008.
Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application injective. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 2568
Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application bijective.
Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\sigma(n)}{n^3}$.

Exercice 2569
Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application injective.
Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} \dfrac{\sigma(n)}{n^2 \ln(n)}$.

Exercice 2570
TPE PC 2011
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n.
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n a^{p_n}}$.

Exercice 2571
Mines-Ponts MP 2021
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t + \cdots + t^n} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite ℓ de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $I_n - \ell$.

Exercice 2572

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles strictement positives. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -v_n \\ 0 & \dots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

Montrer que la série de terme général u_nv_n converge si, et seulement si, la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 2573 - Inégalité de Hardy
ENS PSI 2017
Établir l'existence d'une constante $K\in\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes strictement positifs avec $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{u_n}$ convergente, on ait :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{u_1+\cdots+u_n}\leqslant K\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}.$$

Déterminer la meilleure constante K possible.

1.3 Comparaison série-intégrale

Exercice 2574
Mines-Ponts MP 2005. IMT MP 2013
Déterminer $\lim\limits_{s\to 1^+}(s-1)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^s}$.

Exercice 2575
Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts PSI 2013
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $u_n\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{u_n-1}\frac{1}{k}\leqslant n<\sum_{k=1}^{u_n}\frac{1}{k}.$$

1. Montrer que u_n existe et est unique.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 2576
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit u_n le plus petit entier tel que :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{u_n}>1.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\mathrm{e}.$$

Exercice 2577
CCP MP 2005
Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$ quand $n\to+\infty$.

Exercice 2578
X - ESPCI PC 2017
Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k)$.

Exercice 2579
IMT MP 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\ln(k)$ et $u_n = \dfrac{1}{S_n}$.
1. Déterminer un équivalent de S_n.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2580
Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts PC 2005
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = n^2\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}$.

Exercice 2581
Mines-Ponts PSI 2005
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)} - \ln(\ln(n))$.

Exercice 2582
X - ESPCI PC 2014
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{1}{2}\ln^2(n)$.

Exercice 2583
Mines-Ponts PC 2017
Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1}$.

Exercice 2584
CCP PSI 2016
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \alpha\ln(n).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2585
CCP PSI 2016
Pour $\alpha > 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.
Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{R_n}{S_n}$.

Exercice 2586
Déterminer la partie entière de $\sum\limits_{n=1}^{10^9} \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$.

Exercice 2587
CCP PSI 2014
Soit $\alpha > 1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 2588
Mines-Ponts PC 2013
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$.

Exercice 2589

X MP 2005. Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PC 2018. Centrale PC 2017.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et, en cas d'existence, $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$.

1. On suppose que la série de terme général u_n diverge.
   Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. On suppose que la série de terme général u_n converge.
   Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 2590
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k > 1$.

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{S_n \ln(S_n)}$ diverge.
2. Montrer que la série de de terme général $\dfrac{u_n}{S_n(\ln(S_n))^2}$ converge.

Exercice 2591
Mines-Ponts PC 2005
Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+^*\right)$, strictement croissante, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

1.4 Sommation des relations de comparaison

Exercice 2592
Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PC 2005

1. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ.
2. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2593
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge..
2. On note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $u_n - \ell$.

Exercice 2594
CCINP PC 2021
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$ et $v_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de terme général v_n converge.
2. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie et que $I_n = 2\left(1 + \sqrt{n}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
   Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I_n.$$

En déduire un équivalent de R_n.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer que $T_n \sim \sqrt{\mathrm{e}}R_n$.

Exercice 2595

Mines-Ponts MP 2013

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+kb) \quad \text{et} \qquad B_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(a+kb)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{A_n}{B_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2596

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ une suite réelle à valeurs strictement positives telle que :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)} \sim \frac{1}{n\ln(n)}.$$

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

   Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_n}$.

Exercice 2597

X MP 2005

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. On suppose que la suite $\left(\dfrac{S_n}{nu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{n^2u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} ku_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. *Généralisation*

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$. On suppose que les suites $\left(\dfrac{S_n}{nu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{T_n}{nv_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ respectivement.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{n^2u_nv_n}\sum\limits_{k=1}^{n} ku_kv_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2598

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k}$.

Exercice 2599

X - ESPCI PC 2014

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{n+1}$.

Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 2600

X MP 2007

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}\sqrt{u_n}$.

Exercice 2601

X MP 2014. Centrale PC 2005. TPE MP 2005

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 2602

X MP 2017

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{th}(u_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 2603

Mines-Ponts MP 2021

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.
Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 2604

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{u_n}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 2605

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_1 + \cdots + u_n}$.
Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2606

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n^\alpha}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. On suppose que $\alpha > 1$ et on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Déterminer un équivalent de $\ell - u_n$.
3. On suppose que $\alpha \leqslant 1$.
   Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 2607

Mines-Ponts MP 2016

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{nu_n}$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 2608

Mines-Ponts MP 2013

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. On suppose que $\alpha > 1$ et on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Déterminer un équivalent de $\ell - u_n$.
3. On suppose que $\alpha \leqslant 1$.
   Déterminer un équivalent de $u_{n+1}^2 - u_n^2$, puis un équivalent de u_n.

Exercice 2609

Centrale PC 2005

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{1 + u_{n+1}u_n}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 2610
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes réels strictement positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{u_n}$ converge.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{u_1+\cdots+u_n}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1+\cdots+u_n} \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}.$$

Exercice 2611 - Inégalité de Carleman
Établir l'existence d'une constante $K\in\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour toute série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ à termes positifs, on ait :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{u_1\cdots u_n} \leqslant K\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Déterminer la meilleure constante K possible.

2 Séries à termes quelconques

2.1 Calculs de sommes

Exercice 2612
Soit $f\in\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2613
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 2614
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$.
1. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n.$$

2. Montrer que la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}}$.
3. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{F_nF_{n+2}}$.

Exercice 2615
Mines-Ponts PC 2005. Centrale PSI 2014
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 2616
ENTPE - EIVP PC 2015
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 2617
Mines-Ponts MP 2018, Mines-Ponts PSI 2017, Mines-Ponts PC 2016. IMT MP 2019. EIVP PC 2016
1. Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}.$$

2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

3. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$.

Exercice 2618
CCINP PC 2021
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$, $v_n = (-1)^n u_n$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On admet l'existence d'un réel γ tel que que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
1. Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Comparer u_n et $\dfrac{1}{n}$. En déduire la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
3. Exprimer $S_{2n} - S_n$ avec une seule somme et montrer par comparaison série-intégrale que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \frac{(\ln(2n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant \frac{(\ln(2n))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2}.$$

4. Montrer que :

$$S_{2n} - S_n = \ln(2)\ln(n) + \frac{(\ln(2))^2}{2} + o(1).$$

5. Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ en fonction de H_n et S_n.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Exercice 2619
X MP 2021. Mines-Ponts PSI 2018. Centrale MP 2005
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
1. Déterminer la nature des séries de termes généraux $f(n)$, puis $(-1)^n f(n)$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}\right) - \dfrac{1}{2}(\ln(n))^2$ est convergente.
3. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 2620
1. Calculer la somme de la série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

   obtenue en réarrangeant les termes de la série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ de sorte que chaque terme positif soit suivi de deux termes négatifs.
2. a) Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer la somme de la série

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2} + \cdots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \frac{1}{2q+4} - \cdots - \frac{1}{4q} + \cdots$$

   obtenue en réarrangeant les termes de la série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ de sorte que p termes positifs soient suivis de q termes négatifs.

   b) Calculer la somme de la série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots$$

   obtenue en réarrangeant les termes de la série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ de sorte que chaque terme positif soit suivi de quatre termes négatifs.

3. Montrer la divergence de la série
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$
obtenue en réarrangeant les termes de la série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ de sorte que n ($n\in\mathbb{N}^*$) termes positifs soient suivis d'un terme négatif.

Exercice 2621

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2622

Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PC 2021
Montrer la convergence de la série de terrme général $(-1)^n\int_0^1\cos\left(nt^2\right)\mathrm{d}t$ et calculer sa somme.

Exercice 2623

Mines-Ponts MP 2017. Centrale PSI 2009
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ku_k$.
1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général $\frac{v_n}{n+1}$ converge et calculer sa somme.

2.2 Étude de la convergence

Exercice 2624

Mines-Ponts PC 2017. CCP MP 2016. IMT PSI 2021
Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Exercice 2625

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes telles que les séries $\sum_{n\geqslant 0}|u_n|^2$ et $\sum_{n\geqslant 0}|v_n|^2$ convergent.
Montrer que, pour tout $p\geqslant 2$, la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n-v_n)^p$ converge.

Exercice 2626

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes telle, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Re\mathrm{e}(u_n)\in\mathbb{R}_+$. On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}u_n^2$ convergent.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}|u_n|^2$ converge.

Exercice 2627

Mines-Ponts MP 2014
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites complexes avec, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n\neq 0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ et $T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{b_k}{b_{k+1}}\right)a_k$. On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant 1}\left|1-\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|^2$ et $\sum_{n\geqslant 1}|S_n-T_n|^2$ converge.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ converge.

Exercice 2628

Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 1-périodique.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_n^{n+1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$.

2.3 Règle d'Abel. Séries alternées

Règle d'Abel

Exercice 2629 - Série de Dirichlet
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Montrer que, si la série de terme général $\dfrac{u_n}{n^x}$ converge pour $x = x_0$, alors elle converge pour tout $x > x_0$.

Exercice 2630
1. *Un test d'Abel*
   Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ converge.
   Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.
2. *Applications*
   a) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{\operatorname{Arctan}(n)}{\sqrt{n}}$.
   b) Soit $x > 1$. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{\sqrt[n]{\ln(x)}}{n}$.
   c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\ln^2(n)} \cos\left(\pi \dfrac{n^2}{n+1}\right)$.

Exercice 2631
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et que sa somme est un nombre irrationnel.

Exercice 2632
Déterminer la nature de la série de terme général $\min\left(\dfrac{\sin(n)}{n}, \dfrac{\cos(n)}{n}\right)$.

Exercice 2633
Déterminer la nature des séries de termes généraux $(-1)^n \dfrac{\cos(n)}{n}$ et $(-1)^n \dfrac{\sin(n)}{n}$.

Exercice 2634
Déterminer la nature des séries de termes généraux $\dfrac{\cos(n)}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $\dfrac{\sin(n)}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Séries alternées

Exercice 2635
Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts PC 2014. CCP PSI 2017. ENSEA PSI 2019. IMT PC 2011
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 2636
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$.

Exercice 2637
Mines-Ponts MP 2005
Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)}\right)$.

Exercice 2638
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dbinom{n+p}{p}^{-\alpha}$.
Étudier la nature des séries de termes généraux u_n et $(-1)^n u_n$.

Exercice 2639

Mines-Ponts PC 2019. Centrale PSI 2014

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 2640

Centrale PSI 2017

Déterminer la nature de la série de terme général $\exp\left((-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}\right) - 1$.

Exercice 2641

X - ESPCI PC 2008. Mines-Ponts PSI 2018. IMT MP 2019

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

Exercice 2642

Mines-Ponts PC 2018

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^{n+1} + \sqrt{n}}$.

Exercice 2643

Mines-Ponts PC 2017

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + \sin(n)}$.

Exercice 2644

Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-n}}{k}\right)^{\ln(n)}$.

Exercice 2645

Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k(n-k)}$.

Exercice 2646

Mines-Ponts MP 2013

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n}$.

Exercice 2647

Mines-Ponts MP 2013. TPE PSI 2016. Navale PC 2009

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^{n+1}}}$.

Exercice 2648

Mines-Ponts PSI 2017

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + (-1)^n}$.

Exercice 2649

Mines-Ponts PC 2021

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{(-1)^n n^\alpha + \ln(n)}$.

Exercice 2650

X ESPCI PC 2008

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n \ln\left(n + \sin^2(n)\right)}$.

Exercice 2651
Centrale PC 2017. Navale PSI 2018
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq \beta$. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$.

Exercice 2652
Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n \left(\mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.

Exercice 2653
IMT PSI 2019
Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$.

Exercice 2654
Déterminer la nature de la série de terme général $\sin\left(\sqrt{1 + n^2\pi^2}\right)$.

Exercice 2655
X - ESPCI PC 2014. Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2016
Déterminer la nature de la série de terme général $\sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right)$.

Exercice 2656
Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(n!\pi\mathrm{e})$.

Exercice 2657
Mines-Ponts PC 2017
Déterminer la nature de la série de terme général $\cos\left(n^2\pi(\ln(n-1) - \ln(n))\right)$.

Exercice 2658
CCP PSI 2018
Montrer que la série de terme général $\ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 2659
X MP 2007. X - ESPCI PC 2019. Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PSI 2018
Déterminer la nature des séries de termes généraux $(-1)^n \dfrac{\sin(\ln(n))}{n}$ et $(-1)^n \dfrac{\cos(\ln(n))}{n}$.

Exercice 2660
Mines-Ponts PSI 2017. IMT PC 2018
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général $\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 2661
X - ESPCI PC 2017
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Exercice 2662
Mines-Ponts MP 2017
Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Exercice 2663
X - ESPCI PC 2008. Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2021
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2664
Mines-Ponts PSI 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$.
1. Montrer que :
$$u_n \sim (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{2}.$$
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_n + u_{n+1}$ admet une limite strictement positive.
3. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 2665
X - ESPCI PC 2016. Mines-Ponts PC 2015
Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\tan\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$.

Exercice 2666
TPE PC 2010
Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{x+1}\mathrm{d}x$.

Exercice 2667
Mines / Ponts et Chaussées 2001
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Discuter, selon les valeurs de a et b, la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2668
Mines-Ponts MP 2013
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.
Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} r_n$.

Exercice 2669
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\alpha}$.

Exercice 2670
Déterminer la nature de la série :
$$1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right) + \cdots.$$

Exercice 2671
Centrale PSI 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + nx - 2$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n.
2. Déterminer la nature des séries de termes généraux x_n et $(-1)^n x_n$.
3. Déterminer la limite de $n(1 - nx_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2672
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{\sin(u_n)}{n}$.
Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

Exercice 2673
IMT PC 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Étudier la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$.

Exercice 2674
CCP PSI 2018. IMT PSI 2016. IMT PC 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$.
1. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$.

Exercice 2675
Mines-Ponts PSI 2013. Centrale PC 2017. IMT PSI 2019
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}$.
1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2.
4. Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2676
IMT PSI 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.
1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$.

Exercice 2677
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
Étudier la convergence de la série de terme général u_n ainsi que celle de son carré de Cauchy.

Exercice 2678
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries convergentes de sommes respectives A et C.
Montrer que, si leur produit de Cauchy $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge vers C, alors $C = AB$.

2.4 Comparaison série-intégrale

Exercice 2679
X PC 2005
Déterminer la nature des séries de termes généraux $\dfrac{\cos(\ln(n))}{n}$ et $\dfrac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Exercice 2680

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 1-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Que peut-on en déduire concernant l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$?

Chapitre XXV

Suites et séries de fonctions

1 Suites de fonctions

Exercice 2681

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^3 x}{n^4 + x^4}$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2682

CCP PC 2001

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2683

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
   La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniforme sur $[0;1]$?

Exercice 2684

ENSEA MP 2013

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2685

CCP MP 2013

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = nx^n(1-x)$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$.
2. Étudier la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$.
3. La convergence uniforme est-elle une condition nécessaire pour intervertir les symboles lim et $\displaystyle\int$?

Exercice 2686
IMT PC 2017
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln(x))^{2n} - 2}{(\ln(x))^{2n} + 2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $[1,2]$?

Exercice 2687
Mines-Ponts PC 2019
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp\left(\dfrac{(n-1)x}{n}\right)$.
1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]-\infty,a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2688
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = nx^n\left(1-x^2\right)$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]$.

Exercice 2689
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-x^2\ln(n)}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2690
ENTPE - EIVP PC 2014
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \longmapsto nx\mathrm{e}^{-nx^2}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2691
X MP 2016
Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2692
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 2693
CCP MP 2013. ENSEA - ENSIIE MP 2014. CCP PSI 2005
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \longmapsto n\sin(x)\cos^n(x)$.
1. Étudier l'existence puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2694
Mines-Ponts PC 2019
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.
1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2695

ICNA PSI 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \longmapsto \sqrt{n}\cos(x)\sin^n(x)$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2696
TPE MP 2001
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(X - P_n^2\right)$.
1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\right).$$
2. Exprimer de même $P_{n+1}(x) + \sqrt{x}$ en fonction de $P_n(x) + \sqrt{x}$.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0;1], \quad \sqrt{x} \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_n(x) \leqslant 1.$$
4. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.
5. Déterminer le sens de variation de $x \longmapsto P_n(x) - \sqrt{x}$ et de $x \longmapsto P_n(x) + \sqrt{x}$ sur $[0;1]$.
6. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

Exercice 2697
ENS PC 2016
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est une fonction polynomiale.

Exercice 2698
X - ESPCI PC 219
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = \dfrac{f_n}{1+f_n^2}$.
Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

Exercice 2699 - Deuxième théorème de Dini
X - ESPCI PC 2020
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

2 Séries de fonctions

Exercice 2700
X MP 2005
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 2701
CCP MP 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec
1. Étudier la convergence simple et la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
   On note f la somme de cette série.
   Préciser le sens de variation de f.
2. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
   En déduire la valeur de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 2702
CCP PSI 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2\left(1+x^{2n}\right)}$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

   On note $S(x)$ la somme de cette série.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $S\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $S(x)$.
5. Étudier la continuité de S sur $\mathbb{R}_+$.
6. Préciser la limite de S en $+\infty$.

Exercice 2703
Mines-Ponts MP 2005
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par $f_0(x) = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n\left(t - t^2\right)\mathrm{d}t.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

Exercice 2704
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice 2705
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+x^n)}{n}$.
1. Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2706
Mines-Ponts MP 2015
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n(1-x)^2$.
Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$.

Exercice 2707
Mines-Ponts PC 2017
Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.
Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2708
CCP PSI 2005
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0;1]$.
2. Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[0;1]$.

Exercice 2709
Mines-Ponts MP 2013
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in [0;1] \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n f(x)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

Exercice 2710
Centrale PC 2008
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$.
1. Étudier la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
2. Sur quels intervalles la convergence est-elle normale?

Exercice 2711
CCINP PC 2019
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$.
Étudier la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice 2712
Mines-Ponts PC 2018. CCINP MP 2019
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x)=\dfrac{x}{n^2+x^2}$.
1. a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers une fonction continue f mais pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n f_n$ converge uniformément mais pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2713
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=(-1)^n\underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin(x))))}_{n\text{ fois}}$.
Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément mais pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2714
Mines-Ponts PC 2017
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$.
1. Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
   On note f la somme de cette série.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2715
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.
1. Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.
   On note f la somme de cette série.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2716
Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2018
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$.
1. Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$.
   On note f la somme de cette série

2. Étudier la convergence normale et la convergence uniforme sur $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$.

3. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2717
Mines-Ponts PC 2019. IMT MP 2019
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ et $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer la limite de f en 0^+

Exercice 2718
Mines-Ponts MP 2013. Mines-Ponts PSI 2015
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ et $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les variations de f et déterminer ses limites en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xf(x) - f(x+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$
4. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$

Exercice 2719
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$ et $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.
Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 2720
Mines-Ponts PSI 2018. IMT MP 2018. TPE PC 2018
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$ et $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.
3. On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

   Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

Exercice 2721
CCP PSI 2005
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx^2)}$.
1. Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

   On note f la somme de cette série.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 2722
Mines-Ponts PSI 2018
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.
1. Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

   On note f la somme de cette série.

2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 2723
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n\left(1+n^2 x\right)}$ et f la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 2724
CCINP MP 2019. IMT MP 2018
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$.
1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $f = \sum_{n\geqslant 1} f_n$.
2. Déterminer la monotonie de f sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
4. Déterminer la limite puis un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
5. Déterminer la limite puis un équivalent de $f(x)$ en 0^+.

Exercice 2725
Mines-Ponts PSI 2016. Mines-Ponts PC 2016
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$.
1. Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

   On note f la somme de cette série.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0.
4. Déterminer un équivalent de f' en 0.

Exercice 2726
X MP 2018
Soit $(a,b) \in]0;1[\times]1,+\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, si $ab < 1$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, si $ab \geqslant 1$, alors f n'est pas dérivable en 0.
4. Soit p le plus grand entier naturel tel que $ab^p < 1$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^p$ mais pas de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}$.
5. On suppose que b est un entier impair et que $ab > 1 + \dfrac{3}{2}\pi$.
   Montrer que f est dérivable nulle part sur $\mathbb{R}$.

Chapitre XXVI

Séries entières

1 Rayon de convergence

Exercice 2727
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$.
Déteminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$.

Exercice 2728
Mines-Ponts MP 2017
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{a_n} z^n$?

Exercice 2729 - Produit de Hadamard
Mines-Ponts MP 2017
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On note R_a et R_b les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ respectivement.
Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n z^n$?

Exercice 2730
X - ESPCI PC 2008
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, non constant.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} P(n) a_n z^n$.

Exercice 2731
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 2732

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont tous les coefficients sont non nuls. On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = \ell_1 \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| = \ell_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exercice 2733
CCINP PC 2019
Déterminer les rayons de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln(n)x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln(n!)x^n$.

Exercice 2734
Mines-Ponts MP 2016
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{S_n} = 0$.
Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} S_n x^n$ et lier leurs sommes.

Exercice 2735
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers 0, telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exercice 2736
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$. On note R_b le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$.
Montrer que $R_b = \max(1, R_a)$.

Exercice 2737
Mines-Ponts PC 2019
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1\right) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $\ell \neq 0$, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
2. Que peut-on dire si $\ell = 0$?

Exercice 2738
Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k z^n$.

Exercice 2739
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \operatorname{Arctan}(n^\alpha)\, x^n$.

2 Développement en série entière

Exercice 2740
CCP PC 2018
Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 x^n$.

Exercice 2741
IMT PC 2018
Développer en série entière la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+3)(x-1)}$. Préciser le rayon de convergence.

Exercice 2742
X ESPCI PC 2008
Soit $a \in \mathbb{R}$.
1. Factoriser $P(X) = X^2 - 2\text{ch}(a)X + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{P(X)}$.
3. Développer en série entière en zéro la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{P(x)}$. Donner son rayon de convergence.

Exercice 2743
Mines-Ponts MP 2018, Mines-Ponts PSI 2015, Mines-Ponts PC 2021. IMT PSI 2016
Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$.

Exercice 2744
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! > \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Exercice 2745
Putnam 1992
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $f^{(k)}(0)$.

Exercice 2746
CCINP PC 2019
Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.
1. Montrer que le rayon de convergence de f est infini.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $xy'' + y' - y = 0$.

Exercice 2747
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant$f$.
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right)$.

Exercice 2748
Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PC 2017
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

Exercice 2749
Mines-Ponts MP 2013
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence R et calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

Exercice 2750
Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PC 2015
Montrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right).$$

Exercice 2751
TPE MP 2015
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$.

Exercice 2752
Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n-2)(n+1)2^n}$.

Exercice 2753
Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{2^n+n3^n}{n(n-1)5^n}$.

Exercice 2754
Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 2755
Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}\right)$.

Exercice 2756
Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{n}$.

Exercice 2757
TPE MP 2016
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$$

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!} x^n$.
2. Calculer leurs sommes quand celles-ci sont définies.

Exercice 2758
Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PC 2015
1. Déterminer le rayon de convergence R et calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ pour tout $x \in]-R,R[$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 2759
Mines-Ponts PC 2015
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$.
1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f puis sa somme.
2. Déteminer le comportement de f aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 2760

Mines-Ponts PSI 2005

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Montrer que f est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle :

$$(1-4x)y'(x) = 2y(x).$$

3. En déduire f.

Exercice 2761

Mines-Ponts MP 2013

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$.

1. Justifier que f est développable en série entière et donner une expression simple de son développement en série entière.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k}{(n-2k-1)!(2k+1)!} = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice 2762

Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2019. IMT PSI 2019

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. On suppose que f a un rayon de convergence R strictement positif.
   Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2763

Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2007. CCP PSI 2013

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$, et $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ la série génératrice exponentielle associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On suppose que la série entière définissant f a un rayon de convergence non nul.
   En considérant un produit de Cauchy, déterminer une équation différentielle vérifiée par f puis la résoudre.
   En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
2. Vérifier le résultat précédent.

Exercice 2764

CCINP MP 2019

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} \ln(n) x^n$, dont on note $f(x)$ la somme.
2. Montrer que :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad (x-1)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n.$$

3. En remarquant que, pour tout $n \geqslant 2$, $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, encadrer $(x-1)f(x)$ pour $x \in]-1;1[$.
4. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en R.

Exercice 2765
Mines-Ponts PC 2016
Soit $f : x \longmapsto \sum\limits_{n\geqslant 2} \ln(n)x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de f.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to R^-$ et quand $x \to -R^+$.

Exercice 2766
Mines-Ponts PC 2017. IMT PC 2018
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{tr}(A^n)\, z^n$ et sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Exercice 2767
Mines-Ponts MP 2013. CCP PSI 2017. CCINP PSI 2021. IMT PSI 2016. CCP PC 2005
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ converge et déterminer sa somme.
3. Soit $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \frac{1}{n+1}.$$
   En déduire le rayon de convergence de la série entière définissant f.
   b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

Exercice 2768
Mines-Ponts MP 2016
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le développement en série entière de $\varphi_\alpha :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(\alpha \operatorname{Arccos}(x))$.
2. Pour quelles valeurs de α la fonction φ_α est-elle polynomiale ?

Exercice 2769
Mines-Ponts PSI 2013. Mines-Ponts PC 2015

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(x)$ au voisinage de 0.
2. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ au voisinage de 0.
   En déduire la valeur de la somme :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$
3. Déterminer le développement en série entière de $x \longmapsto (\operatorname{Arcsin}(x))^2$ au voisinage de 0.
   En déduire la valeur de la somme :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 2770
CCINP PSI 2019. CCP PC 2007

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n+1}$.

Pour tout $x \in]-R,R[$, on pose : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} x^{2n+1}$.

2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $\left(x^2-2\right) y' + xy + 2 = 0$.

3. Déduire de ce qui précède une expression explicite de f.
4. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$ converge-t-elle pour $x=R$?

Exercice 2771
Mines-Ponts PSI 2015
1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{2n+1}}{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)}$.
2. Montrer que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)} = \sqrt{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}.$$
Indication. — Considérer une équation différentielle.

Exercice 2772
Mines-Ponts PC 2016. CCP PSI 2005
Soit $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.
1. Justifier que f est développable en série entière.
2. Déterminer le développement en série entière de f de deux façons
3. En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 2773
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2016. Centrale MP 2005
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$, c'est-à dire l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ n'ayant pas de point fixe, et on pose $d_n=\mathrm{Card}(D_n)$ en convenant que $d_0=1$.
1. Montrer que :
$$n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}.$$
2. On considère la série génératrice exponentielle de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{d_n}{n!}x^n$.

   Montrer que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
3. En déduire que :
$$d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$
4. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad d_n = \left\lfloor \frac{n!}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}\right\rfloor.$$

Exercice 2774 - Partitions. Nombres de Bell
Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2019
Soit $n\in\mathbb{N}$ et E_n un ensemble de cardinal n. On note B_n le nombre de partitions de E_n avec $B_0=1$ par convention.
1. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$
3. Soit G la fonction génératrice exponentielle de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n.$$

Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est non nul puis que, pour tout $x \in]-R,R[$, $G(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.

4. En déduire la formule de Dobinski :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Exercice 2775

X MP 2005. X - ESPCI PC 2018. Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2019. CCP PSI 2017

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire le nombre d'applications $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$. On convient que $I_0 = 1$.

1. Calculer I_1 et I_2.
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$

3. Soit $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ et R son rayon de convergence.
   Montrer que $R \geqslant 1$.
4. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f sur $]-R,R[$ puis la résoudre.
5. En déduire R puis une expression de I_n en fonction de n.

Chapitre XXVII

Séries de Fourier

Exercice 2776
Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = x^2$.
1. Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.
2. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Chapitre XXVIII

Intégration sur un intervalle quelconque

1 Étude de la convergence

Exercice 2777
CCP PSI 2016. CCP PC 2014
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 2778
Centrale PSI 2013. CCP PSI 2016. CCP PC 2014
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 2779
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 2780
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 2781
CCP PSI 2018
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(\ln(t))}\mathrm{d}t$.

Exercice 2782
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln(t))^{\ln(t)}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2783
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{(\ln(\ln(t)))^{\ln(t)}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2784
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln(t))^{\ln(\ln(t))}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2785
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\mathrm{Arccos}(1-t)}\mathrm{d}t$.

Exercice 2786

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 2787

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2788

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\frac{t}{t+1}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2789

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln(t))^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 2790

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt[4]{t^2+1}}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 2791

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(5t)-\sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2792

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$.

Exercice 2793

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^\alpha-t^2}}$.

Exercice 2794

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{t+a}-\sqrt[3]{t+b}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2795

Putnam 1995

Déterminer les couples $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right)\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 2796

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 2797

ICNA PSI 2013. ICNA PC 2017

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 2798

IMT MP 2019

Soit $a\in\mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a\ln\left(t+\mathrm{e}^{at}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 2799

Soit $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^*)^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha+t^\beta}\mathrm{d}t$.

Exercice 2800

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^{\alpha}(t)}{t(\pi - t)}\mathrm{d}t$.

Exercice 2801

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\alpha}(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2802

IMT PC 2019

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2803

X - ESPCI PC 2008

Soit $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(t^{\alpha}\right)}{t^{\beta}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2804

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^{\alpha}(t+1)^{\beta}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2805

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}\ln(t)}{(t+1)^{\beta}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2806

CCP MP 2017

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}\left(1+t^{\beta}\right)}\mathrm{d}t$.

Exercice 2807

CCP MP 2017

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{\alpha} - t^{\alpha}}{t^{\beta}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2808

ESCP 2001

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\beta}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2809

Mines-Ponts MP 2015. Mines-Ponts PC 2018. IMT MP 2016

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+t^{\alpha}\right)}{t^{\beta}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2810

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2811

Mines-Ponts MP 2018

Soit $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\right)$ et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s_0 t}f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que, pour tout $s \geqslant s_0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2812
X MP 2005
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, intégrable, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = f\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2813 - Inégalité de Hardy
X MP 2013
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que la fonction g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2814 - Inégalité de Weyl
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que les fonctions f' et $x \longmapsto xf(x)$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} (f(t))^2\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} t^2(f(t))^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} (f'(t))^2\mathrm{d}t}.$$

Exercice 2815 - Inégalité de Wirtinger
Mines-Ponts PC 2021. ESCP 2019
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Montrer que l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{cotan}(\pi t)f(t)f'(t)\mathrm{d}t$ converge puis que :

$$I(f) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (f(t))^2\left(1 + \operatorname{cotan}^2(\pi t)\right)\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que :

$$\int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t.$$

3. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

2 Calculs d'intégrales généralisées

Exercice 2816
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Exercice 2817
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

Exercice 2818
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2819
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x+2)^2}$.

Exercice 2820

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x$.

Exercice 2821

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 < 4b$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+ax+b}$.

Exercice 2822

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2823

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Exercice 2824

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 2825

IMT PC 2010

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lfloor x\rfloor \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

Exercice 2826

CCP PSI 2014

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lfloor x\rfloor}\mathrm{d}x$.

Exercice 2827

Mines-Ponts PSI 2017

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2828

Mines-Ponts MP 2021. TPE PC 2005

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2829

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}$ converge auquel cas calculer sa valeur.

Exercice 2830

CCINP PC 2019

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}$ converge auquel cas calculer sa valeur.

Exercice 2831

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2832

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 2833
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$.

Exercice 2834
X MP 2005
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Exercice 2835
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \frac{t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2836
Mines-Ponts PSI 2013
Calculer $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$.

Exercice 2837
Mines-Ponts PSI 2017
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2838
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2839
1. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$.

Exercice 2840
IMT PSI 2013
Soit $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}$.
1. Justifier la convergence de I.
2. Montrer que $I = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}$ puis calculer I.

Exercice 2841
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

Exercice 2842
Mines-Ponts PSI 2016
Soit $p \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon p, l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^p(x)}{\cos^p(x)+\sin^p(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2843
Mines-Ponts MP 2018. Centrale PC 2008. IMT MP 2018. CCP PSI 2016. ENSEA PSI 2021
Montrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta$ sont convergentes puis calculer leurs valeurs.

Exercice 2844
Mines-Ponts PC 2021
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)\ln(\sin(x))\mathrm{d}x$.
1. Justifier l'existence de I_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $2nI_n - 2(n+1)I_{n+1}$.
   En déduire la valeur de I_n.

Exercice 2845
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$.

Exercice 2846
Mines-Ponts MP 2005
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

Exercice 2847
Mines-Ponts MP 2017
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

Exercice 2848
Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(a\mathrm{e}^x+1)(b\mathrm{e}^x+1)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2849
X - ESPCI PC 2017
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.

Exercice 2850
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \mathrm{Arctan}(x)}{x^3}\mathrm{d}x$.

Exercice 2851
IMT PC 2018
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2852
IMT MP 2013
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \mathrm{Arctan}(x)}{x(1+x^2)\mathrm{Arctan}(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2853
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{Arctan}(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2854
IMT PSI 2021
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - x\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2855
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 \ln(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2856
CCINP PC 2019
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2857
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2858
Mines-Ponts MP 2016
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2859
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

Exercice 2860
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

Exercice 2861
X PC 2001. TPE MP 2013. ICNA PSI 2018. CCP PC 2018
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2862
Mines-Ponts MP 2016
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(1-x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Exercice 2863
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2017. ENSEA MP 2017
1. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x^2+1)(x^2+a^2)}\mathrm{d}x$.

Exercice 2864
IMT PSI 2019
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2865
X - ESPCI PC 2016. Centrale PC 2014. IMT PSI 2019
1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)\mathrm{d}x$.
2. Calculer cette intégrale pour $\alpha = 2$.

Exercice 2866
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer la converge puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(a)}$.

Exercice 2867
Mines-Ponts MP 2019. Mines-Ponts PSI 2005
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)-\cos(nx)}{\cos(t)-\cos(x)}\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de $I_n(x)$.
2. Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite $(I_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
   En déduire $I_n(x)$.

Exercice 2868
CCP PSI 2017
On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{2X+1}{X(X+1)^2}$.
2. Justifier la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \mathrm{d}t$.

Exercice 2869
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}\mathrm{d}x$

Exercice 2870
Mines-Ponts MP 2014. X PSI 2020. Centrale PSI 2013. CCP PC 2014
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$.

1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}. En déduire la valeur de I_n.
2. Déterminer la limite de $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2871
Centrale PSI 2017
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
2. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \ln(I_n) + \alpha\ln(n)$.
   Étudier, en fonction de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. En déduire un équivalent de u_n quand $n\to+\infty$.

Exercice 2872
CCP PC 2005
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^n}$.

1. Justifier la convergence de I_n puis déterminer sa limite quand $n\to+\infty$.
2. En posant $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que
$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t.$$
   En posant $u = t - \dfrac{1}{t}$, en déduire I_1.
3. Calculer I_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2873
X MP 2018
Soit $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$.

1. Montrer que :
$$\forall n\geqslant 2,\quad \frac{f(n-1)+f(n)}{2} = \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t + \int_{n-1}^n \left(t-(n-1)-\frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que :
$$\forall (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\quad n>m,\quad , \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k) = \int_m^n f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n + \left(t-\lfloor t\rfloor - \frac{1}{2}\right)f'(t)\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(2\pi)-1.$$

Exercice 2874

Centrale PSI 2018

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série réelle convergente. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles et S sa somme.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}x^n$ et $g(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{S_n}{n!}x^n$.
2. Montrer que : $f'=g'-g$.
3. En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=(g(x)-f(x))\mathrm{e}^{-x}.$$

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 2875

Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $a<b$, et f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Exercice 2876 - Théorème des moments de Hausdorff

Mines-Ponts PSI 2005

1. *Théorème des moments de Hausdorff*

   Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)t^n\mathrm{d}t=0$.

   Montrer que la fonction f est identiquement nulle.
2. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $f\in\mathcal{C}([-a,a])$.
   a) Montrer que f est paire si, et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)t^{2n+1}\mathrm{d}t=0$.
   b) Montrer que f est impaire si, et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)t^{2n}\mathrm{d}t=0$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\exp\left(-x^{-\frac{1}{4}}\right)\sin\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$.

   Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)t^n\mathrm{d}t=0$.

Exercice 2877 - Intégrale de Gauss

1. Montrer la convergence de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.
2. Montrer que :

$$\forall x\in]-1,+\infty[,\quad \ln(1+x)\leqslant x.$$

3. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x.$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\mathrm{d}t$.

   Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sqrt{n}W_{2n+1}\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{n}W_{2n-2}.$$

5. Déduire la valeur de I de l'étude des intégrales de Wallis.

Exercice 2878 - Intégrale de Dirichlet
Mines-Ponts PC 2018. ESCP 2010

1. Montrer que :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin^2(p) - \sin^2(q) = \sin(p+q)\sin(p-q).$$
2. Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ convergent et qu'elles sont égales.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2} \mathrm{d}t, \quad A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2 t} \mathrm{d}t.$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n \leqslant I_n \leqslant A_n.$$
4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ puis $A_n - B_n$.
   b) En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \mathrm{d}t$, et donner la valeur de cette dernière intégrale.

Exercice 2879 - Intégrale de Dirichlet
Centrale PC 2018. CCP PC 2018

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t \right) = 0.$$
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 2880 - Intégrale de Dirichlet
Centrale PC 2021

1. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos(t)} \cos(x \sin(t)) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t.$$
3. En déduire la valeur de I.

3 Études d'intégrales

3.1 Cas des fonctions positives

Exercice 2881
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, majorée. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f''(x) \geqslant \alpha f(x).$$

1. Montrer que la fonction f' est croissante et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-x\sqrt{\alpha}}.$$

Exercice 2882
Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PC 2021
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, décroissante.
1. Montrer que, si f est intégrable, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2883
Mines-Ponts PC 2018
Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow$ une fonction positive et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t(f(t)-f(t+1))\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 2884
Déterminer un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(1+x^2)}$.

Exercice 2885
Centrale PC 2016
Montrer que :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}.$$

3.2 Cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes

Exercice 2886
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que $f+f'$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 2887
X - ESPCI PC 2008
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ converge.
Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+a)-f(x)|\mathrm{d}x$.

4 Théorème de convergence dominée

Exercice 2888
CCINP PC 2019
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2889
CCP MP 2016
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2890
ENSAM PSI 2013. IMT PC 2016
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{x^n}\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2891
TPE PC 2005
Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}t$.

Exercice 2892
Soit $p \in [1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{pk+1}$.
Déterminer un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 2893
Mines-Ponts PC 2017
Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2894
CCP PC 2005
Soit $\alpha > -1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$.
Justifier la convergence de I_n puis déterminer la limite de suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2895
Mines-Ponts PC 2007
Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nt^n}{\sqrt{1+t^n}}\mathrm{d}t$.

Exercice 2896
Mines-Ponts MP 2005
Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f\left(t^n\right)\mathrm{d}t$.
1. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que f est dérivable en 0. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de I_n.

Exercice 2897
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et intégrable.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n \ln\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2898
Mines-Ponts MP 2016
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, décroissante. Montrer que:

$$\lim_{x\to+\infty} x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f(t)\mathrm{d}t = f(0).$$

Exercice 2899
X ESPCI PC 2008
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2(f(x))^2}\mathrm{d}x$.
Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2900
Mines-Ponts MP 2021
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, bornée.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Exercice 2901
X MP 2005. X - ESPCI PC 2018. Mines-Ponts PSI 2018. CCP PSI 2013
Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = f(1).$$

Exercice 2902
X - ESPCI PC 2008
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f\left(t^n\right)\mathrm{d}t$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Déterminer la limite de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2903
X PC 2005
Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = f(0).$$

Exercice 2904
CCP PC 2018
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n}$.
Étudier l'existence de I_n puis la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2905
X - ESPCI PC 2019. CCP PSI 2005. Navale PSI 2019
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence puis déterminer la limite de I_n.

Exercice 2906
TPE PC 2014
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^{n+2}}\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence puis déterminer la limite de I_n.

Exercice 2907
X - ESPCI PC 2008
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left(t+n\mathrm{e}^{-t}\right)\left(t^3+1\right)}{\mathrm{e}^t+n}\mathrm{d}x$.
Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2908
X - ESPCI PC 2018
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^n\mathrm{d}t$.
1. Déterminer la limite ℓ de I_n.
2. Déterminer un équivalent de $I_n - \ell$.

Exercice 2909
CCINP PC 2021
1. Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction exponentielle ainsi que son rayon de convergence.
Soit $A \in]1,+\infty[$, $M \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{C}([1,A],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_1^A t^k f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M.$$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $h \in]1,A]$. On pose :
$$P_n(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{X}{h}\right)^{pk}.$$

2. Montrer que :
$$\left| \int_1^A P_n(t) f(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k! h^{pk}}.$$
En déduire que :
$$\left| \int_1^A \left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{h}\right)^p} - 1 \right) f(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant M \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{h^p}} - 1 \right).$$
3. Préciser $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{h}\right)^p} - 1 \right)$ et montrer que :
$$\int_h^A f(t) \mathrm{d}t = 0.$$
4. Montrer que la fonction f est nulle.

Exercice 2910
Mines-Ponts PC 2016. IMT MP 2013
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}$.
1. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles I_n est définie.
2. Déterminer la limite puis un équivalent de I_n.

Exercice 2911
Étudier la suite $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots \sqrt{2 + 2x}}}}}$

Exercice 2912
IMT PC 2018
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1} \ln(x)}{x^2 - 1} \mathrm{d}x$.
1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Calculer $I_{n+1} - I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de I_0.

Exercice 2913
Centrale PSI 2021
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^{2n}(t) \mathrm{d}t$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer sa limite.
2. Déterminer une relation entre u_n et u_{n-1}.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sqrt{n} u_n$.
   Établir la convergence de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right)$.
4. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2914
Centrale PC 2018
Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^\alpha)^n}$.
1. Montrer que $I_n(\alpha)$ est bien définie.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$.

3. Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer qu'il existe $k(\alpha)\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Exercice 2915
Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PSI 2019
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Montrer que :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Exercice 2916 - Théorème de Cantor-Lebesgue
X MP 2005
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère r_n et θ_n tels que $a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=r_n\cos(nx+\theta_n)$.
1. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \cos^2(nx+\theta_n)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}.$$
2. On suppose que, pour tout $x\in[a,b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))=0$.
   Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 2917 - Intégrale de Gauss
CCINP PC 2021
1. Rappeler la formule de Stirling.
2. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^n\mathrm{d}t$.
   a) Justifier l'existence de I_n.
   b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=(n+1)I_n$ et en déduire I_n.
3. Étudier les variations de la fonction $S : x\in[1,+\infty[\longmapsto(1+x)\mathrm{e}^{-x}$.
   En déduire que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(S(x))^n\leqslant\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}S(x)$.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_n^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=0$.
5. On admet que:
$$\forall x>-1,\quad \ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$
   Montrer que:
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$
6. À l'aide du changement de variable $u=\dfrac{t-n}{\sqrt{n}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que :
$$\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}u}\mathrm{d}u\longrightarrow\sqrt{2\pi}$$
   et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

Exercice 2918
X - ESPCI PC 2021. Centrale MP 2019. Centrale PSI 2015
1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln(n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   On note γ sa limite.

2. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge et $I = -\gamma$.

Exercice 2919
ENS PC 2018
Soit $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, $f \in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
1. On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f_n(t))^2\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall g \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f_n(t) - f(t))^2\mathrm{d}t = 0.$$

2. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0;1]$ et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t = 0.$$

5 Intégration terme à terme

Exercice 2920
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(x)\right)\right)^n \mathrm{d}x$.
1. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général I_n.

Exercice 2921
CCP PC 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.
1. Montrer l'existence de I_n puis calculer sa valeur.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$.

Exercice 2922
Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PSI 2018. Mines-Ponts PC 2019. IMT PSI 2017
1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\mathrm{d}x$ converge.
2. En utilisant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-u}$, montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.
3. Calculer I (on donne $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$).

Exercice 2923
TPE MP 2005
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 2924
Mines-Ponts PC 2019. Centrale PC 2018. ENTPE - EIVP PSI 2015. IMT PC 2018
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 2925
ENTPE - EIVP MP 2015
Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}.$$

Exercice 2926
CCP PSI 2018. CCINP PSI 2019. TPE PC 2019
Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 2927
CCINP PC 2019
On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x$.

Exercice 2928
Mines-Ponts PSI 2017
On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice 2929
Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PC 2019. CCP PSI 2018
On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice 2930
X PSI 2021. IMT MP 2017. Saint-Cyr MP 2016
On rappelle que $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x$.

Exercice 2931
Mines-Ponts MP 2018
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = n \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^n) \,\mathrm{d}t$.
Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2932

Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$

Exercice 2933

Mines-Ponts MP 2004. Mines-Ponts PC 2008. Centrale PSI 2009. Centrale PC 2013

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2934

IMT MP 2016

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2935

Centrale MP 2005

On admet que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence puis calculer les intégrales :

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2936

ENS PC 2016. Mines-Ponts PC 2019. CCINP MP 2021.ENSAM PSI 2017

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I converge et que :

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 2937

Centrale MP 2005

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{x^2\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 2938

TPE MP 2019. CCINP PC 2019

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 2939

CCP PC 2018

1. Donner le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\mathrm{d}x$.
   a) Justifier la convergence de I.
   b) Exprimer I en fonction de $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$.

Exercice 2940

Mines-Ponts PC 2014. Centrale PSI 2014. TPE PSI 2017. IMT PSI 2016. IMT PC 2019

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$
3. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\mathrm{d}t = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 2941

CCP PSI 2013

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x(\ln(x))^2}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$.
2. Montrer que :
$$I = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 2942

CCP MP 2016

Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2943

CCP PSI 2018. IMT PSI 2019. CCINP PC 2019. CCP PC 2010

Montrer que :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 2944

Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2016. IMT MP 2017. CCINP PSI 2021

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)\ln\left(x^2\right)}{x^2}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I converge et que :
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}.$$
2. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
En déduire la valeur de I.

Exercice 2945

Mines-Ponts PC 2021. IMT PC 2019

Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x}$ et montrer que :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Exercice 2946

Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x$ et montrer que :

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 2947
Centrale PC 2014
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} H_n = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}.$$

Exercice 2948
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2017
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} \mathrm{d}t$.
1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} I_n.$$

2. Déterminer un équivalent de I_n.
3. Montrer que la série de terme général I_n converge et calculer sa somme.

Exercice 2949
CCINP PC 2021
Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0;1[$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(\theta) \mathrm{d}\theta$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2(\theta)}}$.
1. Rappeler la formule de Stirling.
2. a) Justilier l'existence de I_k ct montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2} I_k$.
   b) Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, I_{2k} à l'aide de factorielles.
3. Retrouver le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
4. Justifier l'existence de $f(x)$ et montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{(2k)!}{2^k (k!)^2} \right)^2 x^{2k}$.
5. Déterminer la limite puis un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 2950 - Formule de Bailey-Borwein-Plouffe
X - ENS PSI 2013. X MP 2014
1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{2}^n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^{n-1}}{1-t^8} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k (8k+n)}.$$

2. En déduire la formule BBP :

$$\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

Exercice 2951 - Calcul de $\zeta(2)$
Centrale PC 2021
1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(x)$ et étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) \mathrm{d}t$.
3. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

6 Fonctions définie par une intégrale

Exercice 2952
Mines-Ponts MP 2018
Soit $(a,b) \in]1, +\infty[^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\frac{b-\cos(t)}{a-\cos(t)}\right) \mathrm{d}t$.

Exercice 2953
IMT PSI 2016. CCP PSI 2013
Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3+x^3} \mathrm{d}t$.
1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f(0)$.
   Indication. — Poser $u = \dfrac{1}{t}$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 2954
Mines-Ponts PC 2017
Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.
1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ puis étudier la continuité et la monotonie de la fonction f.
2. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, calculer $f(x+1) + f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 2955
Mines-Ponts PC 2017
Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$ et $g : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^{x+1}}$.
1. Déterminer le domaine de définition D de f.
   Montrer que f est décroissante sur D.
   Calculer $f(1)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$.
   En déduire que $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{x}$.

Exercice 2956
CCINP MP 2021. ESCP 2015
1. On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$.
   Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f(1) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}$. Montrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = \frac{\ln 2}{x}.$$
6. Montrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln 2}{x},$$
   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
7. Montrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \frac{\ln(2)}{2x+1}.$$
   En déduire la limite puis un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 2957

Déterminer l'ensemble de définition puis l'expression de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} \mathrm{d}t$.

Exercice 2958

CCINP PC 2021

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^x}$.

1. Vérifier que f est définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = 2n(f(n) - f(n+1))$.
   Indication : effectuer une intégration par parties.
   b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $f(n)$ à l'aide de factorielles et de puissances de 2.
3. Soit $(x,y) \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[^2$ tel que $x \leqslant y$. Comparer $f(x)$ et $f(y)$.
4. Montrer que f est continue sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
5. a) Que dire de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$?
   b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ et retrouver le résultat précédent.

Exercice 2959

CCINP PC 2021

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est positive et décroissante.
   Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Déterminer l'expression de $f(x) - f'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$
   En déduire la limite et un équivalent de f en 0^+.

Exercice 2960

TPE PC 2017

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1}{t} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 2961

Mines-Ponts MP 2005. Mines-Ponts PC 2021. IMT PC 2016

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer f.

Exercice 2962

IMT PC 2019

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{\mathrm{sh}(xt)}{t} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer f.

Exercice 2963
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2021. Centrale MP 2005. Centrale PC 2017. CCP PSI 2017. IMT PC 2016
Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer f en considérant une équation différentielle.
3. Déterminer f en considérant le développement en série entière de la fonction cos.

Exercice 2964
Mines-Ponts MP 2016
1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

Exercice 2965
ENSEA MP 2018
Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
1. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^2}{(X^2+1)(a^2X^2+1)}$.
2. Montrer la convergence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+a^2t^2\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 2966
Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PC 2017. Centrale PSI 2017. ENSEA MP 2017. CCINP PC 2019. IMT PC 2019
1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 2967 - Intégrale de Dirichlet
X MP 2016. Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2021. Centrale MP 2019. CCP MP 2018
1. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2968 - Intégrale de Gauss
X MP 2005. X - ESPCI PC 2021. X PC 2020. Mines-Ponts MP 2017. Mines-Ponts PSI 2019. Mines-Ponts PC 2015. Centrale PC 2019. CCP PSI 2013. Navale MP 2019.
1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 2969 - Intégrale de Gauss

Soif f la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ et $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

1. Préciser le domaine de définition de f. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Montrer que la fonction f est solution, sur $\mathbb{R}_+$, du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x)=2xy(x)-2I \\ y(0)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

En déduire la valeur de I.

Exercice 2970 - Intégrale de Gauss

TPE MP 2016

Soit f la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de f. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Établir que $f(x)=2I\mathrm{e}^x\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ avec $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.
   En déduire la valeur de I.

7 Divers

Exercice 2971

X MP 2013

1. Déterminer une fonction $f:\mathbb{R}_+^*\longmapsto\mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t+1}}=2\int_{f(x)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t+1}}.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite en fonction de u_0.

Chapitre XXIX

Équations différentielles

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 2972 - 30
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, dérivables, telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 2973
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

Exercice 2974
ENSAM PSI 2013. TPE PC 2010
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

Exercice 2975
Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle :

$$y' = y\tan(x) + \sin(x).$$

Exercice 2976
TPE MP 2015
Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle :

$$y' = y\tan(x) - \cos^2(x).$$

Exercice 2977
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, 1-périodique.
L'équation différentielle $y' - \lambda y = f$ admet-elle une solution 1-périodique ?

Exercice 2978
ENS PC 2018

1. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 1$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) \leqslant f(x)f(y)$.
2. Existe-t-il des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, non de classe de $\mathcal{C}^1$, telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) \leqslant f(x)f(y)$.

Exercice 2979
Mines-Ponts MP 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On pose $[A,B] = AB - BA$. On suppose que A et B commutent avec $[A,B]$. Pout tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$.
1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^kB - BA^k = kA^{k-1}[A,B].$$

2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.
3. Montrer que :

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B\mathrm{e}^{-\frac{[A,B]}{2}}.$$

Exercice 2980
Soit a et b deux fonctions continues et impaires sur $\mathbb{R}$, f une solution de l'équation différentielle $y'(x)+a(x)y(x) = b(x)$. Montrer que f est paire.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 2981
CCINP PC 2019
Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Exercice 2982
ENSEA PC 2019
Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 6y' + 9y = 2x\mathrm{e}^{-3x}$.

Exercice 2983
X - ESPCI PC 2019
Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = \cos^2(x)$.

Exercice 2984
Mines-Ponts MP 2018
L'équation différentielle $y'' + 4y = x\cos(x)$ possède-t-elle des solutions bornées sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2985
X - ESPCI PC 2008
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$.

Exercice 2986
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2\mathrm{e}^x.$$

1. Montrer que, si la fonction f' est positive sur $\mathbb{R}$, alors f est également positive sur $\mathbb{R}$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2987
En considérant la fonction $x \longmapsto xy(x)$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0.$$

Exercice 2988
X - ESPCI PC 2019
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $x^2y'' + xy' + y = \dfrac{1}{x}$.
Indication. — On pourra poser $y(x) = z(\ln(x))$.

Exercice 2989
CCP PC 2016
On considère l'équation différentielle $(E)\colon (2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$.
1. Donner une condition sur α pour que $y : x \longmapsto \exp(\alpha x)$ soit solution de (E).
On choisit désormais un tel α.
2. Donner une condition sur z pour que $y : x \longmapsto z(x)\exp(\alpha x)$ soit solution de (E).
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 2990
IMT MP 2019
1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y''+y=\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto \alpha\cos(x)+\beta\sin(x)+\int_0^x \sin(x-t)\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

2. Montrer qu'une seule solution admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 2991
Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, non identiquement nulle.
Montrer que l'unique solution bornée de $y''=qy$ est la solution nulle.

Exercice 2992
Mines-Ponts MP 2016
Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $q(t)>0$ et $q'(t)>0$.
Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y''+q(x)y=0$ sont bornées.
Indication. — Multiplier par $\dfrac{y'}{q}$.

Exercice 2993
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $p\in\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ et u une solution de $y''+py=0$.
1. On suppose que, pour tout $t\in I$, $\Re\mathrm{e}(p(t))\leqslant 0$.
   Montrer que si, u s'annule deux fois sur I, alors la fonction u est nulle.
2. On suppose que, pour tout $t\in I$, $\Im\mathrm{m}(p(t))\neq 0$.
   Montrer que, si u s'annule deux fois sur I, alors la fonction u est nulle.

Exercice 2994
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(\varphi,\psi)\in(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}))^2$. On suppose que, pour tout $t\in I$, $\varphi(t)\leqslant\psi(t)$.
Soit x une solution non nulle de

$$x''(t)+\varphi(t)x(t)=0$$

et y une solution non nulle de

$$y''(t)+\psi(t)y(t)=0.$$

On suppose que x et y ne sont pas proportionnelles.
Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de x, il y a au moins un zéro de y.

Exercice 2995
Mines-Ponts MP 2017
Soit $q\in\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}_+)$, $f\in\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il existe une unique fonction $y\in\mathcal{C}^2([0;1],\mathbb{R})$ telle que $y''-qy=f$ et $(y(0),y(1))=(a,b)$.

Exercice 2996
Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, continues, telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=1.$$

Exercice 2997
CCP PC 2018
On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\bigstar)$$

1. Résoudre : $y'' - y' + y = 0$.
2. Soit f vérifiant $(\bigstar)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer $f''(x)$ en fonction de x et de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Soit f vérifiant $(\bigstar)$ et $g \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(\ln(x))$.
   Déterminer une équation différentielle vérifiée par g.
   En déduire f.

Chapitre XXX

Fonctions de plusieurs variables

1 Calcul différentiel

Exercice 2998
CCP PC 2016
Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\mathbb{R}\right) \,/\, \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \right\}$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
   Montrer que $f \in E$.
2. Soit $f \in E$ et $v \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = f(t,vt)$.
   Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que φ' est la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Déduire des questions précédentes que la fonction f appartient à E si, et seulement si, il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

2 Extrema

Exercice 2999
CCP PC 2017
Soit $D = [-1;1] \times \mathbb{R}$ et $f : (x,y) \in D \longmapsto x^2 - \sqrt{1-x^2}\cos(y)$.

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$.
2. a) Déterminer les points critiques de f.
   b) Montrer que :
   $$\forall (x,y) \in D, \quad f(x,y) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right) \leqslant x^2 + \sqrt{1-x^2} - \frac{5}{4}.$$
   c) En posant $t = \sqrt{1-x^2}$, montrer que f atteint son maximum global en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)$
3. a) Étudier le signe de $f(0,y) - 1$.
   b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $f(x,\pi) - 1$.
   c) La fonction f admet-elle un extremum local en $(0,\pi)$?
4. Montrer que f admet un minimum global en $(0,0)$.

Exercice 3000
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^3 + y^3$.

Exercice 3001
CCINP PC 2019
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 3002
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$.

Exercice 3003
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2 + x^3$.

Exercice 3004
CCINP PC 2019
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \longmapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Exercice 3005
TPE MP 2016
Déterminer les extrema de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^3 - 3y - 2$.

Exercice 3006
Centrale PC 2008 Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 3007
TPE MP 2016. IMT PC 2019
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Exercice 3008
Mines-Ponts MP 2018
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^4 - (x-y)^2$.

Exercice 3009
Mines-Ponts MP 2018
Déterminer le domaine de définition et les extrema de $f : (x,y) \longmapsto (x+y)^{x-y}$.

Exercice 3010
Mines-Ponts MP 2017
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \operatorname{ch}^2(x) - \cos^2(y)$ sur $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

Exercice 3011
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 y + \ln\left(1 + y^2\right)$.

Exercice 3012
TPE MP 2013
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longmapsto x\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$.

Exercice 3013
CCP PC 2017
Étudier l'existence d'extrema de $f : (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \longmapsto x\ln(y) - y\ln(x)$.

Exercice 3014
Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$.

Exercice 3015
Mines-Ponts MP 2016. ENSAM PSI 2015
Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} & \text{si } (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

2. Déterminer les extrema de f.

Exercice 3016
Mines-Ponts MP 2017
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln\left(x^2+y^2\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3017
ENS PSI 2017
Pour $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right)^2 \mathrm{d}x$.

1. Montrer que f est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ et positive sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{\|a\|\to+\infty} f(a) = +\infty$.
3. Montrer que f admet un minimum.
   On note $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$ un point où ce minimum est atteint.
4. Montrer que :
   $$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad i! + (i+1)!a_1^* + \cdots + (i+n)!a_n^* = 0.$$
5. On pose $P(X) = 1 + a_1^*(X+1) + a_2^*(X+1)(X+2) + \cdots + a_n^*(X+1)(X+2)\cdots(X+n)$.
   Montrer que :
   $$P(X) = a_n^*(X-1)\cdots(X-n)$$
   puis que :
   $$P(X) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(X-1)\cdots(X-n).$$
6. Montrer que :
   $$f\left(a^*\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1 + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n\right) \mathrm{d}x.$$
   En déduire $f\left(a^*\right)$.

Chapitre XXXI

Espaces probabilisés

1 Probabilité

Exercice 3018 - Inégalité de Boole
CCP PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots ,A_n$ n événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.
Montrer que :
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) \leqslant \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + n - 1.$$
La première inégalité est l'inégalité de Boole

Exercice 3019
HEC ECS - Exercice sans préparation 2005
1. a) Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé.
   Montrer que : $\mathrm{P}(A \cap B) \geqslant \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}\left(\overline{B}\right)$.
   b) Caractériser le cas d'égalité dans l'inégalité précédente à l'aide de $\mathrm{P}(A \cup B)$.
2. Soit n événéments $A_1, \dots ,A_n$. Comparer $\mathrm{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$ et $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\left(\mathrm{P}(A_i) - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathrm{P}\left(\overline{A_j}\right)\right)$.

Exercice 3020
ESCP Question courte 2005
Une urne contient 14 boules numérotées de 1 à 14. On en tire 7 sans remise.
Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à la somme des numéros des boules non obtenues ?

Exercice 3021
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PC 2021
Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mathrm{P})$ un espace probabilisé.
1. Soit A_1 et A_2 dans $\mathcal{T}$. Calculer
$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) + \mathrm{P}\left(A_1 \cup \overline{A_2}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A_1} \cup A_2\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}\right).$$
2. Soit $A_1, \dots ,A_n$ dans $\mathcal{T}$. On pose $\Gamma_n = \left\{A_1,\overline{A_1}\right\} \times \cdots \left\{A_n,\overline{A_n}\right\}$. Calculer
$$\sum_{(B_1,\dots,B_n) \in \Gamma_n} \mathrm{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n).$$

Exercice 3022
ENS MP 2018. Centrale PC 2017
Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.
Montrer que :
$$|\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)|\leqslant\frac{1}{4}.$$
Caractériser le cas d'égalité.

Exercice 3023
Mines-Ponts PC 2016
Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}(\{n\})=0$.

Exercice 3024
Mines-Ponts PC 2017
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement décroissante convergeant vers 0.
Déterminer $\lambda\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{P}([\![n,+\infty[\![)=\lambda a_n.$$

Exercice 3025
TPE PSI 2017
On tire cinq cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir dans la main au moins une carte de chaque couleur ?

Exercice 3026
Dans une tombola, 1000 billets dont 2 gagnants sont mis en vente.
Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à x ? ($x\in[0;1]$)

Exercice 3027
Le joueur A possède deux dés cubiques équilibrés numéroté de 1 à 6 et le joueur B un dé dodécaédrique équilibré numéroté de 1 à 12. Le joueur qui fait le plus grand score a gagné; il y a match nul en cas d'égalité.
Déterminer la probabilité que A gagne et la probabilité d'avoir un match nul.

Exercice 3028
Soit $(n,r)\in\mathbb{N}^2$ avec $n\geqslant 2$ et $r\in[\![0,n-2]\!]$. On considère n personnes dont A et B.
1. Elles s'alignent au hasard dans une file d'attente.
   Déterminer la probabilité qu'il y ait r personnes entre A et B.
2. Reprendre la question précédente si elles se placent sur un cercle et si on compte les personnes entre A et B dans le sens direct.

Exercice 3029
1. Déterminer le nombre de dominos dans un jeu complet.
   On rappelle que sur chaque domino sont inscrits deux numéros de $[\![0,6]\!]$, distincts ou non.
2. On tire au hasard et successivement deux dominos d'un jeu complet.
   Déterminer la probabilité que ces deux dominos soient juxtaposables, c'est-à-dire qu'ils aient un numéro en commun, si les tirages s'effectuent
   a) sans remise.
   b) avec remise.

Exercice 3030
On dispose de 6 cartons portant le numéro 1 et 3 cartons portant le numéro 2.
3 cartons ont été placés de façon à former une matrice carrée :
$$\begin{pmatrix}1&2&1\\ \bullet&\bullet&\bullet\\ \bullet&\bullet&\bullet\end{pmatrix}$$

On place les 6 autres cartons afin de compléter la matrice.
Déterminer la probabilité que la matrice soit inversible.

Exercice 3031
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$. Les n personnes d'une assemblée élisent leur président. Chacune des personnes vote pour l'un des trois candidats a, b et c. Un candidat est élu s'il obtient au moins $n-2$ voix.
Déterminer la probabilité pour qu'aucun des trois candidats ne soit élu.

Exercice 3032
Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Un joueur possède p dés.
Il lance une première fois les p dés simultanément. Il met de côté les dés qui ont fait apparaître le numéro 1.
Il lance une deuxième fois les autres dés. Il met à nouveau de côté les dés qui ont fait apparaître le numéro 1.
Il poursuit ainsi l'opération jusqu'à ce qu'il n'ait plus de dés à relancer.
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n pour que le joueur effectue au plus n lancers.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité q_n pour que le joueur effectue exactement n lancers.

Exercice 3033
X - ESPCI PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On place n boules discernables dans n urnes.
Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

Exercice 3034
X PC 2020
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
1. Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E} = \big\{(A,B) \in (\mathcal{P}([\![1,n]\!])^2 \,/\, A \subset B\big\}$.
2. Deux parties de $\{1,\ldots,n\}$ étant choisies au hasard, déterminer la probabilité que l'une soit incluse dans l'autre.

Exercice 3035
Mines-Ponts MP 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules. On en tire une poignée au hasard, on remet les boules dans l'urne et on tire une deuxième poignée.
Déterminer la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois.

Exercice 3036
Mines-Ponts PC 2019
Soit $(b,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules noires.
Déterminer la probabilité d'avoir tiré toutes les boules.

Exercice 3037
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne.
Pour $k \in [\![1,p]\!]$, on note x_k le numéro de la k-ième boule tirée.
1. Déterminer la probabilité pour que $x_1 < x_p$.
2. Déterminer la probabilité pour que la somme des numéros tirés soit égale à $p+2$.
3. Déterminer la probabilité pour que deux numéros exactement apparaissent.

Exercice 3038
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule rouge, une boule blanche et une boule noire. On tire successivement n boules de l'urne avec remise dans l'urne de la boule tirée après chaque tirage.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces n tirages ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur au cours de ces n tirages ?
3. Quelle est la probabilité pour que la première et la dernière boule tirées soient de la même couleur ?

Exercice 3039
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise.
1. Déterminer la probabilité de tirer les numéros impairs dans l'ordre croissant, non nécessairement consécutivement.

2. Déterminer la probabilité de tirer les numéros impairs dans l'ordre croissant et consécutivement.

Exercice 3040
Soit $(r,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On lance au hasard r boules numérotées de 1 à r dans n boîtes numérotées de 1 à n. On suppose que tous les lancers sont équiprobables.

1. Déterminer la probabilité pour que les boîtes numéros un et deux reçoivent des boules et qu'elles soient les deux seules boîtes à en recevoir.
2. Déterminer la probabilité pour que chaque boîte reçoive exactement deux boules; discuter suivant les valeurs de r et n.

Exercice 3041
Un oral de concours auquel se présentent 50 candidats se déroule de la manière suivante : l'examinateur dispose d'une boîte contenant les 50 questions du programme; le premier candidat tire au hasard sa question dans la boîte, le second tire parmi les 49 questions restantes,...
Un candidat à l'oral a fait l'impasse sur une seule question.
Y a-t-il, pour lui, un rang de passage préférentiel ?

Exercice 3042
Centrale PC 2017. ESCP 1999
On considère n équipes de football de première division et n équipes de deuxième division. On tire au sort n rencontres entre ces $2n$ équipes (on représente chaque équipe par une boule placée dans une urne et on extrait au hasard et une par une les boules de cette urne, l'équipe correspondant au $(2k+1)$-ième tirage rencontrant l'équipe correspondant au $(2k+2)$-ième tirage, pour $k \in [\![0,n-1]\!]$).

1. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de première division à une équipe de deuxième division.
2. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2^{2n-1}}{n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}.$$
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

2 Probabilités conditionnelles

Exercice 3043
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que deux événements incompatibles soient indépendants.

Exercice 3044
Deux événements A et B sont dits indépendants conditionnellement à un événement C si $\mathrm{P}_C(A \cap B) = \mathrm{P}_C(A)\mathrm{P}_C(B)$.
Montrer que A et B peuvent être indépendants sans être indépendants conditionnellement à un événement C.

Exercice 3045
Soit A et B deux événements avec $\mathrm{P}(A) \in]0;1[$.
Montrer que A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}_{\overline{A}}(B)$.

Exercice 3046
Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ avec $\mathrm{P}(A) > 0$.
Montrer que :
$$\mathrm{P}_{A\cup B}(A \cap B) \leqslant \mathrm{P}_A(A \cap B).$$

Exercice 3047
Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ avec $\mathrm{P}(B) > 0$.
Montrer que :
$$\mathrm{P}_{A\cup B}(A) \geqslant \mathrm{P}_B(A).$$

Exercice 3048
Un événement A est repoussé par un événement B si $\mathrm{P}_B(A) < \mathrm{P}(A)$ et attiré par B si $\mathrm{P}_B(A) > \mathrm{P}(A)$.

1. Soit A et B deux événements.
   Montrer que, si B attire A, alors A attire B et $\overline{B}$ repousse A.
2. Soit A, B et C trois événements.
   Si A attire B et B attire C, est-ce que A attire C ?

Exercice 3049
TPE PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements tel que $(\mathrm{P}(A_k))_{k\in[\![1,n]\!]}$ soit une suite arithmétique avec $\mathrm{P}(A_1) = \dfrac{1}{2^n}$.
1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer $\mathrm{P}(A_k)$ en fonction de k et n.
2. On considère un événement B tel que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{P}(B|A_k) = \dfrac{1}{2^k}$.
   Exprimer $\mathrm{P}(B)$ en fonction de n.

Exercice 3050
EIVP PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements tel que $(\mathrm{P}(A_k))_{k\in[\![1,n]\!]}$ soit une suite arithmétique avec $\mathrm{P}(A_1) = \dfrac{1}{2n}$.
1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer $\mathrm{P}(A_k)$ en fonction de k et n.
2. On considère un événement B tel que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{P}(B|A_k) = \dfrac{k}{2n}$.
   Exprimer $\mathrm{P}(B)$ en fonction de n.

Exercice 3051
Mines-Ponts PC 2019
Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé tels que $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{5}$ et $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{1}{4}$.
Exprimer $\mathrm{P}_B(A)$ en fonction de $\mathrm{P}_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right)$.

Exercice 3052
Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{P})$ un espace probabilisé. On suppose que $\mathrm{Card}(\Omega)$ est un nombre premier et que P est la probabilité uniforme.
Montrer que deux événements non triviaux (c'est-à-dire distincts de $\varnothing$ et de Ω) ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 3053
Soit A, B et C trois événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{P})$.
1. On suppose que les événements A, B et C sont mutuellement indépendants.
   Montrer que les événements A et $B \cup C$ sont indépendants.
2. On suppose que les événements A et B d'une part, A et C d'autre part sont indépendants.
   Les événements A et $B \cup C$ sont-ils indépendants ?

Exercice 3054
Soit A, B et C trois événements tels que A soit indépendant de $B \cup C$ et de $B \cap C$, B soit indépendant de $A \cap C$ et C soit indépendant de $A \cap B$. On suppose de plus que les probabilités $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$ et $\mathrm{P}(C)$ sont non nulles.
Montrer que A, B et C sont mutuellement indépendants.

Exercice 3055
Soit A, B et C trois événements mutuellement indépendants.
On pose $\mathrm{P}(A) = a$, $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = 1 - b$, $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 1 - c$ et $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) = x$.
Montrer que :
$$\mathrm{P}(B) = \frac{(1-c)(x+b)}{ax} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(C) = \frac{x}{x+b},$$
puis que x est solution de l'équation :
$$ax^2 + (ab - (1-a)(a+c-1))x + b(1-a)(1-c) = 0.$$
En déduire que :
$$c > \frac{(1-a)^2 + ab}{1-a}.$$

Exercice 3056
ESCP Question courte 2010
Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux événements A et B soient indépendants est que

$$\mathrm{P}(A \cap B)\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right)\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right).$$

Exercice 3057
HEC ECE - Exercice sans préparation 2008
Soit A, B, C des événements de même probabilité p et tels que

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0.$$

1. Prouver que $p \leqslant \dfrac{2}{3}$.
2. p peut-il prendre la valeur $\dfrac{2}{3}$?
3. On suppose en outre que A, B et C sont indépendants deux à deux.
   Prouver l'inégalité :
   $$p \leqslant \frac{1}{2}.$$
4. p peut-il prendre la valeur $\dfrac{1}{2}$?

Exercice 3058
EIVP PSI 2017
Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce amenant *pile* avec la probabilité p.
On considère les événements A « la pièce amène *pile* pour la première fois à l'issue d'un nombre pair de lancers » et B « la pièce amène *pile* pour la première fois à l'issue d'un nombre de lancers multiple de 3 ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3059
1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $[0;1]$. Montrer que :
   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j (a_i - a_j)^2 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2$$
2. Trois personnes A, B et C lancent chacune une fois le même dé à n faces (pas nécessairement équilibré). On définit les événements : E « A et B obtiennent la même face » et F « A et C obtiennent la même face ».
   Montrer que E et F sont indépendants si, et seulement si, le dé est équilibré.

Exercice 3060
Mines-Ponts PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules deux par deux jusqu'à vider l'urne.
Déterminer la probabilité d'obtenir à chaque tirage une boule blanche et une boule noire.

Exercice 3061
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages successifs avec remise de la boule tirée. On considère les événements A_n « on obtient, au cours des n tirages, des boules des deux couleurs » et B_n « on obtient, au cours des n tirages, au plus une boule blanche ».
Étudier l'indépendance de A_n et B_n.

Exercice 3062
ESCP 2003
On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geqslant 2$). Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, A_k désigne l'événement « on obtient *pile* au k-ième lancer ». Soit A_{n+1} l'événement « le nombre de *piles* obtenus au cours des n lancers est pair ».
1. Déterminer les probabilités des événements A_k, $k = 1,2,\dots,n+1$.
2. a) Déterminer la probabilité $\mathrm{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_n}(A_{n+1})$.

b) En déduire que les événements $A_1,\dots,A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants (*i.e.* $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) \neq P(A_1)\cdots P(A_n)P(A_{n+1})$).

3. Montrer que toute sous famille de n événements choisis parmi $A_1,\dots,A_n,A_{n+1}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 3063 - Indicatrice d'Euler
X - ESPCI PC 2016. Mines-Ponts MP 2016
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $\Omega = [\![1,n]\!]$. On considère l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ où P est la probabilité uniforme.
Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'ensemble des multiples de d appartenant à Ω.

1. Calculer $P(A_d)$.
2. Soit $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ la suite des diviseurs premiers de n rangés par ordre croissant.
   Montrer que les événements $A_{p_1},\dots,A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit $\varphi(n)$ le nombre d'entiers appartenant à Ω et premiers avec n.
   Montrer que :
$$\varphi(n) = n\prod_{k=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Exercice 3064
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2018. IMT MP 2018. ENTPE - EIVP MP 2015
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1,\dots,A_n$ des événements mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'aucun des A_k ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\right)$.

Exercice 3065
Existe-t-il une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{k}$?

Exercice 3066
X - ESPCI PC 2016
On dispose d'un test pour déterminer si un individu est atteint par une maladie donnée.
La probabilité qu'un individu soit malade est $\dfrac{1}{100000}$; la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu est malade est $\dfrac{9999}{10000}$; la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade est $\dfrac{1}{1000}$.
Calculer la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test soit positif.

Exercice 3067
Mon voisin a deux enfants.

1. Un des deux enfants est une fille.
   Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
2. Le plus jeune des deux enfants est une fille.
   Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?
3. On suppose que :
   - ce sont toujours les enfants qui décrochent le téléphone
   - dans les familles avec un garçon et une fille, la fille répond au téléphone avec une probabilité $p \in]0;1[$.

   Je téléphone chez mon voisin, une fille répond.
   Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Exercice 3068
Deux joueurs A et B s'affrontent lors d'un tournoi. Le joueur A (respectivement B) gagne chaque partie avec la probabilité $p \in]0;1[$ (resp. $q = 1-p$).
Le joueur qui gagne deux parties de plus que son adversaire est déclaré vainqueur du tournoi.
Quelle est la probabilité pour que A soit déclaré vainqueur du tournoi ?

Exercice 3069

Trois joueurs A, B et C jouent de la façon suivante : A et B jouent la première partie; le perdant est remplacé par C pour la 2-ième partie; le perdant de cette 2-ième partie est remplacé par le perdant de la 1-ière partie; le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce qu'un joueur gagne deux fois de suite; celui-ci est alors déclaré vainqueur.

On suppose qu'à chaque partie, la probabilité de gagner de chacun des joueurs est égale à $\frac{1}{2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité pour que A soit déclaré vainqueur à l'issue :
   a) de la $3n$-ième partie?
   b) de la $(3n+1)$-ième partie?
   c) de la $(3n+2)$-ième partie?
2. Quelle est la probabilité pour que A soit déclaré vainqueur?
3. Quelle est la probabilité pour que C soit déclaré vainqueur?

Exercice 3070

On considère 3 urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule de U_1 et une boule de U_2 que l'on place dans U_3; on tire alors une boule de U_3.
On a obtenu une boule blanche de U_3. Calculer la probabilité d'avoir tiré une boule blanche de U_1 et une boule blanche de U_2.

Exercice 3071

Une urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires; une urne U_2 contient 1 boule blanche et 2 boules noires.
Une boule est tirée de U_1 et mise dans U_2, puis une boule est tirée de U_2 et mise dans U_1. Enfin, une boule est tirée de U_1.

1. Déterminer la probabilité que la dernière boule tirée soit blanche.
2. La dernière boule tirée est blanche. Déterminer la probabilité que la première boule tirée soit également blanche.

Exercice 3072

CCP PC 2016
On considère deux urnes. La première contient 2 boules noires et 1 blanche, la deuxième 1 noire et 2 blanches. On choisit une urne au hasard et on tire successivement 3 boules avec remise.
Calculer la probabilité de tirer une troisième boule blanche sachant que 2 boules blanches ont déjà été tirées.

Exercice 3073

ESCP 1999
On dispose de dix pièces de monnaie numérotées de 1 à 10, telles que la k-ième pièce amène *face* avec la probabilité $\frac{k}{10}$. On prend une pièce au hasard, on la lance et on obtient *face*.
Quelle est la probabilité d'avoir lancé la cinquième pièce?

Exercice 3074

Mines-Ponts MP 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On cherche un parapluie qui se trouve dans un immeuble de n étages (rez de chaussée compris) avec la probabilité $p \in]0;1[$.
On a exploré en vain les $n-1$ premiers niveaux. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au dernier étage?

Exercice 3075

Une épreuve sportive consiste à atteindre une cible partagée en trois zones numérotées 1, 2 et 3. Deux concurrents A et B sont en présence et on admet qu'à tout coup chacun d'eux atteint une zone et une seule.
Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les zones 1, 2, 3 sont, dans cet ordre, en progression arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.
Pour le concurrent B, les trois éventualités sont équiprobables.
On choisit un des deux concurrents, en admettant que la probabilité *a priori* de choisir A est moitié de la probabilité de choisir B.
Le concurrent choisi atteint la cible. Quelle est la probabilité que ce concurrent soit A?

Exercice 3076

ESCP 2001
On considère deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et b_1 boules blanches (resp. n_2 boules noires et b_2 boules blanches).

On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise. Soit N_1 (respectivement N_2) l'événement « tirer une boule noire au premier (resp. au second) tirage ».

1. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage ?
3. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 3077
On considère n urnes numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne numéro k contient n boules dont k blanches et $n-k$ noires. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 3078
On considère n urnes numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne numéro k contient n boules dont k blanches et $n-k$ noires.

1. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement et avec remise deux boules de cette urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
2. Reprendre la question précédente en considérant que le tirage des deux boules se fait sans remise.

Exercice 3079 - Loi de succession de Laplace
Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'urne numérorée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On choisit une urne au hasard sans connaître son numéro et on y effectue des tirages avec remise.

1. Déterminer la probabilité p_n que la $(N+1)$-ième boule tirée soit blanche sachant qu'au cours des N premiers tirages seules des boules blanches ont été tirées.
2. Calculer la limite de p_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 3080
Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)$. On effectue N tirages dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires.

1. On suppose dans cette question que les tirages s'effectuent avec remise.
   Calculer la probabilité $p_{n,N}$ de tirer exactement une boule blanche.
2. On suppose dans cette question que les tirages s'effectuent avec remise si une boule noire est tirée, sans remise sinon.
   Calculer la probabilité $q_{n,N}$ de tirer exactement une boule blanche.
   Montrer que $q_{n,2n} \sim \dfrac{n(\mathrm{e}-1)}{2^{2n-1}}$.

Exercice 3081
On considère 3 dés équilibrés et un dé truqué pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est égale à $\dfrac{1}{2}$.

1. On choisit un dé et on le lance. On obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
2. On relance le dé et on obtient de nouveau 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

Exercice 3082
Considérons un pays où il fait beau en moyenne 7 jours sur 10. Dans ce pays, deux stations de radio diffusent chaque matin un bulletin météorologique dans la journée. Une longue expérience a montré que la station R avait raison, en moyenne, 95 fois sur 100, tandis que la station E n'avait raison, en moyenne, que 90 fois sur 100.
Un certain matin, on doit sortir. La station R annonce qu'il pleuvra et la station E qu'il fera beau.
Doit-on prendre notre parapluie ?
(On fera les hypothèses d'indépendances qui s'imposent et on admettra que chaque station à la même fiabilité dans ses prévisions optimistes et dans ses prévisions pessimistes)

Exercice 3083
Un joueur est en présence de deux urnes : l'urne A contient 4 boules noires et 2 boules blanches, l'urne B contient 2 boules noires et 4 boules blanches.
Le joueur choisit au hasard l'une des deux urnes (choix équiprobables) et y effectue une succession de tirages d'une boule avec remise.
Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit noire sachant que les deux premières l'étaient ?

Exercice 3084
On dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire.
On lance, une seule fois, la pièce.
On effectue ensuite une succession de tirages avec remise de la boule tirée en rajoutant, à chaque fois, une boule blanche si on a obtenu *pile* et une boule noire si on a obtenu *face*.
Ainsi, au moment du n-ième tirage, l'urne contient $n+1$ boules.
On note F l'événement « la pièce donne *face* » et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k l'événement « une boule blanche est obtenue au k-ième tirage ».
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage.
2. Une boule blanche a été obtenue au n-ième tirage.
   Calculer la probabilité d'avoir obtenu *pile*.
3. Calculer la probabilité d'obtenir n boules blanches lors des n premiers tirages.

Exercice 3085
Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $N \geqslant n$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne numérotée k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires.
On tire une boule dans chaque urne, de la première à la $(n-1)$-ième, dans cet ordre, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne suivante avant de procéder au tirage suivant. On effectue ensuite un dernier tirage dans l'urne numéro n.
Déterminer la probabilité que la boule tirée dans l'urne numéro n soit blanche.

Exercice 3086 - Une urne de Pólya
Mines-Ponts PC 2017
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne selon le protocole suivant : si, à un tirage, on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne; si on obtient une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au cours des n premiers tirages ?
2. Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche au cours des n premiers tirages ?
3. Sachant qu'au cours des n premiers tirages on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée en dernier ?

Exercice 3087 - Une urne de Pólya
Soit $(b,n,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Une urne contient initialement b boules blanches et n boules noires.
On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne en replaçant la boule obtenue dans l'urne juste avant le tirage suivant et en ajoutant c boules de la même couleur.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité que la k-ième boule tirée soit blanche.

Exercice 3088
Une urne U_1 contient 2 boules rouges, 3 boules bleues et 5 boules vertes; une urne U_2 contient 4 boules rouges et 5 boules bleues; une urne U_3 contient 3 boules bleues et 6 boules vertes.
On procède à l'expérience suivante : on tire au hasard une boule de U_1 que l'on place dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 que l'on place dans U_3 et enfin on tire au hasard une boule de U_3 que l'on place dans U_1.
Quelle est la probabilité que la composition de l'urne U_1 n'ait pas changé à l'issue de ces trois tirages ?

Exercice 3089
Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle deux dés équilibrés. Le joueur A commence; il gagne s'il amène lors d'un lancer un total de 6 points avant que B n'amène un total de 7 points. Le joueur B gagne dans le cas contraire.
Déterminer la probabilité de succès de chacun des joueurs.

Exercice 3090
CCP PC 2018
On dispose d'une pièce donnant *pile* avec la probabilité $p \in]0;1[$ et d'une urne contenant initialement une boule blanche.
On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce selon le protocole suivant : si on obtient *pile*, alors on ajoute une boule noire et on continue les lancers; si on obtient *face*, alors on tire une boule dans l'urne et on arrête les lancers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au n-ième lancer.

2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient une boule blanche à la fin de l'expérience.
   Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au n-ième lancer.

Exercice 3091
Centrale PSI 2018
Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient b boules blanches et b boules noires. On effectue une succession de tirages avec remise et, chaque fois qu'une boule blanche est obtenue, on rajoute a boules blanches dans l'urne.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « on n'a tiré que des boules blanches au cours des n premiers tirages » et on pose $p_n = \mathrm{P}(A_n)$.
1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{b+an}{2b+an} p_n.$$
2. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3092
ESCP Question courte 2004
On lance en une seule fois n pièces de monnaie, la probabilité que la k-ième pièce amène *pile* valant $\dfrac{1}{2k+1}$.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair de *piles* ?

Exercice 3093
ESCP Question courte 2005
On considère n urnes contenant chacune x boules blanches et y boules noires. On tire une boule de la première urne et on la met dans la deuxième urne; puis on tire une boule de la deuxième urne et on la met dans la troisième;... enfin on tire une boule de la dernière urne.
Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit blanche?

Exercice 3094
On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :
- si l'appareil fonctionne le n-ième jour, alors il a la probabilité a d'être en panne le jour suivant;
- si l'appareil est en panne le n-ième jour, alors il a la probabilité b d'être en panne le jour suivant.

On suppose de plus que $(a,b) \neq (0,1)$ et on note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche le n-ième jour.
1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre p_{n+1} et p_n. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p_0.
2. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3095
HEC ECT - Exercice sans préparation 2008
Un signal binaire (de valeur 1 ou -1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal a une probabilité $p \in]0;1[$ d'être inversé. On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité pour que le signal transmis soit identique au signal initial.
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = p + (1-2p)p_{n-1}$$
En déduire une expression générale de p_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3096
Une urne U_1 contient 1 boule noire et 5 boules blanches. Une autre urne U_2 contient 4 boules noires et 2 boules blanches.
On effectue dans ces urnes une suite de tirages d'une boule de la façon suivante :
- le premier tirage se fait au hasard dans l'une ou l'autre des deux urnes;
- si le n-ième tirage ($n \in \mathbb{N}^*$) donne une boule blanche, le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans la même urne que le n-ième tirage; si le n-ième tirage donne une boule noire, on change d'urne pour le $(n+1)$-ième tirage.

Chaque boule tirée est aussitôt remise dans l'urne d'où elle provient.
On note p_n la probabilité d'effectuer le n-ième tirage dans l'urne U_1 et q_n la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage.
1. Exprimer p_n en fonction de n.
2. Exprimer q_n en fonction de n.

Exercice 3097
Oral ESCP 2002
On considère deux pièces truquées A et B; A donne *pile* avec la probabilité $a \in]0;1[$ et B donne *pile* avec la probabilité $b \in]0;1[$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance; si on obtient *pile*, alors on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois ($k \geqslant 2$).
1. Déterminer la probabilité de lancer la pièce A au n-ième lancer.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir *pile* au n-ième lancer.
3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.
   Interpréter le résultat obtenu si l'on suppose maintenant $a = 1$ et $0 < b < 1$.

Exercice 3098
Un joueur A lance deux pièces et un joueur B lance trois pièces, les pièces étant équilibrées.
Celui des deux amenant le plus de fois face a gagné. Si les joueurs amènent le même nombre de fois face, on recommence l'opération jusqu'à l'obtention d'un gagnant.
Déterminer la probabilité de succès de chacun des joueurs.

Exercice 3099
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce qui donne *pile* avec la probabilité $p \in]0;1[$. On marque un point si on obtient *pile* et on marque deux points si on obtient *face*. Le jeu s'arrête dès qu'on atteint ou dépasse n points.
On note p_n la probabilité de marquer exactement n points.
1. Calculer p_1 et p_2.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} = pp_{n+1} + (1-p)p_n$.
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p.

Exercice 3100
HEC ECS Exercice sans préparation 2008. Mines-Ponts PC 2017
On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat *pile* ou *face*. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.
Pour tout n entier naturel non nul, on note p_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux *piles* successifs.
1. Calculer p_1, p_2, p_3.
2. Trouver une relation entre p_n, p_{n+1} et p_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Exercice 3101
CCINP PC 2019
On lance indéfiniment une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est égale $p \in]0;1[$, celle d'obtenir *face* étant égale à $q = 1 - p$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « on obtient au moins une fois la séquence *pile-pile-face* au cours des n premiers lancers ».
1. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 3, \quad \mathrm{P}(A_{n+1}) = \mathrm{P}(A_n) + p^2q(1 - \mathrm{P}(A_{n-2})).$$
2. Montrer que la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.
3. Interpréter le résultat précédent.

Exercice 3102
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que n passagers montent successivement dans un avion comportant n sièges. Chacun des n passagers a une place qui est réservée.
- Le premier passager arrive. Celui-ci est distrait et s'installe à une place choisie au hasard.
- Quand ils arrivent, les passagers suivants s'installent à leur place sauf si celle-ci est déjà occupée, auquel cas ils choisissent une place au hasard parmi les places restantes.

Déterminer la probabilité que le n-ième passager s'installe à sa place.

Exercice 3103
X - ESPCI PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que n passagers montent successivement dans un avion comportant n sièges. Chacun des n passagers a une place qui est réservée.

- Le premier passager arrive. Celui-ci est distrait et s'installe à une place autre que la sienne.
- Quand ils arrivent, les passagers suivants s'installent à leur place sauf si celle-ci est déjà occupée, auquel cas ils choisissent une place au hasard parmi les places restantes.

Déterminer la probabilité que le n-ième passager s'installe à sa place.

Exercice 3104 - Paradoxe de Walter Penney

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « obtenir *pile* (resp. *face*) au k-ième lancer ».
Deux joueurs J et J' s'affrontent dans le jeu dont les règles sont les suivantes :

– le joueur J est gagnant si la configuration « *pile*, *pile*, *face* » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « *face*, *pile*, *pile* » n'apparaisse;
– le joueur J' est gagnant si la configuration « *face*, *pile*, *pile* » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « *pile*, *pile*, *face* » n'apparaisse;
– si l'un des joueurs est gagnant, alors l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, on note G_n l'événement « le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du n-ième lancer » et g_n sa probabilité.
   a) Calculer g_3 et g_4 et montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $g_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   b) Calculer la probabilité de l'événement G « le joueur J est déclaré gagnant ».
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement « lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux *piles* consécutifs » et d_n sa probabilité.
   a) Justifier que $d_1 = 1$ et $d_2 = \dfrac{3}{4}$.
   b) En considérant le système complet d'événements $(F_1,P_1 \cap F_2,P_1 \cap P_2)$, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$
   c) Déterminer la limite de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   On donne : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \simeq -0{,}31$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \simeq 0{,}81$.
3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, on note B_n l'événement « aucun joueur n'est déclaré gagnant au cours des n premiers lancers ».
   Montrer que :
   $$\forall n \geqslant 3, \quad \mathrm{P}(B_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$$
   b) On note T l'événement « un des joueurs est déclaré gagnant ».
   Exprimer $\overline{T}$ à l'aide des événements $(B_n)_{n\geqslant 3}$. En déduire $\mathrm{P}\left(\overline{T}\right)$ puis $\mathrm{P}(T)$.
4. En déduire la probabilité de l'événement G' « le joueur J' est déclaré gagnant ».

Exercice 3105

Plusieurs joueurs, nommés $J_1,J_2,\dots$ jouent l'un après l'autre, dans l'ordre des indices. À chaque joueur J_k (pour $k \geqslant 1$) est imparti un événement précis A_k, de probabilité $p_k \in]0;1[$. Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs réalise l'événement qui lui est imparti.
On pose $q_k = 1 - p_k$. On suppose l'indépendance mutuelle de toutes les suites de résultats des coups joués par les concurrents.
On note G_k l'événement « J_k gagne la partie ».

1. On suppose que le nombre de joueurs est fini, égal à un entier $n \geqslant 2$. Lorsqu'aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour à partir du joueur J_1 et on continue ainsi jusqu'à ce que l'un des joueurs gagne.
   a) Calculer $\mathrm{P}(G_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
   b) Montrer que la partie se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de coups.
   c) On dit que le jeu est équitable si $\mathrm{P}(G_1) = \cdots = \mathrm{P}(G_n)$.
   Montrer que le jeu est équitable si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $p_{k+1} = \dfrac{p_k}{1-p_k}$, auquel cas exprimer p_k en fonction de p_1.
2. On garde les mêmes notations. On suppose qu'il y a une infinité de joueurs. Ainsi, un joueur qui n'a pas gagné à son tour est définitivement éliminé.

a) Montrer que le jeu ne peut pas être équitable.

b) Montrer que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $Q_n = q_1 \cdots q_n$ converge.
On note ℓ sa limite.
Montrer que la probabilité que le jeu se termine en un nombre fini de coups est égale à $1-\ell$.

Exercice 3106
ESCP 2006
On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne *face* avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et *pile* avec la probabilité $q = 1-p$. On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux *faces* de suite (c'est-à-dire lors de deux lancers consécutifs). On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note U_n l'événement « on obtient deux *faces* de suite, pour la première fois, aux lancers numéros n et $n+1$ », et on pose $u_n = \mathrm{P}(U_n)$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux *faces* de suite et le n-ième lancer donne *face* », et B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux *faces* de suite et le n-ième lancer donne *pile* ».
Enfin, on pose $x_n = \mathrm{P}(A_n)$, $y_n = \mathrm{P}(B_n)$.

1. a) Déterminer u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3, u_3.
   b) Trouver pour $n \geqslant 2$, une relation simple entre x_n et u_n.
   c) Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer les probabilités conditionnelles :
   $$\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}),\quad \mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}),\quad \mathrm{P}_{A_n}(B_{n+1}),\quad \mathrm{P}_{B_n}(B_{n+1}).$$
   d) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, les relations suivantes :
   $$\begin{cases} x_{n+1} = p y_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$$
2. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$.
   a) On pose $v_n = 2^n y_n$. Déterminer une relation de récurrence entre v_{n+1}, v_n et v_{n-1}.
   b) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de x_n puis de u_n, en fonction de n.
   c) Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$, et en donner une interprétation.

Chapitre XXXII

Variables aléatoires

1 Variables aléatoires - Cas général

Exercice 3107
Mines-Ponts MP 2018
Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance. Montrer que ;

$$\mathrm{P}(X \geqslant x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Indication. — Commencer par le cas $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Exercice 3108
Mines-Ponts MP 2018
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit croissante et X une variable aléatoire réelle. On suppose que X et $f(X)$ admettent une espérance.
1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant f'(\mathrm{E}(X))(x - \mathrm{E}(X)) + f(\mathrm{E}(X)).$$

2. En déduire que $\mathrm{E}(f(X)) \geqslant f(\mathrm{E}(X))$.

Exercice 3109
X - ESPCI PC 2019
Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles.
1. Existe-t-il toujours $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(X \leqslant \alpha) = \mathrm{P}(X \geqslant \alpha) = \dfrac{1}{2}$?
2. Donner un exemple de variable aléatoire à valeurs réelles pour laquelle un tel α existe et n'est pas unique.
3. Donner un exemple de variable aléatoire à valeurs réelles pour laquelle un tel α existe et est unique.

Exercice 3110
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, X_{ij} n^2 variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi ayant une espérance m et une variance σ^2.
On note D_n la variable aléatoire égale au déterminant de la matrice $(X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
1. Calculer l'espérance de D_n.
2. Pour $n = 3$, calculer la variance de D_3.

Exercice 3111
X - ESPCI PC 2017
Soit X une variable aléatoire réelle strictement positive.
Montrer que :

$$\mathrm{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) \geqslant 2.$$

Exercice 3112 - Inégalité de Bhatia-Davis. Inégalité de Popoviciu
Mines-Ponts MP 2021
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset [a,b]$.
1. Montrer l'inégalité de Bhatia-Davis :
$$\mathrm{V}(X) \leqslant (b - \mathrm{E}(X))(\mathrm{E}(X) - a).$$
2. En déduire l'inégalité de Popoviciu :
$$\mathrm{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 3113
Soit X une variable aléatoire à valeurs positives admettant une espérance.
Montrer que :
$$\mathrm{E}\left(X\mathrm{e}^{-\frac{X^2}{2}}\right) \leqslant \mathrm{E}(X)\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-\frac{X^2}{2}}\right).$$

Exercice 3114
X - ESPCI PC 2019
Soit X une variable aléatoire réelle positive et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\mathrm{E}\left(X^2\right) = 1$ et $\mathrm{E}(X) \geqslant a$.
Montrer que :
$$\forall \lambda \in]0;1[, \quad \mathrm{P}(X \geqslant \lambda a) \geqslant (1-\lambda)^2 a^2.$$

Exercice 3115 - Inégalité de Paley-Zygmund
Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PSI 2019
Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant un moment d'ordre 2 non nul.
Montrer que :
$$\forall \lambda \in]0;1[, \quad \mathrm{P}(X \geqslant \lambda \mathrm{E}(X)) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{(\mathrm{E}(X))^2}{\mathrm{E}\left(X^2\right)}.$$

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Variables aléatoires discrètes finies

Exercice 3116
Soit n un nombre impair. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire n boules sans remise dans cette urne.
Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Exercice 3117
ESCP Question courte 2009
Soit $n \in \mathbb{N}$. Une urne contient $4n+2$ boules numérotées de 1 à $4n+2$. On tire $2n+1$ boules sans remise.
Quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Exercice 3118
HEC ECS Exercice sans préparation 2016
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire réelle discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :
$$\mathrm{E}(X) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{E}\left(X^4\right) = 1.$$
1. Montrer que $\alpha \in [-1;1]$.
2. Trouver la loi de X.

Exercice 3119
X - ESPCI PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
Montrer que :
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{\mathrm{E}(X) - k + 1}{n} \leqslant \mathrm{P}(X \geqslant k) \leqslant \frac{\mathrm{E}(X)}{k}.$$

Exercice 3120 - Espérance et antiréparition
Mines-Ponts PSI 2017. Mines-Ponts PC 2016

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{P})$ telle que $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$.
   Montrer que :
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k).$$
2. Soit $(N,n) \in (\mathbb{N}^*)^*$. On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise.
   On note X_N le plus grand numéro tiré.
   Calculer $\mathrm{E}(X_N)$ sans simplifier l'expression puis déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(X_N)$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 3121
ESCP 1999

1. Montrer que l'application $x \longmapsto x^2$ est convexe.
2. Trois autobus contiennent respectivement n_1,n_2,n_3 passagers en plus de leur chauffeur. On considère deux expériences :
   - dans la première on choisit au hasard un des trois chauffeurs, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de passagers de l'autobus qu'il conduit;
   - dans la seconde, on choisit au hasard un des $n_1 + n_2 + n_3$ passagers et on note Y le nombre de passagers de l'autobus dans lequel ce passager se trouve.

   Comparer les espérances des variables aléatoires X et Y.

Exercice 3122
TPE MP 2016
On dispose d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au chiffre indiqué.
On note X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu en lançant le dé.
Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer son espérance.

Exercice 3123
Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue $(2n+1)$ lancers successifs et indépendants d'une pièce équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de *piles* que de *faces* au cours de ces $(2n+1)$ lancers ?
2. En déduire une expression simple de la somme
$$S = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k} \binom{n}{k-1}.$$

   Indication. — On pourra considérer le rang d'apparition du $(n+1)$-ième *pile* lorsqu'on a obtenu plus de *piles* que de *faces*.

Exercice 3124
ESCP BL 2001
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère n boîtes $B_1,\ldots,B_n$. On sait que l'une d'entre elle contient un objet O. On ouvre successivement, au hasard, les boîtes jusqu'à *savoir* dans laquelle se trouve O.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes ouvertes.
Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3125
Mines-Ponts MP 2016. Mines-Ponts PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée au hasard, toutes les poignées étant équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés.
Déterminer l'espérance de X.

Exercice 3126
Un joueur lance une fléchette au hasard sur une cible circulaire de rayon 1 et divisée en n couronnes concentriques par les cercles de rayons $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}$.

Si la fléchette touche la cible dans la couronne limitée par les cercles de rayons $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, le joueur gagne $n-k$ euros.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

Exercice 3127
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire plusieurs fois au hasard sans remise une boule de l'urne. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage.
On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
1. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
2. Calculer l'espérance de X_n puis sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 3128
ESCP 2001
Soit n un entier naturel de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n. On effectue trois tirages au hasard d'une boule de cette urne, en replaçant à chaque fois la boule obtenue avant le tirage suivant.
On désigne par M la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus et par m la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus, et enfin, par Z la variable aléatoire égale à $M-m$.
1. a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Z.
   b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
   c) Déterminer, en fonction de l'entier n, l'espérance $\mathrm{E}(Z)$.
2. a) Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$P(X+1)-P(X)=nX^3-X^4.$$
   b) En déduire la variance $\mathrm{V}(Z)$ en fonction de n.

Exercice 3129
Soit $n \geqslant 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une, sans remise, jusqu'à ce que le numéro tiré soit inférieur au numéro précédemment obtenu ou que l'urne soit vide.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
1. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, calculer $\mathrm{P}(X_n > k)$.
2. En déduire la loi de X_n.
3. Calculer l'espérance de X_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3130
ESCP 1999
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire plusieurs fois au hasard et avec remise une boule de l'urne. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. a) Déterminer la probabilité des événements $(X \geqslant 2)$, $(X \geqslant 3)$ et $(X=2)$.
   b) Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité de l'événement $(X \geqslant k)$.
   c) En déduire la loi et l'espérance de X, puis la limite de cette dernière lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3131
ESCP Question courte 2003
Pour allumer un feu, on dispose de N allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in]0;1[$.
Vous finissez par allumer le feu.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restantes.
Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 3132
Mines-Ponts MP 2021. ESCP 2006
Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient initialement n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On effectue une succession de tirages d'une boule de cette urne selon le protocole suivant :

> tant que l'urne n'est pas vide, si à un rang quelconque on obtient la boule portant le numéro k, alors on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k avant de procéder au tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages juste nécessaires pour vider l'urne de toutes ses boules et on note u_n l'espérance de X_n.

1. a) Déterminer les lois de X_1,X_2 et X_3.
   b) Calculer u_1,u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i + 1$.
3. En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n}$.
4. Donner un équivalent de u_n au voisinage de l'infini.

Exercice 3133

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent initialement un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1.
On choisit au hasard et simultanément un jeton de U_1 et un jeton de U_2. On place alors dans U_1 le jeton provenant de U_2 et dans U_2 le jeton provenant de U_1.
On note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans l'urne U_1 après n échanges. On convient de poser $X_0 = 1$.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre la loi de X_{n+1} et celle de X_n.
2. Déterminer la loi de X_n.

Exercice 3134

ESCP 2000, 2006

Une urne contient b boules blanches, n boules noires, r boules rouges; b et n sont des entiers naturels non nuls, r est un entier naturel.
Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne; si elle est noire, il perd; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le second tirage, l'urne contient donc $r-1$ boules rouges).
Dans ce cas, si la boule est blanche, il gagne; si elle est noire, il perd; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage, etc.
La partie s'achève lorsque le joueur a gagné ou perdu.

1. On note B_i (resp N_i,R_i) l'événement : « le joueur tire une boule blanche (resp une boule noire, une boule rouge) au i-ème coup ».
   On note G_r l'événement : « le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges ».
   a) Calculer les probabilités $\mathrm{P}(G_0)$ et $\mathrm{P}(G_1)$.
   b) Trouver une relation entre $\mathrm{P}(G_r)$ et $\mathrm{P}(G_{r-1})$.
   c) Calculer $\mathrm{P}(G_r)$.
2. Soit X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève, l'urne contenant au départ r boules rouges.
   a) Calculer les espérances $\mathrm{E}(X_0)$,$\mathrm{E}(X_1)$,$\mathrm{E}(X_2)$.
   b) Trouver une relation entre $\mathrm{P}(X_r = k)$ et $\mathrm{P}(X_{r-1} = k-1)$ (pour $r \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$), puis entre $\mathrm{E}(X_r)$ et $\mathrm{E}(X_{r-1})$.
   c) En déduire $\mathrm{E}(X_r)$.

Exercice 3135

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $X_{k,n}$ le nombre de numéros différents obtenus au moins une fois au cours des k premiers tirages.

1. Déterminer $X_{k,n}(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathrm{P}(X_{k,n} = 1)$ et $\mathrm{P}(X_{k,n} = k)$.
3. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{P}(X_{k+1,n} = i) = \frac{i}{n}\mathrm{P}(X_{k,n} = i) + \frac{n-i+1}{n}\mathrm{P}(X_{k,n} = i-1).$$
4. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{E}(X_{k+1,n}) = \frac{n-1}{n}\mathrm{E}(X_{k,n}) + 1.$$
   En déduire l'expression de $\mathrm{E}(X_{k,n})$ en fonction de k et n.

5. Déterminer, pour $n \geqslant 2$ fixé, $\lim_{k \to +\infty} \mathrm{E}(X_{k,n})$.
   Ce résultat est-il prévisible ?
6. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(X_{k,n})$.
   Ce résultat est-il prévisible ?

Exercice 3136
ESCP 2006
Soit N un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on effectue une succession de tirages avec remise d'un jeton en notant, à chaque fois, le numéro obtenu.
Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

1. Soit n un entier naturel non nul.
   a) Quelles sont les valeurs prises par T_n ?
   b) Calculer $\mathrm{P}(T_n = 1)$ et $\mathrm{P}(T_n = n)$.
   c) Déterminer $\mathrm{P}(T_n = 2)$.
2. Soit (k,n) un couple d'entiers naturels non nuls avec $1 \leqslant k \leqslant N$.
   Déterminer une relation entre $\mathrm{P}(T_{n+1} = k)$, $\mathrm{P}(T_n = k)$ et $\mathrm{P}(T_n = k-1)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme :
$$G_n(X) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(T_n = k) X^k.$$
   a) Prouver l'égalité :
$$G_{n+1}(X) = \frac{1}{N}(X - X^2)G'_n(X) + XG_n(X).$$
   b) Pour tout entier naturel n non nul, en reliant l'espérance $\mathrm{E}(T_n)$ à G_n, exprimer $\mathrm{E}(T_{n+1})$ à l'aide de $\mathrm{E}(T_n)$, N et n, puis déterminer $\mathrm{E}(T_n)$ en fonction de N et n.
   c) Déterminer $\lim_{N \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}(T_N)}{N}$.

2.2 Variables aléatoires discrètes infinies

Exercice 3137
ESCP 2000
Existe-t-il un réel a tel que l'on puisse définir une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, par :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = k) = (ak + 1)\mathrm{e}^{-k} ?$$

Exercice 3138
EIVP PC 2017
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{C}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$
   b) Déterminer la valeur de C.
2. a) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
   b) X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 3139
ESCP 2001
Pour tout $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = k) = C\frac{3k^2+3k+1}{(k(k+1))^3}.$$

où C est une constante positive.

a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{3x^2+3x+1}{(x(x+1))^3} = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$$

b) Déterminer la valeur de C.

c) Déterminer la valeur de X la plus probable.

2. a) Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et la calculer.

b) Montrer que X admet une variance $\mathrm{V}(X)$ et la calculer.

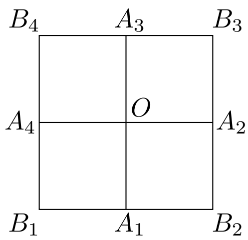
3. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$(\zeta(3))^2 \leqslant \mathrm{E}(X(X+1))\mathrm{E}\left(\frac{X}{X+1}\right)$$

Exercice 3140 - Espérance et antiréparition
X - ESPCI PC 2019. Mines-Ponts PC 2021. ENSAM PSI 2017. Navale MP 2016.
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(X > n)$ converge, auquel cas on a :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > n).$$

Exercice 3141
Soit 9 points $0,A_1,\ldots,A_4,B_1,\ldots,B_4$ disposés dans le plan comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Un mobile se déplace sur ces points par étapes successives.
Le mobile se trouve initialement en O et, à chaque étape, il se déplace d'un point à un point voisin en suivant obligatoirement les lignes droites du schéma. Les déplacements possibles à chaque étape sont supposés équiprobables.

1. Déterminer la probabilité pour que le mobile soit en O à l'issue de la n-ième étape.
2. Soit X la variable aléatoire égale au rang de l'étape à l'issue de laquelle le mobile revient pour la première fois au point O.
Déterminer la loi de X et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 3142
X - ENS PSI 2016. ESCP 2001
Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si à l'instant $t = n$ $(n \geqslant 0)$, le spot S_1 est allumé, un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable;
- si à l'instant $t = n$ $(n \geqslant 0)$, le spot S_k $(2 \leqslant k \leqslant 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$;
- à chaque instant, un seul spot est allumé.

Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant, s'il existe, où le spot S_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$ donné). En déduire que X est bien une variable aléatoire.
2. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$ pour $n \geqslant 3$.
4. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 3143

Mines-Ponts MP 2015

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages successifs avec remise de la boule tirée en y ajoutant une boule noire.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k (respectivement N_k) l'événement « on tire une boule blanche (resp. noire) au k-ième tirage ».

1. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du tirage amenant la première boule noire.
   a) Déterminer la loi de X et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$.
   b) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
2. Soit Y la variable aléatoire égale au numéro du tirage amenant la boule blanche.
   a) Déterminer la loi de Y et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = k) = 1$.
   b) Y admet-elle une espérance ?
3. On propose à un joueur le jeu suivant :
   – si Y prend une valeur paire, alors le joueur gagne Y euros;
   – si Y prend une valeur impaire, alors le joueur perd Y euros.

   On note G le gain algébrique du joueur.
   Exprimer G en fonction de Y. La variable aléatoire G admet-elle une espérance ?

Exercice 3144

Soit $p \in]0; 1[$. On dispose d'une pièce amenant *pile* avec la probabilité p. On lance indéfiniment cette pièce.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, deux résultats identiques aux lancers $k - 1$ et k, X prenant la valeur 0 si on n'obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $\mathrm{P}(X = 2)$ et $\mathrm{P}(X = 3)$.
2. En discutant selon la parité de k, déterminer l'expression de $\mathrm{P}(X = k)$ en fonction de k pour tout $k \geqslant 2$.
3. Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
4. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3145

X - ESPCI PC 2015. Mines-Ponts MP 2021

Soit $p \in]0; 1[$. On dispose d'une pièce amenant *pile* avec la probabilité p, *face* avec la probabilité $q = 1 - p$. On lance indéfiniment cette pièce.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, *pile* puis *face*, dans cet ordre, aux lancers $k - 1$ et k, X prenant la valeur 0 si on n'obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $\mathrm{P}(X = 2)$, $\mathrm{P}(X = 3)$ et $\mathrm{P}(X = 4)$ en fonction de p et q.
2. a) Pour tout $k \geqslant 2$, écrire l'événement $(X = k)$ comme réunion d'événements incompatibles.
   En déduire que
$$\mathrm{P}(X = k) = \begin{cases} pq\dfrac{p^{k-1} - q^{k-1}}{p - q} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{k-1}{2^k} & \text{si } p = q = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$
   b)) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2.a) par une autre méthode.
   a) En considérant le résultat du premier lancer et en appliquant la formule des probabilités totales, montrer que
$$\forall k \geqslant 3, \quad \mathrm{P}(X = k) = q\mathrm{P}(X = k - 1) + qp^{k-1}.$$

b) On suppose que $p = q = \dfrac{1}{2}$.
Montrer que la suite $(u_k)_{k\geqslant 2}$ définie par $u_k = 2^k\mathrm{P}(X = k)$ est arithmétique.
En déduire l'expression de u_k puis celle de $\mathrm{P}(X = k)$ en fonction de k.

c) On suppose que $p \neq q$.
En considérant la somme $\sum\limits_{i=3}^{k} q^{k-i}(\mathrm{P}(X = i) - q\mathrm{P}(X = i-1))$, déterminer l'expression de $\mathrm{P}(X = k)$ en fonction de k.

4. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3146
Centrale PC 2017. Navale PC 2019
Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce amenant *pile* avec la probabilité p, *face* avec la probabilité $q = 1-p$. On lance indéfiniment cette pièce.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, deux *piles* consécutifs aux lancers $k-1$ et k, X prenant la valeur 0 si on n'obtient jamais une telle succession.
1. Calculer $\mathrm{P}(X = 2)$, $\mathrm{P}(X = 3)$ et $\mathrm{P}(X = 4)$ en fonction de p et q.
On se propose de montrer par deux méthodes que

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(X = k) = p^2\frac{a^{k-1} - b^{k-1}}{a-b} \qquad (\bigstar)$$

où a et b sont les solutions (distinctes) de l'équation $x^2 - qx - pq = 0$.
2. Première méthode
   a) Montrer que
$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(X = k+2) = q\mathrm{P}(X = k+1) + pq\mathrm{P}(X = k).$$
   b) En déduire la formule $(\bigstar)$.
   c) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. Deuxième méthode
   a) Montrer que :
$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(X = k+3) = p^2q\left(1 - \sum_{i=2}^{k}\mathrm{P}(X = i)\right)$$
   puis que :
$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(X = k+3) = \mathrm{P}(X = k+2) - p^2q\mathrm{P}(X = k).$$
   b) Montrer la formule $(\bigstar)$ par récurrence.
4. Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X(X-1))$ et $\mathrm{V}(X)$ en fonction de p et q.
5. Application numérique
   Pour $p = \dfrac{2}{3}$, donner l'expression de $\mathrm{P}(X = k)$ ainsi que les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 3147
Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce amenant *pile* avec la probabilité p, *face* avec la probabilité $q = 1-p$. On lance indéfiniment cette pièce.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, n *piles* consécutifs ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$).
1. Calculer $\mathrm{P}(X = n)$.
2. Montrer, en considérant le rang d'apparition du premier *face*, que :

$$\forall k \geqslant n, \quad \mathrm{P}(X = k+1) = q\sum_{i=0}^{n-1} p^i\mathrm{P}(X = k-i).$$

Exercice 3148
ESCP 2005
On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
On note p $(0 < p < 1)$ la probabilité d'un succès S et $q = 1-p$ la probabilité d'un échec E. On appelle séquence

de succès de longueur r, toute suite ininterrompue de r succès consécutifs. On considère la variable aléatoire T égale au nombre d'épreuves précédant la première séquence de succès de longueur 3. La suite d'épreuves s'arrête alors au troisième succès de cette séquence.
Par exemple l'événement élémentaire $\{SSESSS\}$ appartient à l'événement $[T=3]$. On admet que T est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ et on note pour tout entier k, $t_k = \mathrm{P}(T=k)$.

1. Calculer les probabilités t_0, t_1, t_2 et t_3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note q_n la probabilité de l'événement A_n : « n'obtenir aucune séquence de succès de longueur 3 dans une suite de n épreuves ».
   Exprimer, pour $n \geqslant 1$, t_n en fonction de q_{n-1}.
3. En posant $q_0 = 1$, montrer que, pour tout $n \geqslant 3$:
   $$q_n = q(q_{n-1} + pq_{n-2} + p^2 q_{n-3}).$$
   Calculer les nombres q_0, q_1, q_2 et q_3.
4. Étudier la monotonie de la suite (q_n). Quelle est la valeur la plus probable de T ?
5. a) Montrer que, pour tout s réel tel que $|s| < 1$, la série de terme général $q_n s^n$ est convergente.
   On pose alors $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n s^n$.
   b) Montrer que : $F(s) = \dfrac{1+ps+p^2s^2}{1-qs(1+ps+p^2s^2)}$.
   c) En admettant que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n = \lim\limits_{s\to 1} F(s)$, retrouver la valeur de la somme de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} t_k$.

Exercice 3149
ESCP 2005
Une urne contient trois boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2 et 3.
On effectue une succession de tirages au hasard d'une boule de cette urne, avec à chaque fois remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.
Soit X le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir pour la première fois trois fois de suite le même numéro. On note p_n la probabilité de l'événement $(X=n)$ et c_n la probabilité de l'événement $(X \leqslant n)$.

1. a) Que valent p_1 et p_2 ? Calculer p_3 et p_4.
   b) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $p_n = c_n - c_{n-1}$.
2. a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $p_{n+3} = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 (1-c_n)$.
   b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $p_{n+3} - p_{n+2} + \dfrac{2}{27} p_n = 0$.
3. a) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = p_{n+2} - \dfrac{2}{3}p_{n+1} - \dfrac{2}{9}p_n$.
   Calculer u_2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est la suite nulle.
   b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $p_n = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right)$.
   c) Montrer que la série de terme général p_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} p_n$. Que signifie le résultat obtenu ?
   d) Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.

Exercice 3150
ESCP 2010
Soit s et N deux entiers naturels non nuls. Soit $p \in]0;1[$. On note $q = 1-p$. Un individu dispose de s euros (avec $s \in \mathbb{N}^*$) et souhaite acheter un bien qui en coûte N (avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant s$). Pour tenter de gagner de l'argent, il propose le jeu suivant à une personne très fortunée : il sort de sa poche une pièce de monnaie (non nécessairement équilibrée) et joue selon la règle suivante :

- si la pièce tombe sur *pile* (ce qui se produit avec la probabilité p), il gagne 1 euro;
- si la pièce tombe sur *face*, il perd 1 euro.

Le jeu s'arrête soit lorsque l'individu est en possession des N euros lui permettant d'acheter le bien, soit lorsqu'il est ruiné (si au départ le joueur possède N euros, alors il ne prend même pas part au jeu).
Pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, on note p_k la probabilité de pouvoir acheter le bien avec un avoir initial de k euros. Le nombre

N étant fixé, on admet que la variable aléatoire égale à la durée du jeu, lorsque l'individu possède au départ k euros, admet une espérance notée D_k.

1. a) Calculer p_0, p_N puis D_0, D_N.
   b) Montrer que, pour tout $k \in [\![1,N-1]\!]$, $p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}$.
   c) Montrer que, pour tout $k \in [\![1,N-1]\!]$, $D_k = p(1 + D_{k+1}) + q(1 + D_{k-1})$.
2. Lorsque $p = q = \dfrac{1}{2}$, calculer p_s, c'est-à-dire calculer la probabilité de pouvoir acheter le bien à l'issue du jeu avec un avoir initial de s euros.
3. On suppose dans cette question que $p = q = \dfrac{1}{2}$. On cherche à calculer D_s, c'est-à-dire à calculer le temps moyen au bout duquel l'individu pourra acheter le bien ou sera ruiné, avec un avoir initial de s euros.
   a) Montrer que la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $u_k = -k^2$ satisfait à la relation de récurrence :
   $$\frac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2}u_{k-1} = -1.$$
   b) Montrer que la suite finie $(v_k)_{k \in [\![0,N]\!]}$ définie par $v_k = D_k - u_k$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   c) En déduire la valeur de D_s.
4. Calculer p_s lorsque $p \neq q$.

Exercice 3151

Deux joueurs A et B participent à un jeu se déroulant en plusieurs parties indépendantes et identiques.
Avant le début du jeu, A et B disposent d'une mise initiale égale à a et b euros respectivement.
On suppose que la probabilité pour que A (respectivement B) gagne une partie est égale à $p \in]0;1[$ (resp. $q = 1 - p$).
Si A (respectivement B) perd une partie, il donne un euro à B (resp. A).
Le jeu s'achève lorsqu'un joueur est ruiné.

1. On note $A_{a,b}$ (respectivement $B_{a,b}$) l'événement « le jeu s'achève par la ruine du joueur A (resp. B), A et B disposant d'une mise initiale égale à a et b respectivement ».
   a) Montrer que :
   $$\mathrm{P}(A_{a,b}) = p\mathrm{P}(A_{a+1,b-1}) + q\mathrm{P}(A_{a-1,b+1}).$$
   b) En posant $u_n = \mathrm{P}(A_{n,a+b-n})$, montrer que :
   $$\mathrm{P}(A_{a,b}) = \begin{cases} \dfrac{b}{a+b} & \text{si } p = q = \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{q}{p}\right)^a \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^b}{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b}} & \text{si } p \neq q \end{cases}$$
   c) Déterminer $\lim\limits_{b \to +\infty} \mathrm{P}(A_{a,b})$. Interpréter ce résultat.
   d) Déterminer $\mathrm{P}(B_{a,b})$ puis la probabilité que le jeu s'achève.
2. On note $T_{a,b}$ la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour que le jeu s'achève, A et B disposant d'une mise initiale égale à a et b respectivement.
   a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1,a+b-1]\!], \quad \mathrm{P}(T_{a,b} = k) = p\mathrm{P}(T_{a+1,b-1} = k-1) + q\mathrm{P}(T_{a-1,b+1} = k-1)$$
   b) En déduire que $\mathrm{E}(T_{a,b}) = 1 + p\mathrm{E}(T_{a+1,b-1}) + q\mathrm{E}(T_{a-1,b+1})$.
   c) En posant $v_n = \mathrm{E}(T_{n,a+b-n})$ et en considérant la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
   $$w_n = \begin{cases} v_n + n^2 & \text{si } p = q = \dfrac{1}{2} \\ v_n + \dfrac{1}{p-q}n & \text{si } p \neq q \end{cases}$$
   montrer que :
   $$\mathrm{E}(T_{a,b}) = \begin{cases} ab & \text{si } p = q = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{p-q}\left((a+b) \times \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} - a\right) & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

3. Déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(T_{a,b})$ quand b tend vers $+\infty$.

3 Variables aléatoires à densité

Exercice 3152
ESCP 2002
Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à valeurs réelles, de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x/2}\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer une densité de probabilité f de X.
4. Étudier les variations de f et représenter l'allure du graphe de cette fonction.

Exercice 3153
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{K}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.
Déterminer K pour que f soit une densité de probabilité.

Exercice 3154
Soit $a \in]1, +\infty[$ et X une variable aléatoire continue dont la densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} K\dfrac{x + \ln(x)}{x^2} & \text{si } x \in [1,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer K.
2. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 3155
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{K}{2^{\lfloor x \rfloor}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
1. Déterminer K pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Pour cette valeur de K, calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 3156
ESCP 2001
Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.
1. Montrer que I converge. Déterminer sa valeur.
2. Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

   a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   b) Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité.
   X a-t-elle une espérance? une variance?

Exercice 3157
ESCP 2007

1. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0;1[$, possédant une densité g continue sur $]0;1[$.
   Montrer que Z possède une espérance.
   On suppose que, pour tout $x \in]0;1[$, $g(1-x) = g(x)$. Quelle est, dans ce cas, l'espérance de Z ?
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$.
   On note φ sa bijection réciproque.
   Montrer que la fonction φ est dérivable sur $]-1;1[$ et calculer sa dérivée.
3. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.
   Montrer que cette intégrale converge et la calculer.
4. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.
   Déterminer $\mathrm{E}(X)$ en utilisant la première question. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = (\sin(\theta))^2$.

Exercice 3158
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Soit $Y = \tan(X)$.
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Calculer $\mathrm{E}(Y)$. Y admet-elle une variance ?

Exercice 3159
ESCP 2000
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{5^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{5^x}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité qu'on nommera X, dont on donnera une densité et l'espérance si elle existe.
2. Pour n entier naturel non nul, on note Y_n la variable aléatoire définie comme la partie entière de nX.
   On rappelle que si x est un nombre réel, la partie entière de x est le plus grand entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.
   a) Déterminer la loi de Y_n.
   b) Déterminer son espérance si elle existe.

Exercice 3160
ESCP 2001
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} a3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a3^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
   a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   b) Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et la calculer.
3. On pose $Y = 3^X$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

b) Y admet-elle une espérance ?

Exercice 3161
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathrm{P})$, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[-b,b]$ et admettant un moment d'ordre 2.
Montrer que :

$$\forall a > 0, \quad \mathrm{P}(|X| \geqslant a) \geqslant \frac{\mathrm{E}\left(X^2\right) - a^2}{b^2}.$$

Exercice 3162
ESCP Question courte 2007
Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $\dfrac{1}{X}$ admettent une espérance.
Comparer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{\mathrm{E}(X)}$.

Exercice 3163
Question courte - Oral ESCP 2006
Soit X une variable aléatoire réelle de densité f continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance. On suppose qu'il existe un réel b tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(b-x) = f(x)$.
Calculer $\mathrm{E}(X)$ en fonction de b.

Exercice 3164
ESCP 2006
Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \exp\left(a \times \dfrac{x-1}{x}\right) & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où exp désigne la fonction exponentielle.
1. Étudier la continuité de f.
2. Déterminer la constante C telle que $C \times f$ soit une fonction densité (on pourra utiliser le changement de variable $u = 1 - \dfrac{1}{x}$).
3. Soit X une variable aléatoire de densité $C \times f$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
   a) Déterminer la loi de probabilité de $\left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$.
   b) Déterminer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y.

Exercice 3165
ESCP 2003
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)} \times \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[\end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X.
   b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   c) Déterminer l'existence et la valeur éventuelle de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et $N = \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ (N est la partie entière de $\dfrac{1}{X}$).
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Déterminer la loi de N.

c) Y et N ont-elles une espérance?

3. On pose $Z = Y - N$.
   Déterminer la loi de Z.
   La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance?

4 n-uplets de variables aléatoires

4.1 Cas général

Exercice 3166
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
On considère n variables aléatoires réelles $X_1,\dots,X_n$ telles que:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \left\{ \begin{array}{ll} b & \text{si } i \neq j \\ a & \text{si } i = j \end{array} \right.$$

Montrer que: $\dfrac{b}{a} \geqslant -\dfrac{1}{n-1}$.

Exercice 3167
ESCP Question courte 2005
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires indépendantes X et Y pour que X et XY soient non corrélées.

Exercice 3168
Mines-Ponts MP 2021. X PC 2020
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles strictement positives indépendantes et de même loi.
Montrer que:

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 1.$$

À quelle condition a-t-on égalité?

Exercice 3169
Mines-Ponts MP 2017
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 avec $\mathrm{V}(X) > 0$.
Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$ soit minimale.

4.2 Cas des variables aléatoires discrètes

Exercice 3170
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P},\mathrm{P})$. On suppose que $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1,\dots,y_p\}$.
Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la matrice $A = (\mathrm{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est de rang 1.

Exercice 3171
CCINP PC 2019
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X_n = 1) = \mathrm{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathrm{E}(\cos(X_n t))$ et $\mathrm{E}(\sin(X_n t))$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\cos(S_n t)) = \cos^n(t)$.

Exercice 3172
Mines-Ponts PSI 2019
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, indépendantes et de même loi. On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1+X_2}$.

1. Justifier que Y_1 admet une espérance finie et calculer $\mathrm{E}(Y_1)$.
2. Justifier que Y_1 admet une variance finie et montrer que $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) = -\mathrm{V}(Y_1)$.

Exercice 3173
Mines-Ponts MP 2021
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)$.

Exercice 3174
Mines-Ponts PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On tire simultanément deux boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Soit X et Y les variables aléatoires égales au plus petit et au plus grand numéro respectivement.
Déterminer la loi conjointe de (X,Y). En déduire les lois de X et de Y.

Exercice 3175
Mines-Ponts PC 2017
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathrm{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{\alpha}{2^{i+j}}.$$

1. Calculer α.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3176
Mines-Ponts MP 2017
Soit $p \in]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\mathrm{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^j}\dbinom{j}{i}p(1-p)^j & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3177
Soit $(a,\lambda) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe vérifie :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{P}((X=i)\cap(Y=j)) = a\frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!j!}.$$

1. Déterminer la valeur de a en fonction de λ.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

Exercice 3178
ESCP 1999

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X=n) \neq 0.$$
Les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?
2. Réciproquement, on suppose que X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, sont telles que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Soit X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, possédant une variance, telles que $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes.
   Comparer la variance de X et celle de Y.

Exercice 3179
Mines-Ponts MP 2017
Soit $p \in]0;1[$, $q = 1-p$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(Y=k) = pq^k.$$

1. Déterminer les lois des variables aléatoires $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.
2. Calculer $\mathrm{E}(U)$ et $\mathrm{E}(V)$.

Exercice 3180
Soit X et Y deux variables aléatoires définies un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi.
On pose $D = X - Y$ et $I = \min(X,Y)$.
1. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X=k) = pq^k$ avec $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$.
   a) Déterminer la loi conjointe de (D,I).
   b) Déterminer les lois marginales de D et I.
      Vérifier que D et I sont indépendantes.
2. On suppose que D et I sont indépendantes et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X=n) \neq 0$.
   Montrer qu'il existe $p \in]0;1[$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X=k) = p(1-p)^k.$$

Exercice 3181
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. En déduire la loi de Y puis calculer son espérance $\mathrm{E}(Y)$ et sa variance $\mathrm{V}(Y)$.

Exercice 3182
Mines-Ponts MP 2019. Centrale PC 2018. ESCP 2000, 2006, 2009
On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0;1[$.
L_1 est la variable aléatoire égale à la longueur de la première série débutant à la première épreuve, une série étant une succession soit de succès soit d'échecs interrompue par l'événement contraire.
L_2 est la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série débutant après la fin de la première série.
L_3 est la variable aléatoire égale à la longueur de la troisième série débutant après la fin de la deuxième série.
Ainsi, pour une succession d'épreuves débutant par $SSSEESE\ldots$, on a $L_1 = 3$, $L_2 = 2$ et $L_3 = 1$.
1. Déterminer la loi de L_1 puis calculer son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de L_2 puis calculer son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi conjointe du couple (L_1,L_2).
   Retrouver la loi de L_2.
4. Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? (On discutera selon les valeurs de p).
5. Calculer la covariance de L_1 et L_2.
6. Déterminer la loi de $L_1 + L_2$. On distinguera les cas $p = \dfrac{1}{2}$ et $p \neq \dfrac{1}{2}$.
7. Déterminer la loi de L_3.

Exercice 3183 - Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$
Centrale PSI 2016
Un individu, initialement à l'origine O d'un repère orthonormé du plan, se déplace à chaque instant d'un pas dans l'une des quatre directions (nord, sud, est, ouest). Il effectue ainsi une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$.
On note M_n sa position après n déplacement, en convenant que $M_0 = 0$. On note X_n et Y_n les variables aléatoires égales respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de M_n.

1. Calculer $\mathrm{E}\left(X_{n+1}^2\right)$ en fonction de $\mathrm{E}\left(X_n^2\right)$.
   En déduire l'espérance de D_n^2 où D_n est la variable aléatoire égale à la distance de M_n à l'origine.
2. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(D_n = 0)$.

Exercice 3184 - Loi Zeta
Mines-Ponts PC 2019. Centrale MP 2019
On considère la fonction ζ de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Soit $s > 1$. Une variable aléatoire X suit la loi Zeta de paramètre s si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}.$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi Zeta de paramètre s.
   On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour tout $p \in \mathcal{P}$, A_p l'événement « p divise X ».
   a) Calculer $\mathrm{P}(A_p)$.
   b) Montrer que les événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants.
   c) En considérant $\bigcap\limits_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$, montrer l'identité d'Euler :
   $$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$
   d) Déterminer la nature de la série de terme général $\sum\limits_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi Zeta de paramètre s.
   Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\nu_p(n)$ la valuation p-adique de n.
   Pour tout $p \in \mathcal{P}$, on considère la variable aléatoire $V_p = 1 + \nu_p(X)$.
   Montrer que V_p suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)$ puis que les variables aléatoires $(V_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendantes.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi Zeta de paramètre s et Y une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi uniforme sur $[\![,n]\!]$.
   En considérant la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$, montrer que
   $$\zeta(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} = \zeta(s)$$
   où φ est la fonction indicatrice d'Euler égale au nombre d'entiers de $[\![1,n]\!]$ premiers avec n.
4. Soit X et X' deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois Zeta de paramètres $s > 1$ et $s' > 1$ respectivement.
   Montrer que la variable aléatoire $X \wedge X'$ égale au PGCD de X et X' suit la loi Zeta de paramètre $s + s'$.

4.3 Cas des variables aléatoires à densité

Exercice 3185
ESCP 2008
1. Soit t un réel tel que $t \notin \{-1; 1\}$. Déterminer deux réels $A(t)$ et $B(t)$ tels que pour tout réel $u \geqslant 0$:
   $$\frac{1}{(1+u)(1+t^2u)} = \frac{A(t)}{1+u} + \frac{B(t)}{1+t^2u}.$$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$ par : $g(t) = \dfrac{2}{\pi^2} \times \dfrac{\ln|t|}{t^2 - 1}$.
   a) Montrer que g se prolonge par continuité en -1 et 1.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$ est convergente.

3. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ dont une densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$
Soit Y une variable aléatoire indépendante de X, de même loi que X. On pose $T = \dfrac{X}{Y}$, et on *admet* qu'une densité f_T de T est donnée, pour tout t réel non nul, par :
$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|f(y)f(ty)\mathrm{d}y.$$
a) Montrer que pour tout réel t non nul :
$$f_T(t) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+y^2)(1+t^2y^2)}\mathrm{d}y.$$
b) En déduire l'expression de f_T.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t.$

Exercice 3186

ESCP 2001, 2008

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$
Montrer que f est une densité de probabilité (on pourra utiliser le changement de variable $x = \tan(u)$).

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, indépendantes et possédant comme densité la fonction f.

2. Montrer que la variable aléatoire X_1 définie par :
$$X_1 = \begin{cases} \ln|X| & \text{si } X \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X_1.
3. Prouver que la variable aléatoire $Z = \ln|XY|$ admet comme densité la fonction g définie par :
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{2}{\pi^2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
4. Montrer que $T = |XY|$ est une variable à densité et donner une densité de T.
5. En déduire la convergence et la valeur des intégrales :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

Exercice 3187

ESCP 2002

On se donne deux variables aléatoires X et Y indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y, avec $f_X(t) = \dfrac{a}{\pi(a^2+t^2)}$ et $f_Y(t) = \dfrac{b}{\pi(b^2+t^2)}$, pour tout réel t (a et b désignent deux réels strictement positifs).

On pose $Z = \sup(X,Y)$ et $V = X^2$.

1. Vérifier que f_X et f_Y sont bien des densités de probabilité.
2. a) Déterminer une densité de Z.

   b) La variable aléatoire Z posséde-t-elle une espérance? Une variance?
3. a) Déterminer une densité de V.

   b) La variable aléatoire V posséde-t-elle une espérance? Une variance?

Chapitre XXXIII

Lois usuelles

1 Lois usuelles discrètes

1.1 Loi uniforme

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3188
Mines-Ponts PC 2017
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs sans remise d'une boule.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du numéro 1.
Déterminer la loi de X.

Exercice 3189 - Une urne de Polya
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et, à chaque tirage, on replace dans l'urne la boule obtenue en ajoutant une boule de la même couleur.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.
Déterminer la loi de X_n.
(On commencera par examiner les cas $n = 1$, $n = 2, \ldots$).

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3190
Mines-Ponts MP 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une urne au hasard et puis on tire une boule. On note U la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
1. Déterminer la loi du couple (U,X).
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3191
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leqslant n$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,m]\!])$ et $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ respectivement.
Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$ et $\mathrm{P}(X \leqslant Y)$.

Exercice 3192
Mines-Ponts PC 2016. CCINP MP 2019
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé et suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.
1. Déterminer la loi de $X + Y$.

2. Calculer $\mathrm{P}(X+Y=Z)$.
3. a) Montrer que la variable aléatoire T définie par $T=n+1-Z$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$.
   b) Calculer $\mathrm{P}(X+Y+Z=n+1)$.

Exercice 3193
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$.
Déterminer la loi de $X-Y$.

Exercice 3194
Mines-Ponts PC 2016
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$.
On pose $U=\min(X,Y)$ et $V=\max(X,Y)$.
1. Déterminer la loi de probabilité de U puis calculer son espérance.
2. Déterminer la loi de probabilité de V puis calculer son espérance.
3. En considérant UV, calculer $\mathrm{Cov}(U,V)$.

Exercice 3195
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $X_1,\dots,X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$.
On note $Y=\max(X_1,\dots,X_n)$.
1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathrm{E}(Y)=n-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 3196
Mines-Ponts PC 2016
Soit $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,p\rrbracket)$.
On note $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.
1. Déterminer la loi de probabilité de M_n.
2. Déterminer la limite de la suite $(\mathrm{E}(M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3197
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ et $Y=(X+1)^2$.
Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 3198
ENSEA MP 2017
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0,n\rrbracket$ telles que, pour tout $k\in\llbracket 0,n\rrbracket$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=k)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 0,k\rrbracket$.
Déterminer la loi de (X,Y), puis la loi de X en fonction de celle de Y.
Calculer l'espérance de X en fonction de celle de Y

Exercice 3199
ESCP 2006
On considère une urne contenant n boules numérotées portant des numéros deux à deux distincts.
Un premier joueur effectue dans l'urne des tirages sans remise jusqu'à ce qu'il obtienne la boule portant le plus grand numéro. On note X_1 le nombre de tirages effectués par ce joueur.
S'il reste des boules dans l'urne, un deuxième joueur effectue la même expérience (c'est-à-dire qu'il effectue des tirages sans remise jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi celles présentent au moment où il entre en jeu).
On note X_2 le nombre de tirages effectués par ce second joueur (nombre qui vaut éventuellement 0).
1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.
2. Donner la loi de X_2 conditionnée par X_1.
   En déduire que, pour $i\in\llbracket 1,n-1\rrbracket$, $\mathrm{P}(X_2=i)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=i}^{n-1}\frac{1}{k}$, puis donner la loi de X_2.
3. Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X_2)$.

Exercice 3200
X - ESPCI PC 2019
Soit $(k,m,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$. On lance k fois un dé équilibré à m faces numérotées de 1 à m.
Quelle est la probabilité que la somme soit égale à n?

Exercice 3201
X-ESPCI PC 2019. Mines-Ponts MP 2019. Centrale PC 2019
Montrer qu'on ne peut pas truquer deux dés de sorte que la variable aléatoire égale à la somme des dés suive la loi uniforme sur $[\![2;12]\!]$.

Exercice 3202
X MP 2016. Mines-Ponts PSI 2017
Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Montrer que :
$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant r\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{nr^2}{2}}.$$

1.2 Loi de Bernoulli

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3203
HEC ECS Exercice sans préparation 2018
Soit $p \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant des moments jusqu'à l'ordre 2 et vérifiant :
$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) = p.$$
1. Montrer que p est compris entre 0 et 1.
2. Montrer que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Exercice 3204
Mines-Ponts PC 2019
Soit A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathrm{P})$ et $X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
Montrer que la probabilité d'un des trois événements $(X=0)$, $(X=1)$ et $(X=2)$ est supérieure ou égale à $\dfrac{4}{9}$.

Exercice 3205
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1,\dots,A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note B_k l'événement « au moins k événements parmi $A_1,\dots,A_n$ sont réalisés ».
En calculant l'espérance d'indicatrices judicieusement choisies, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k).$$

Exercice 3206
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires.
On tire ces $2n$ boules une à une et sans remise.
On dit qu'il y a un changement si, à un tirage, on obtient une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de changements.
1. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 changements?
2. Pour $k \in [\![2,2n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième tirage donne un changement, et à 0 sinon. Déterminer les lois des variables X_k.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3207
On considère n jetons identiques et n boîtes identiques $(n \in \mathbb{N}^*)$.
On répartit au hasard les n jetons dans les n boîtes. Chaque boîte peut recevoir plusieurs jetons.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boîtes recevant au moins un jeton.

1. En exprimant X_n comme somme de n variables aléatoires, calculer $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de n.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{E}(X_n)}{n}$.

Exercice 3208
On considère deux urnes contenant chacune b boules blanches et n boules noires.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où, en retirant une boule de chacune des deux urnes, elles n'ont pas la même couleur. Les tirages s'effectuent sans remise.
1. Calculer la probabilité pour que, lors du k-ième tirage, les deux boules n'aient pas la même couleur.
   En déduire l'espérance de X.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 3209 - Une urne de Polya
Une urne contient initialement b boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant :
• si la la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant le tirage suivant;
• si la boule tirée est noire, elle est jetée et remplacée dans l'urne par une boule blanche avant le tirage suivant.
1. Quelle est la probabilité que le k-ième tirage amène une boule noire?
2. Soit X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues au cours des k premiers tirages.
   Calculer l'espérance de X_k ainsi que sa limite quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 3210
ESCP 2006
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.
On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.
1. a) Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve?
   b) Pour tout $j \in [\![1,n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)$-ème tirage? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)$-ième tirage?
2. On désigne par X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule noire est obtenue au k-ième tirage (que ce soit la première fois ou non) et à 0 sinon.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.
   a) Calculer $\mathrm{P}(X_1 = 1)$, $\mathrm{P}(X_2 = 1)$.
   b) Pour tout entier naturel $j \in [\![1,n-1]\!]$, calculer $\mathrm{P}(X_{2j+1} = 1)$ et $\mathrm{P}(X_{2j} = 1)$.
3. Pour tout $j \in [\![1,n-1]\!]$, on note U_j l'événement « on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)$-ième tirage ».
   a) En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)$-ième tirage, montrer que $\mathrm{P}(U_n) = 0$.
   b) Montrer que, pour tout $j \in [\![1,n-1]\!]$, on a : $\mathrm{P}(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.
   c) Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des événements (U_j), et en déduire la valeur de $\mathrm{P}(X = 1)$.
   Calculer $\mathrm{P}(X = n)$.

Exercice 3211
On dispose d'un sac contenant m jetons numérotés de 1 à m (avec $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 4$), de deux urnes U_1 et U_2 et de m boules numérotés de 1 à m.
Au début de l'expérience, l'urne U_1 contient 2 de ces boules et U_2 contient les $(m-2)$ autres boules.
Une épreuve consiste à choisir un jeton au hasard dans le sac puis à changer d'urne la boule portant le numéro du jeton choisi et enfin remettre le jeton dans le sac.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après n épreuves.
1. Déterminer la loi de X_1 et calculer $\mathrm{E}(X_1)$.
2. a) Exprimer $\mathrm{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathrm{P}(X_n = 1)$.
   b) Pour $k \in [\![1,m-1]\!]$, exprimer $\mathrm{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathrm{P}(X_n = k-1)$ et $\mathrm{P}(X_n = k+1)$.
   c) Exprimer $\mathrm{P}(X_{n+1} = m)$ en fonction $\mathrm{P}(X_n = m-1)$.
3. Montrer que $\mathrm{E}(X_{n+1}) = \dfrac{m-2}{m}\mathrm{E}(X_n) + 1$.
   En déduire l'expression de $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de m et n.

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3212
CCP PC 2016
Soit $p \in]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
Déterminer la loi de probabilité de $X+Y$ puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3213
Soit $p \in [0;1]$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
1. Déterminer la loi de $X+Y$ et de $X-Y$.
2. $X+Y$ et $X-Y$ peuvent-elles être indépendantes ?

Exercice 3214
CCP PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1,\dots,X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{k}\right)$.
Soit N la variable aléatoire égale à 0 si, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k = 1$, égale à $\min\{k \in [\![1,n]\!] \,/\, X_k = 0\}$ sinon.
Déterminer la loi de probabilité de N puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3215
Deux variables aléatoires non corrélées suivant une loi de Bernoulli sont-elles indépendantes ?

Exercice 3216
Mines-Ponts PC 2019
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : aux rangs impairs, on effectue un tirage sans remise; aux rangs pairs, on effectue un tirage avec remise.
On note N le nombre de tirages effectués.
Pour $k \in [\![1,N]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au k-ième tirage est noire, à 0 sinon. Enfin, on pose $S = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$.
1. a) Déterminer N.
   b) Pour j élément de $[\![1,n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)$-ème tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)$-ième tirage ?
2. Pour tout $j \in [\![1,n-1]\!]$, calculer $\mathrm{P}(X_{2j+1} = 1)$ et $\mathrm{P}(X_{2j} = 1)$.
3. Calculer l'espérance de S.

Exercice 3217
ESCP 2017
Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une par une au hasard et sans remise. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au i-ème tirage porte le numéro i et qui vaut 0 dans le cas contraire.
1. a) Quelle est la loi de X_i ?
   b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire N qui donne le nombre de fois où, lors du tirage, le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue sont égaux.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on dira que le résultat du k-ième tirage est un « sommet » lorsque la boule obtenue à ce tirage porte un numéro strictement supérieur à tous les numéros obtenus jusqu'alors (en particulier, lorsque $k=1$, la première boule est toujours un sommet).

2. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles il n'y a qu'un seul sommet ?
   Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles il y a n sommets ?
3. Montrer la relation suivante :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}.$$
4. a) Soit $k \in [\![2,n]\!]$ et $j \in [\![k,n]\!]$ fixés.
   Combien existe-t-il de façons de vider l'urne, pour lesquelles, à la fois la k-ième boule obtenue porte le numéro j et le k-ième tirage constitue un sommet ?

b) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le k-ième tirage est un sommet ? En déduire la probabilité que le k-ième tirage soit un sommet.

5. Soit R le nombre aléatoire de sommets obtenus lorsque l'on vide l'urne.
   Déterminer, sous forme d'une somme, l'espérance de R.

Exercice 3218
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1,n]\!]$. Une armoire contient n paires de chaussures. On décide d'y prélever au hasard et simultanément $2r$ chaussures.
On s'attend à avoir un certain nombre de chaussures dépareillées. Par conséquent, on considère la variable aléatoire X égale au nombre de paires intactes présentes dans l'échantillon prélevé.
1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3219
X - ESPCI PC 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1,2n-1]\!]$. On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes. On suppose que r personnes décèdent.
On considère la variable aléatoire X égale au nombre de couples restants.
1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3220
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PC 2019. TPE PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules, une à une, sans remise.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules dont le numéro est égal au rang de tirage.
Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3221
ESCP 2017
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes $C_1,C_2,\ldots,C_n$ que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs $J_1,J_2,\ldots,J_n$ selon le protocole suivant :
– la première carte C_1 est donnée à J_1;
– la deuxième carte C_2 est distribuée de façon équiprobable entre J_1 et J_2;
– la troisième carte C_3 est distribuée de façon équiprobable entre J_1,J_2 et J_3;
– et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs $J_1,J_2,\ldots,J_n$.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.
1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathrm{P}(X_n = 0)$ et $\mathrm{P}(X_n = n-1)$.
2. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et qui vaut 0 sinon.
   Déterminer la loi de B_i. Exprimer la variable aléatoire X_n en fonction des variables aléatoires B_i et en déduire l'espérance de X_n.
3. En faisant le moins de calculs possibles, donner la loi de X_4.
4. a) Montrer que, pour i et j dans $[\![1,n]\!]$ tels que $i < j$, on a :
   $$\mathrm{P}((B_i = 1) \cap (B_j = 1)) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}.$$
   En déduire la covariance des variables aléatoires B_i et B_j.
   b) Montrer que $\mathrm{V}(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 3222
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n (avec $n \geqslant 2$). On tire ces boules au hasard, une par une et sans remise. On note $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ la liste des numéros successivement tirés.
Pour $k \in [\![2,n]\!]$, on dit qu'il y a « montée » (resp. « descente ») au k-ième tirage si $x_k > x_{k-1}$ (resp $x_k < x_{k-1}$).
On note M et D les variables aléatoires égales aux nombres de montées et de descentes respectivement.
Déterminer les espérances et les variances de M et D.

Exercice 3223
Centrale PSI 2016
Soit $(b,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire toutes les boules une à une et sans remise.
On dit qu'il y a un changement si, à un tirage, on obtient une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de changements.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 changements ?
2. Pour $k \in [\![2,b+n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième tirage donne un changement, et à 0 sinon. Déterminer les lois des variables X_k.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3224
Centrale PSI 2017
Une urne contient initialement deux boules blanches et une boule noire. À chaque étape, on tire une boule au hasard dans l'urne avec remise et l'on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur que la boule tirée. La variable aléatoire X (respectivement Y) désigne le rang d'apparition de la première boule blanche (resp. noire) tirée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Z_n désigne le nombre de boules blanches dans l'urne après n étapes. Enfin, U_n est la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée à la n-ième étape est blanche et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Exprimer Z_n en fonction de certains des $(U_k)_{k\geqslant 1}$ et déterminer $Z_n(\Omega)$.
3. Calculer $\mathrm{P}(U_{n+1} = 1 | Z_n = k)$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$.
5. Déterminer la loi de Z_n.

Exercice 3225
Banque PT Cachan
Soit $(b,n,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Une urne contient initialement b boules blanches et n boules noires.
On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne en replaçant la boule obtenue dans l'urne juste avant le tirage suivant et en ajoutant c boules de la même couleur.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable de Bernoulli égale à 1 si le k-ième tirage amène une boule blanche et à 0 sinon.

1. Calculer $\mathrm{P}(X_1 = 0)$, $\mathrm{P}(X_2 = 0)$ et $\mathrm{P}_{(X_2=0)}(X_1 = 0)$. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. Montrer que :
$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(X_k = 1) = \frac{b + c\mathrm{E}(S_{k-1})}{b + n + (k-1)c}$$
En déduire que les variables aléatoires X_k suivent la même loi.

Exercice 3226
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On y prélève une poignée aléatoire de jetons.
On note N la variable aléatoire égale au nombre de jetons de la poignée et S la variable aléatoire égale à la somme des numéros de la poignée (si la poignée est vide, c'est-à-dire si $N = 0$, on convient que $S = 0$).
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k la variable de Bernoulli égale à 1 si le jeton numéro k appartient à la poignée, à 0 sinon.

1. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.
   a) Déterminer la loi de N puis son espérance.
   b) Déterminer le paramètre de la loi de Bernoulli suivie par X_k.
   c) Calculer l'espérance de S.
   d) Étudier l'indépendance des variables X_k puis calculer la variance de S.
2. On suppose que les « tailles » des poignées sont équiprobables.
   a) Déterminer la loi de N puis son espérance.
   b) Déterminer le paramètre de la loi de Bernoulli suivie par X_k.

c) Calculer l'espérance de S.
d) Étudier l'indépendance des variables X_k puis calculer la variance de S.

3. Pour $n = 3$, déterminer la loi de S dans chacun des deux cas précédents.

Exercice 3227 - Modèle de Bose-Einstein
On considère n boules indiscernables. On place ces boules au hasard dans p tiroirs $T_1, \dots, T_p$ (donc discernables).

1. Déterminer le nombre de répartitions possibles

On suppose que les répartitions possibles sont équiprobables.
Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on note X_i la variable aléatoire au nombre de boules présentes dans le tiroir T_i.
On note V_n la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs restés vides.

2. Déterminer la loi de X_i.
3. Déterminer la loi de V_n.
4. Décomposer V_n en somme de variables de Bernoulli et en déduire son espérance.

1.3 Loi binomiale

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3228
IMT PSI 2017
Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathrm{P}(X = k) = a\binom{n}{k}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 3229
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 3230
Soit E un ensemble de n personnes ($n \geqslant 2$). Chacune d'elles envoie une lettre (et une seule) à l'une quelconque des $n-1$ autres personnes.
Soit A une personne de E. On note X le nombre de lettres reçues par A.
Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance de X.

Exercice 3231
Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue $(2n+1)$ lancers successifs et indépendants d'une pièce équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de *piles* que de *faces* au cours de ces $(2n+1)$ lancers?
2. En considérant le rang d'apparition du $(n+1)$-ième *pile* lorsqu'on a obtenu plus de *piles* que de *faces*, en déduire une expression simple de la somme
$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k}\binom{n}{k-1}.$$

Exercice 3232
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée. On dit qu'un lancer est un changement s'il donne un résultat différent du lancer précédent.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de changements obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3233
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1;1\}$.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
Déterminer la probabilité pour que la variable aléatoire $|S_n|$ soit minimale.

Exercice 3234
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
Initialement U_1 contient 2 boules numérotées 1 et 2 et U_2 ne contient aucune boule.
On lance une pièce équilibrée $2n$ fois de suite. À chaque lancer, si *pile* sort, la boule numéro 1 est changée d'urne, et si *face* sort, la boule numéro 2 est changée d'urne.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules dans U_1 après les $2n$ lancers.
Déterminer la loi de X et calculer $\mathrm{E}(X)$

Exercice 3235
Jean tire sur une cible avec la probabilité $p \in]0;1[$ de l'atteindre. Il tire n fois sur cette cible ($n \in \mathbb{N}^*$).
À l'issue des n tirs, un compteur comptabilise le nombre de fois où la cible a été atteinte.
Malheureusement, le compteur est détraqué et affiche le bon résultat avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et le bon résultat plus un avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.
Déterminer la loi de X puis calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 3236
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Soit Y la variable aléatoire définie de la façon suivante :
- si $X \neq 0$, alors $Y = X$;
- si $X = 0$, alors Y prend n'importe quelle valeur entre 1 et n (de façon équiprobable).

Déterminer la loi de Y et calculer son espérance $\mathrm{E}(Y)$.

Exercice 3237
ESCP 1999
Une épreuve écrite de concours se présente sous forme d'un Q.C.M.
50 questions, supposées mutuellement indépendantes, y sont posées.
Pour chacune des 50 questions, il y a quatre sous-questions supposées mutuellement indépendantes.
Pour chaque sous-question, le candidat a le choix entre deux réponses : « vrai » ou « faux ».
Les réponses aux questions sont présentées en ligne, une ligne par question, chaque ligne étant constituée de quatre cases à cocher, une par sous-question.
On suppose que le candidat donne une réponse à chaque sous-question et qu'il répond à chaque fois au hasard.
On note F la variable aléatoire décomptant le nombre de sous-questions dont la réponse est erronée.

1. Dans une première éventualité, on suppose que le Q.C.M. est corrigé « question par question », c'est-à-dire qu'une ligne est considérée comme juste et rapporte 4 points au candidat si et seulement si toutes les réponses de la ligne sont correctes. Dans le cas contraire, le candidat est pénalisé d'un point.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par le candidat.
   Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Désormais, on suppose que les sous-questions sont corrigées indépendamment les unes des autres, chaque case ayant une réponse correcte rapportant 1 point au candidat, et chaque case ayant une réponse incorrecte pénalisant la note de $\dfrac{1}{4}$ de point.
   On note Y la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus dans cette deuxième correction.
   Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 3238
ESCP 2008
Un vendeur de cycles vend des pédales de bicyclette qu'il se procure chez son grossiste par boîtes de deux; toutes les boîtes sont supposées identiques et dans chaque boîte il y a une pédale droite et une pédale gauche.
- Lorsqu'un client demande le remplacement de ses deux pédales de vélo, le commerçant lui vend une boîte complète et lui fait payer la somme de $2r$ euros.
- Lorsqu'un client demande le remplacement d'une seule des deux pédales, le commerçant décide de ne pas obliger le client à acheter une boîte complète, mais majore le prix de la pédale dans une proportion α, c'est-à-dire lui fait payer la somme de $(1+\alpha)r$ euros.

Pour la simplicité de l'étude, on suppose que l'on sait que le nombre de pédales à poser séparément pendant la durée de l'étude vaut $2n$, où n est un entier naturel non nul. On suppose que le vendeur ne dispose au départ que de boîtes complètes et en nombre suffisant. Soit p la probabilité qu'une demande d'un client qui ne demande qu'une pédale corresponde à une pédale droite (p n'est pas nécessairement égal à $\frac{1}{2}$) et X le nombre de boîtes nécessaires à la satisfaction de ces $2n$ demandes (le commerçant n'ouvre une boîte que s'il ne dispose pas d'une boîte entamée lui permettant d'accéder à la demande du client).

1. Quelle est la loi de X ? On précisera l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Montrer que X peut s'écrire $X = a + |Y - b|$, où a et b sont des constantes que l'on précisera et Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

Dans la suite, on prendra la valeur $p = \frac{1}{2}$.

3. Donner l'expression de l'espérance $\mathrm{E}(X)$ en fonction de n.
4. Quelle majoration α le marchand de cycles doit-il appliquer au prix de chaque pédale vendue séparément pour qu'en moyenne le prix de vente des $2n$ pédales vendues séparément soit égal au prix de vente des X boîtes nécessaires vendues $2r$ euros chacune.
   La valeur α trouvée dépend de n et on la note dorénavant α_n.
   Prouver que la suite (α_n) est décroissante.
   Donner un équivalent simple de α_n et la limite de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (On admettra la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$)

Exercice 3239
Mines Ponts MP 2018
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. On tire indépendamment deux parties A et B de E et l'on définit les variables aléatoires $I = \mathrm{Card}(A \cap B)$ et $U = \mathrm{Card}(A \cup B)$.
Déterminer les lois de probabilité de I et de U.

Exercice 3240
Oral ESCP 2008
Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant *pile* avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient *pile* et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient *face*.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.
   a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.
   b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche et $\mathrm{E}(Y_n)$ l'espérance de Y_n.
   a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
   b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.
   c) Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$\mathrm{P}(Y_n = k) = p\mathrm{P}(Y_{n-1} = k - 1) + (1 - p)\mathrm{P}(Y_{n-2} = k - 1).$$
   d) Montrer que :
   $$\forall n \geqslant 3, \quad \mathrm{E}(Y_n) = p\mathrm{E}(Y_{n-1}) + (1 - p)\mathrm{E}(Y_{n-2}) + 1.$$
3. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \geqslant 3$, on ait :
   $$u_n = pu_{n-1} + (1 - p)u_{n-2} + 1.$$
   a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à E
   b) Montrer que u appartient à E si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation :
   $$\forall n \geqslant 3, \quad v_n = pv_{n-1} + (1 - p)v_{n-2}.$$
   c) En déduire la valeur de $\mathrm{E}(Y_n)$.

Exercice 3241
ESCP 1999
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un jeu consiste à tirer un numéro parmi les nombres $\{0, \ldots, n\}$.
Le joueur gagne la somme x égale au numéro tiré si ce numéro est pair, ou perd cette somme x si le numéro tiré est impair.

1. On suppose que le numéro tiré suit une loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$.
   Déterminer la loi du gain (positif ou négatif) du joueur et son espérance.
   Quelle est la probabilité que le joueur gagne à ce jeu?
   Y-a-t-il des valeurs de n qui optimisent l'espérance du gain?
2. Reprendre les questions précédentes dans le cas où le numéro tiré suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3242
CCP PC 2018
Une urne contient b boules blanches et n boules noires.
On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule.
1. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
   Reconnaître la loi de X_1 puis donner $\mathrm{E}(X_1)$ et $\mathrm{V}(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 puis calculer $\mathrm{E}(X_2)$.

Exercice 3243 - Loi de Pascal
Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PC 2021. Centrale PC 2017. IMT MP 2016. Navale MP 2018. Navale PC 2019
On considère une expérience aléatoire se déroulant en une infinité d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et identiques, la probabilité d'un succès de chacune d'elles étant égale à p. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le r-ième succès.
Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3244
Mines-Ponts PSI 2017. Mines-Ponts PC 2017. ESCP 2000
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère $p+1$ urnes notées $U_0,U_1,\ldots,U_p$. Dans chaque urne, il y a p boules indiscernables au toucher; pour tout $i \in [\![0,p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches, les autres boules étant noires.
On choisit une urne au hasard et, dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.
1. Exprimer la loi de N_p.
2. Déterminer l'espérance $\mathrm{E}(N_p)$ de N_p.
3. L'entier n étant fixé, montrer que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \lim_{p\to+\infty} \mathrm{P}(N_p = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\mathrm{d}x.$$

   En déduire la valeur de cette limite.

Exercice 3245 - Modèle de Maxwell-Boltzmann
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère n boules numérotées de 1 à n (donc discernables). On place ces boules au hasard dans p tiroirs $T_1,\ldots,T_p$ (donc également discernables).
1. Déterminer le nombre de répartitions possibles

On suppose que les répartitions possibles sont équiprobables.
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans le tiroir T_i.
On note V_n la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs restés vides.

2. Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi de V_n.
4. Décomposer V_n en somme de variables de Bernoulli et en déduire son espérance.
5. Montrer que :

$$\forall k \in [\![0,p-1]\!], \quad \mathrm{P}(V_{n+1} = k) = \frac{p-k}{p}\mathrm{P}(V_n = k) + \frac{k+1}{p}\mathrm{P}(V_n = k+1).$$

   En déduire une relation entre $\mathrm{E}(V_{n+1})$ et $\mathrm{E}(V_n)$.
   Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 3246 - Les boîtes d'allumettes de Banach
Un fumeur a dans chacune de ses poches gauche et droite une boîte d'allumettes contenant initialement n allumettes chacune. Chaque fois qu'il désire fumer, il choisit une boîte au hasard de façon équiprobable et y prend une allumette.

1. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte quand il s'aperçoit que l'une des boîtes est vide.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X_n.
   b) En convenant que $\mathrm{P}(X_n = n+1) = 0$, montrer que :
   $$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad 2(n-k)\mathrm{P}(X_n = k) = (2n+1)\mathrm{P}(X_n = k+1) - (k+1)\mathrm{P}(X_n = k+1).$$
   En déduire l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ de X_n puis en donner un équivalent.
2. Soit X'_n la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte au moment où la première boîte est vidée de sa dernière allumette (mais non encore reconnue vide).
   a) Déterminer la loi de probabilité de X'_n.
   b) Calculer la probabilité que la première boîte vidée ne soit pas la première boîte reconnue vide.

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3247
CCP MP 2018
Soit $n \in \mathbb{N}$, X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$ telles que :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2, \quad \mathrm{P}((X=i) \cap (Y=j)) = a_{i,j} = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Trouver à l'aide de la variable aléatoire $X-1$ l'espérance et la variance de X.
5. On note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \mathrm{P}(Y=i|X=j)$.
   a) Calculer A^2.
   b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   Déterminer les valeurs propres de A et la dimension des sous-espaces propres associés.
6. On note $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $b_{i,j} = \mathrm{P}((X=i)\cap(Y=j))$.
   Justifier que la matrice B est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Exercice 3248
CCINP PC 2021
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisés. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et que Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![0,n]\!])$.
On définit la variable aléatoire Z par :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de Z puis calculer son espérance.

Exercice 3249
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois binomiales $\mathcal{B}\left(m,\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ respectivement.
Calculer $\mathrm{P}(X=Y)$.

Exercice 3250
Mines-Ponts PC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$.

Déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 3251
Mines-Ponts PC 2021. ESCP 1999
Soit $n \in \mathbb{N}$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ et suivant respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{4}\right)$ et $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{3}{4}\right)$.
On pose, pour $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.
1. Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable.
2. Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.

Exercice 3252
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. n personnes se répartissent au hasard dans 3 hôtels H_1, H_2 et H_3 de la ville. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.
1. Déterminer les lois des 3 variables aléatoires X_i.
2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$ et la variance de $X_1 + X_2$.
3. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_1,X_2)$.

Exercice 3253
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n et d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0;1[$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules numérotées 1 et $n-k$ boules numérotées 0.
On lance n fois la pièce et on tire une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de piles obtenus.
1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de piles obtenus.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au numéro de la boule tirée.

Exercice 3254
ENS PSI 2017. ENS PC 2015
Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $k \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Un candidat répond à n questions. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est correcte.
Le candidat répond au hasard à toutes les questions.
1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses obtenues.
   Déterminer la loi de X.
2. Lorsque le candidat a donné une mauvaise réponse, il peut répondre de nouveau à la question en choisissant une des autres réponses proposées.
   On note Y la variables aléatoire égale au nombre de bonnes réponses lors de cette série de rattrapage.
   Déterminer la loi de Y.
3. Soit $Z = X + Y$ la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses obtenues.
   Déterminer la loi de Z.
4. Le candidat obtient 1 point par bonne réponse donnée lors de la première série et $\dfrac{1}{2}$ point par bonne réponse donnée lors de la série de rattrapage.
   Quelle note le candidat peut-il espérer en moyenne?

Exercice 3255
Mines-Ponts PC 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Un centre d'appels cherche à contacter par téléphone n personnes.
On suppose que les appels sont indépendants les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant appelé est égale à $p \in]0;1[$.
1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.
   Déterminer la loi de X.
2. Après cette première série d'appels, le centre cherche à contacter, dans les mêmes conditions, les correspondants qu'il n'a pas obtenus auparavant.
   On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus lors de cette seconde série d'appels.
   Déterminer loi de Y.
3. Soit $Z = X + Y$ la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus à l'issue des deux séries d'appels.
   Déterminer la loi de Z.

Exercice 3256
Un point mobile A se déplace par étapes successives et indépendantes sur un axe orienté.
On suppose qu'au départ, A se situe à l'origine O et, qu'à chaque instant, l'abscisse du point augmente d'une unité avec la probabilité $p \in]0;1[$ ou diminue d'une unité avec la probabilité $1-p$.
On note X_n l'abscisse du point A après n étapes.
1. Déterminer la loi de X_n.
2. Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $\mathrm{Cov}(X_m,X_n)$.

Exercice 3257 - Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$
Une puce se trouve initialement à l'origine d'un axe orienté.
Chaque seconde, elle décide soit d'effectuer un saut de longueur 1 dans le sens positif avec la probabilité p, soit d'effectuer un saut de longueur 1 dans le sens négatif avec la probabilité q, soit de se reposer avec la probabilité r, avec $p+q+r=1$.
Les décisions prises sont supposées indépendantes les unes des autres.
On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce au bout de n secondes.
1. Donner la loi de X_n.
2. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 3258
ESCP 2011
Une boîte contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton au hasard, on note son numéro et on le remet dans la boîte. Si le numéro de ce jeton est i, alors on tire au hasard et sans remise i jetons de la boîte que l'on distribue au hasard dans trois urnes U_1, U_2 et U_3 (vides au départ). Pour tout k de $[\![1;3]\!]$, on note X_k la variable aléatoire désignant le nombre de jetons de l'urne U_k après cette opération.
1. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du jeton que l'on a tiré au départ dans la boîte.
   Quelle est la loi de X ?
   Déterminer la loi conjointe du couple (X_k,X), où $k \in]\!]1;3]\!]$.
2. Calculer pour tout $k \in]\!]1;3]\!]$, l'espérance de X_k.
3. a) Trouver la loi du vecteur aléatoire (X_1,X_2,X).
   b) En déduire la loi du vecteur aléatoire (X_1,X_2,X_3).
4. On définit, pour tout $k \in [\![1;3]\!]$, la variable aléatoire Y_k par $Y_k = \dfrac{X_k}{X}$.
   Calculer les espérances des variables aléatoires Y_k et Y_k^2.
   Donner un équivalent de la variance de Y_k, lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3259 - Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Premier retour en 0
Un individu se trouve initialement à l'origine d'un axe orienté.
Il effectue des déplacements successifs soit d'un pas en avant avec la probabilité $p \in]0,1[$, soit d'un pas en arrière avec la probabilité $q = 1-p$. Les différents déplacements sont supposés indépendants les uns des autres.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale $+1$ si l'individu se déplace d'un pas en avant lors de son n-ième déplacement, à -1 sinon.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la variable aléatoire S_n égale à l'abscisse du point où se trouve le marcheur à l'issue de son n-ième déplacement. On pose $S_0 = 0$.
Enfin, on note $T_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, X_n = 0\}$ la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires pour que le marcheur repasse, pour la première fois, à son point de départ. Si le marcheur ne repasse jamais par son point de départ, on pose $T_0 = +\infty$.
1. Déterminer la loi de probabilité de S_n, son espérance et sa variance.
   Préciser la probabilité que le marcheur soit à son point de départ à l'issue du n-ième déplacement. Donner un équivalent de cette probabilité.
2. Soit G la fonction génératrice associée à la suite $(\mathrm{P}(S_n=0))_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\forall s \in [0;1], \quad G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n=0)s^n.$$
   Montrer que :
$$\forall s \in [0;1[, \quad G(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}.$$

3. Soit G_0 la fonction génératrice de la variable aléatoire T_0 :

$$\forall s \in [0;1], \quad G_0(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T_0 = n)s^n$$

   a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(T_0 = 2k)\mathrm{P}(S_{2(n-k)} = 0).$$

   puis que :

$$\forall s \in [0;1[, \quad G(s)G_0(s) = G(s) - 1.$$

   b) En déduire la loi de probabilité de T_0.
   En particulier, interpréter la probabilité $\mathrm{P}(T_0 = +\infty)$.
   c) Déterminer la probabilité pour que le marcheur repasse par son point de départ.
   On montrera en particulier que le marcheur repassera presque sûrement par son point de départ si, et seulement si, $p = \dfrac{1}{2}$.
4. On suppose que $p = q = \dfrac{1}{2}$.
   a) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_{2k} = 0)\mathrm{P}(S_{2(n-k)} = 0) = 1.$$

   et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(T_0 = 2n) = \mathrm{P}(S_{2(n-1)} = 0) - \mathrm{P}(S_{2n} = 0).$$

   b) Montrer que T_0 n'admet pas d'espérance.

1.4 Loi hypergéométrique

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3260
Mines-Ponts MP 2016
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue n tirages sans remise.
1. Déterminer la probabilité que les numéros 1, 2 et 3 soient tirés dans cet ordre (et pas forcément consécutivement).
2. Déterminer la probabilité que les numéros 1, 2 et 3 soient tirés dans cet ordre et consécutivement.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   Déterminer la loi de X et calculer son espérance $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 3261
Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PSI 2015. Centrale PC 2017
1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p \leqslant q$. Montrer que :

$$\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

2. Soit $(b,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules blanches.
   a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{b+n}{b}}.$$

   b) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 3262
Soit $(b,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une urne contenant b boules blanches et n boules noires. On prélève les boules une à une au hasard et sans remise.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages à l'issue desquels l'urne se retrouve, pour la première fois, constituée de boules de la même couleur.
Calculer l'espérance de T après avoir déterminé sa fonction d'antirépartition.

Exercice 3263
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.
On prélève au hasard et simultanément n boules dans U_1 ainsi que dans U_2.
1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire N égale au nombre de numéros communs aux deux prélèvements.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire S égale à la somme des numéros communs aux deux prélèvements.

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3264
Soit $(n_1,n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p \in]0;1[$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivants les lois binomiales $\mathcal{B}(n_1,p)$ et $\mathcal{B}(n_2,p)$ respectivement.
Pour tout $s \in [\![0,n_1+n_2]\!]$, déterminer la loi de X_1 sachant $(X_1+X_2=s)$.

Exercice 3265
Centrale PC 2018. HEC ECE 2008
Une urne contient $2n$ boules $(n \in \mathbb{N}^*)$ de couleurs différentes. la moitié d'entre elles sont marquées du chiffre zéro et les autres sont numérotées de 1 à n.
On extrait simultanément n boules de cette urne, obtenant ce qu'on appelle une poignée. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables. Pour i entier compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire réelle qui prend la valeur 1 si la boule i se trouve dans la poignée et 0 sinon.
1. Déterminer la loi de probabilité de X_i.
2. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, calculer la covariance du couple (X_i,X_j).
3. On note S la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la somme des numéros portés par les boules figurant dans la poignée.
   a) Exprimer S en fonction de $X_1,\dots,X_n$.
   b) En déduire l'espérance et la variance de S.
4. On désigne par Z la variable aléatoire réelle donnant le nombre de boules portant le numéro zéro au sein de la poignée.
   Donner la loi de probabilité de Z puis son espérance et sa variance.

1.5 Loi géométrique

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3266
IMT PC 2016
Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X=k) = p\mathrm{P}(X \geqslant k).$$

Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3267
CCP 2018
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4\mathrm{P}(X=n+2) = -3\mathrm{P}(X=n+1) + \mathrm{P}(X=n).$$

Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3268
CCINP PC 2021
Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Pour tout $d \geqslant 2$, on note A_d l'événement « X est un multiple de d ».
   Calculer $\mathrm{P}(A_d)$.
2. Les événements A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Exercice 3269
Mines-Ponts PC 2017
Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 3270
X - ESPCI PC 2019
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{P}(X \geqslant m) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}_{(X \geqslant m)}(X \geqslant m+n) = \mathrm{P}(X \geqslant n).$$

On note $q = \mathrm{P}(X \geqslant 1)$ et on suppose que $q \in]0;1[$.
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{P}(X \geqslant n)$ en fonction de n et q.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X = n)$ en fonction de n et q.
3. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 3271
Mines-Ponts MP 2016
Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clefs dont une seule est la bonne.
On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
1. On suppose que le gardien essaie les clefs une à une sans utiliser deux fois la même.
   Donner la loi de probabilité de X.
2. Lorsque le gardien est ivre, il mélange toutes les clefs à chaque tentative.
   Donner la loi de probabilité de X.
3. Le gardien est ivre un jour sur trois.
   Sachant qu'un jour n tentatives ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le gardien ait été ivre ce jour là ?
   Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3272
ESCP 2000
Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante : il est enfermé dans une cage comportant quatre portes derrière chacune desquelles se trouve un beau morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant à l'animal une décharge électrique s'il essaie de les franchir. La quatrième laisse le passage libre.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
Déterminer la loi de X et son espérance dans chacun des cas suivants :
1. Le rat n'a aucune mémoire : il recommence ses tentatives sans tenir compte des échecs passés.
2. Le rat a une mémoire immédiate : il ne tient compte que de l'échec qui précède immédiatement sa nouvelle tentative.
3. Le rat a une bonne mémoire : il élimine les portes où il a échoué.

Exercice 3273
ESCP 2007
Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N, avec $N \geqslant 3$.
On effectue une succession de tirages, en choisissant à chaque fois au hasard une boule, que l'on replace dans l'urne avant le tirage suivant.
Pour $n \geqslant 2$ et $n \leqslant N$, on note X_n le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir n numéros distincts.
1. Quelle est la loi de $X_2 - 1$? Déterminer espérance et variance de X_2.

Pour $n \geqslant 3$, on pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$.

2. Donner une interprétation de Y_n, déterminer sa loi, son espérance et sa variance.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4. On suppose N pair et on pose $N = 2m$. Étudier la convergence des suites $\left(\dfrac{\mathrm{E}(X_m)}{m}\right)_{m \geqslant 2}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{V}(X_m)}{m}\right)_{m \geqslant 2}$.

Exercice 3274
ESCP 2002
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portent le numéro 1, deux boules portent le numéro 2,..., deux boules portent le numéro n.
On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant : si les deux boules obtenues portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant; si les deux boules portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour $i \in [\![2,n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i-ème paire de boules portant le même numéro, à partir du retrait d'une $(i-1)$-ième paire de boules.

1. a) Quelle relation lie X_n à $Y_1,\dots,Y_n$?
   b) Déterminer la loi de Y_1. Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1,n]\!]$, la loi de Y_i. Quelle est son espérance?
   c) En déduire que $\mathrm{E}(X_n) = n^2$.
2. a) Dans les cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.
   b) On suppose $n = 3$. Montrer que :
$$\forall k \geqslant 3, \quad \mathrm{P}(X_3 = k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right).$$
3. On revient au cas général.
   a) Montrer que $\mathrm{P}(X_n = n) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.
   b) Exprimer $\mathrm{P}(X_n = n+1)$ à l'aide de termes de la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $k \geqslant 1$, par $h_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{k}$.

Exercice 3275
ESCP 2005
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, N étant un entier naturel non nul.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne *avec* remise.
Soit X la variable aléatoire prenant la valeur $k \in \mathbb{N}^*$ si, au cours des k premiers tirages mais pas des $k-1$ premiers, chaque numéro a été sorti au moins une fois, et prenant la valeur 0 si un tel rang ne se présente pas.

1. Quelles sont la loi et l'espérance de X lorsque $N = 1$?

On suppose dans toute la suite que $N \geqslant 2$.

2. Déterminer $\mathrm{P}(X = 1)$,$\mathrm{P}(X = 2)$, $\dots$,$\mathrm{P}(X = N)$.
   Établir à l'aide de la formule du crible que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathrm{P}(X > k) = \frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}\binom{N}{j}(-1)^{j-1}(N-j)^k.$$
   Vérifier que cette formule est également valide pour $k = 0$.
   De quelle façon obtient-on la loi de X? (Ne pas effectuer le calcul.)
3. *On admet qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général* $\mathrm{P}(T > k)$ *converge et qu'en ce cas* $\mathrm{E}(T) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(T > k)$.
   Montrer que X admet une espérance et que $\mathrm{E}(X) = N\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{(-1)^{j-1}}{j}\dbinom{N}{j}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^N - 1}{x}\mathrm{d}x$. En déduire que $\mathrm{E}(X) = N\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{1}{k}$.
5. Retrouver simplement le résultat précédent en introduisant N variables aléatoires de lois géométriques.

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3276
Mines-Ponts PC 2019
Soit $(p_1,p_2) \in]0;1[^2$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$ respectivement.
Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$ et $\mathrm{P}(X \leqslant Y)$.

Exercice 3277
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(p_1,p_2) \in]0;1[^2$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$ respectivement.
Déterminer la loi de probabilité de $X+Y$.

Exercice 3278
Soit $p \in]0;1[$, X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
1. Déterminer les lois et les fonctions de répartition de $X+Y$ et $X+Y+Z$.
2. Calculer $\mathrm{P}(X=Y)$ et $\mathrm{P}(X \leqslant Y)$.
3. Calculer $\mathrm{P}(X+Y=2Z)$.
4. Calculer $\mathrm{P}(Z \leqslant X+Y)$.

Exercice 3279
CCINP PC 2019
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant une espérance et une variance. On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
1. Calculer $\mathrm{E}(X-Y)$ et exprimer $\mathrm{V}(X-Y)$ en fonction de $\mathrm{V}(X)$.
2. a) Montrer que :
$$\mathrm{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{P}(X=k))^2.$$
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathrm{P}(X=Y)$ si X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
3. Dans cette question, X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
a) Calculer $\mathrm{P}(X=Y)$.
b) Déterminer la loi de $Z = X-Y$.
4. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $X(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, alors $\mathrm{P}(X=Y) \geqslant \dfrac{1}{n}$.
5. Montrer que $\mathrm{P}(X=Y) \geqslant 1 - 2\mathrm{V}(X)$.

Exercice 3280
CCINP PSI 2018
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. On suppose que la variable aléatoire $Z = X+Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
1. Déterminer l'espérance de X.
2. Calculer la fonction génératrice de X.
3. Déterminer la loi de X.

Exercice 3281
CCINP MP 2021. ENSAM PSI 2016
Soit $p \in]0;1[$, $q = 1-p$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y = |X_1 - X_2|$.
1. Calculer $\mathrm{P}(Y=0)$.
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \frac{pq^n}{1+q}.$$
En déduire la loi de probabilité de Y.
2. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que $\mathrm{E}\left((X_1-X_2)^2\right) = 2\mathrm{V}(X_1)$.
En déduire que Y admet une variance et la calculer.

Exercice 3282
Centrale PSI 2021
Soit $p \in]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note I et S, avec $I \leqslant S$, les valeurs propres de M.

1. Déterminer les expressions de I et S en fonction de X et Y.
2. Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible?
3. Calculer la covariance de I et S. Ces variables sont-elles indépendantes?
4. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $\mathrm{P}(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

Exercice 3283
CCP PSI 2018
Trois individus A_1,A_2 et A_3 se présentent au bureau de poste comportant deux guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée. A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet. Le temps passé au guichet par A_k est noté X_k ($1 \leqslant k \leqslant 3$). On suppose que chaque X_k suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.
1. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{P}(Y > k)$. Donner la fonction de répartition de Y.
2. Soit Z le temps total passé par A_3 à la poste. Donner la loi de Z.
3. Déterminer le temps moyen passé par A_3 à la poste.

Exercice 3284
Centrale PC 2016
Soit $p \in]0;1[$. Trois clients arrivent dans une banque disposant de deux guichets. Les clients C_1 et C_2 vont aux deux guichets, le client C_3 va dans le premier guichet libéré. Le temps passé au guichet par le client C_i suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Déterminer la probabilité que le client C_3 termine le dernier.

Exercice 3285
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Soit $N = \min\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, X_n = 1\}$ et $Y = X_{N+1} + \cdots + X_{2N}$.
1. Déterminer la loi de N.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 3286
Soit $p \in]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
1. Déterminer la loi de $Z = \dfrac{X}{Y}$.
2. Calculer l'espérance de Z et vérifier que celle-ci est supérieure à 1.

Exercice 3287
On considère 3 boîtes et une infinité de jetons. On place successivement chacun des jetons, au hasard, dans l'urne des 3 boîtes. On suppose que chaque boîte est vide au départ et a une capacité illimitée. On suppose également qu'à chaque fois qu'un jeton est placé, la probabilité qu'il le soit dans une boîte donnée est égale à $\dfrac{1}{3}$.
Soit Y le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, deux boîtes exactement contiennent au moins un jeton.
Soit Z le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, les trois boîtes contiennent au moins un jeton.
1. Calculer $\mathrm{P}(Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\mathrm{P}_{(Y=k)}(Z = \ell)$ pour tout $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
3. En déduire $\mathrm{P}(Z = \ell)$.

Exercice 3288
Mines-Ponts MP 2021. Mines-Ponts PC 2021. CCINP PC 2021. IMT PC 2018
Soit $(p_1,p_2) \in]0;1[^2$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$ respectivement.
1. Déterminer les lois des variables aléatoires $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.
2. Calculer $\mathrm{E}(U)$ et $\mathrm{E}(V)$.

Exercice 3289
Centrale MP 2021. Centrale PSI 2017
Soit $p \in]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer les lois de $Z = \min(X,Y)$ et $T = X - Y$.
2. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 3290
ENS PC 2017. Mines-Ponts PSI 2021
Soit $p \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n = \min(X_1,\ldots,X_n)$.
   Déterminer la loi puis l'espérance de Y_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Z_n = \max(X_1,\ldots,X_n)$.
   Déterminer la loi de Z_n puis la limite et un équivalent de $\mathrm{E}(Z_n)$.

Exercice 3291
HEC ECS 2009
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de même paramètre p ($p \in]0;1[$).
On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.
1. Question de cours : définition et propriétés de la loi géométrique.
2. Déterminer la loi de U.
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $(U = n)$.
   b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(X_1|U = n)$. En déduire la valeur de $\mathrm{E}(X_1)$.
4. Déterminer la loi de T.
5. a) Calculer $\mathrm{Cov}(U,T)$.
   b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 3292
Centrale PSI 2017. ESCP 2001
1. Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce amenant *pile* avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois *pile*. Soit X le nombre aléatoire de *faces* obtenues au cours de cette expérience.
   a) Déterminer la loi de X. Vérifier que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n) = 1$.
   b) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.
2. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne.
   On note alors Y le numéro obtenu.
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Montrer que Y admet une espérance et calculer sa valeur.
3. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 3293
ESCP 2001, 2007. Mines-Ponts PSI 2017. Mines-Ponts PC 2017
Partie I
Soit deux entiers naturels n et r avec $0 \leqslant r \leqslant n$.
On définit la fonction $F_{r,n}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k$$

1. Montrer que, pour tout x réel, on a :
$$(1 - x)F_{r,n}(x) = xF_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}.$$
2. Soit $x \in]0;1[$ et $r \in \mathbb{N}$ fixés. Donner un équivalent simple de $\binom{n}{r} x^{n+1}$ quand n tend vers l'infini.
3. Montrer que, pour tout x tel que $0 < x < 1$ et $r \in \mathbb{N}$ fixés, $F_{r,n}(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Partie II
On dispose d'une pièce de monnaie donnant *pile* avec la probabilité p et *face* avec la probabilité $q = 1 - p$ (avec $p \in]0;1[$).
On lance cette pièce, les lancers étant indépendants les uns des autres, et on note N le nombre aléatoire de lancers nécessaires à la première apparition de *pile* (on pose $N = -1$ si *pile* n'apparaît jamais).
Quand *pile* apparaît au bout de n lancers, on effectue une série de n lancers avec cette même pièce et on note X le nombre de *piles* obtenus au cours de cette série.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Déterminer la loi du couple (N,X).
3. Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$ et $\mathrm{P}(X = 1)$.
4. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathrm{P}(X = k)$ sous forme d'une série.
5. Calculer la somme de cette série.
6. Déterminer l'espérance de X par deux méthodes : une première fois par calcul direct, une deuxième en utilisant la formule de l'espérance totale. Pourquoi ce résultat est-il raisonnable ?
7. Calculer la variance de X.
8. a) Montrer que X a la même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une suivant une loi de Bernoulli et l'autre une loi géométrique de même paramètre.
   b) Retrouver l'espérance et la variance de X.

1.6 Loi de Poisson

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3294
Mines-Ponts MP 2016
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(X = n) = \dfrac{\lambda}{n}\mathrm{P}(X = n-1)$.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3295
Mines-Ponts PC 2017. IMT MP 2019. CCINP PC 2019
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Calculer la probabilité que X prenne une valeur paire.

Exercice 3296
Mines-Ponts PC 2017. IMT MP 2019. CCP PSI 2015
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
2. Calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{(X+1)(X+2)}\right)$ et en déduire $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X+2}\right)$.

Exercice 3297
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = 4\left\lfloor \dfrac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3298
Mines-Ponts PC 2016. ESCP 2003
Soit $(a,b) \in]0;1[\times\mathbb{R}$.
On considère un couple (X,Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi de probabilité est donnée par:

$$\mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \dfrac{b^i \mathrm{e}^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X. Déterminer, si elles existent, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de probabilité de Y. Déterminer, si elles existent, son espérance et sa variance.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de probabilité de $Z = X - Y$.
5. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 3299
Mines-Ponts MP 2018. Mines-Ponts PSI 2016
Soit $p_1 \in]0;1[$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que X et Y sont indépendantes
Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$ et $\mathrm{P}(X < Y)$.

Exercice 3300
Centrale PC 2016
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $M = \max(X,Y)$.

Exercice 3301
Mines-Ponts PC 2016
Soit $(\lambda,\mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ respectivement.
Déterminer la loi de probabilité de $X + Y$.

Exercice 3302
Mines-Ponts PC 2017. CCINP MP 2019. CCINP PSI 2019. IMT PC 2016
Soit $(\lambda,\mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ respectivement.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = n)$.

Exercice 3303
Mines-Ponts PC 2019. IMT PSI 2017
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in]0;1[$, X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant que $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Déterminer la loi de Y.

Exercice 3304
Mines-Ponts PC 2016
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de clients d'un grand magasin dans une journée suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour payer ses achats, chaque client utilise l'une des n caisses mises à sa disposition. Toutes les caisses sont identiques et ont autant de chance d'être utilisées les unes que les autres. On suppose que tous les clients font des achats.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'utilisateurs quotidiens de la caisse numero 1.
Déterminer la loi de X.

Exercice 3305
ESCP 2009
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ n variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = 1 - (1 - x)\mathrm{e}^x$.
   Montrer que, pour tout x de $[0;1]$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
3. Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)$.
   Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire définie par :
   $$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_i = U_i = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Déterminer la loi de X_i.

4. Montrer que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a : $\mathrm{P}(X_i \neq Y_i) \leqslant \dfrac{\lambda^2}{n^2}$.
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X_i = Y_i)\right)$.

Exercice 3306
ESCP 2011
Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.
Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. a) Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a:
$$\mathrm{E}(Ng(N)) = \lambda \mathrm{E}(g(N+1)).$$
   b) Calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$.
2. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent,
$$\mathrm{E}(Tg(T)) = \lambda \mathrm{E}(g(T+1)).$$
   La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?
3. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On définit une variable aléatoire S par $S = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$, c'est-à-dire :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Montrer que, pour toute fonction g telle que les espérances existent, on a :
$$\mathrm{E}(Sg(S)) = \lambda \mathrm{E}(X_0 g(S + X_0)).$$

2 Lois usuelles à densité

2.1 Loi uniforme

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3307
Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition supposée continue et strictement croissante.
Déterminer la loi de $Y = F_X(X)$.

Exercice 3308
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}\left(\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\right)$.
Déterminer la loi de la variable $Y = \cos(\pi X)$.

Exercice 3309
ESCP 2001
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.
2. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}.$$
   Étudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

3. On définit une variable aléatoire Y par :
$$Y = \varphi(X) = \frac{\mathrm{e}^X - 1}{\mathrm{e}^X + 1}.$$
Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Exercice 3310
ESCP 2002
1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose : $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -3 \end{pmatrix}$.
Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de $M(a)$, considérée comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Pour quelles valeurs de a ces valeurs propres sont-elles réelles ?
Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0;2]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice
$$M(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & -X(\omega) \\ X(\omega) & -3 \end{pmatrix}.$$
Soit Y la variable aléatoire définie par « $Y(\omega)$ est la plus grande des valeurs propres de $M(\omega)$ ».
Déterminer une densité de la loi de Y.

Exercice 3311
ESCP Question courte 2007
Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1,0)$ et θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([-\pi,\pi])$.
À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\omega)}$.
Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.

Exercice 3312
ESCP Question courte 2010
On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$.
Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Exercice 3313
Dans un salon de coiffure, travaillent cinq coiffeurs. Une coupe dure 20 minutes.
Un client entre et constate que tous les coiffeurs sont occupés et que trois personnes attendent.
Déterminer la loi du temps d'attente de ce client puis calculer son espérance.
(On admettra que les coupes sont indépendantes les unes des autre et qu'elles ont débuté depuis un temps uniformément réparti entre 0 et 20 minutes).

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3314
ESCP 2007
Trois personnes, notées A,B et C entrent simultanément dans un magasin ayant deux bornes d'accueil. A et B occupent immédiatement (à l'instant 0) les deux bornes, C attend et occupe la première borne laissée libre par A ou B (on suppose que le temps de changement de personne est négligeable).
On suppose que les temps passés à une borne par A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0;1]$ et notées respectivement X, Y et Z.
1. On pose $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.
   a) Déterminer les fonctions de répartition de U et V, ainsi qu'une densité de chacune d'elles.
   b) Déterminer l'espérance et la variance de U et V.
2. On note T le temps total passé par C dans le magasin.
   a) Déterminer la loi de T.
   b) Déterminer l'espérance de T.

Exercice 3315
ESCP 2005
Au milieu de leurs révisions, Evariste et Raymond décident, chacun de leur côté, d'aller se changer les idées à la cafétéria, mais comme ils ont beaucoup de travail, ils n'y restent que 10 minutes.
On note X et Y les heures d'arrivée respectives d'Evariste et de Raymond à la cafétéria, et on suppose que X et Y sont indépendantes et uniformément distribuées entre 10 h et 11 h.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $X - Y$.
2. Déterminer la probabilité qu'Evariste et Raymond se retrouvent ensemble à la cafétéria.
3. On suppose qu'Evariste est arrivé à l'heure h.
   Déterminer, en fonction de h, la probabilité qu'il retrouve Raymond.
4. On suppose qu'Evariste est arrivé à l'heure h et que Raymond ne se trouvait pas à la cafétéria à cette heure là.
   Calculer la probabilité qu'Evariste rencontre Raymond.

Exercice 3316
ESCP 1999
On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.
1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1,\ldots,X_k)$ pour $k \geqslant 1$.
2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$ pour $k \geqslant 1$.
3. En déduire la probabilité de l'événement $A_n = (X_n \geqslant \max(X_1,\ldots,X_{n-1}))$ pour $n \geqslant 2$.

Exercice 3317
ESCP 2001
1. Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $]0;1]$. On pose $Y = \ln(X)$.
   Déterminer la loi de Y.
2. Soit (a,b) deux variables aléatoires à densité, indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$, suivant toutes deux la loi uniforme sur $]0,1]$. À tout $\omega \in \Omega$, on associe l'équation :
$$a(\omega)x^2 - b(\omega)x + 1 = 0.$$
   On note $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ les racines dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire S définie par :
$$S(\omega) = \alpha(\omega) + \beta(\omega).$$

Exercice 3318 - Marche aléatoire dans $\mathbb{R}^2$
Une puce se trouve initialement à l'origine d'un repère orthonormé du plan.
Elle se déplace par sauts de longueur unité. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le k-ième saut s'effectue dans une direction aléatoire repérée par son angle θ_k par rapport à l'axe (Ox), les variables étant mutuellement indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,2\pi[$.
On note M_n sa position après n déplacement, en convenant que $M_0 = 0$. On note X_n et Y_n les variables aléatoires égales respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de M_n.
1. Exprimer X_n et Y_n en fonction de $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$.
2. Montrer que les variables aléatoires X_n et Y_n sont centrées et calculer leur variance.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X_n^2,Y_n^2)$.
   Que peut-on en déduire ?
5. Calculer l'espérance de D_n^2 où D_n est la variable aléatoire égale à la distance de M_n à l'origine.
6. a) Montrer que :
$$\mathrm{P}(D_n \leqslant \sqrt{n}) = \mathrm{P}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos(\theta_i - \theta_j) \leqslant 0\right).$$
   b) En déduire $\mathrm{P}(D_n \leqslant \sqrt{n})$ et interpréter ce résultat.

2.2 Loi exponentielle

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3319
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
Montrer que X admet des moments de tous ordres et les calculer.

Exercice 3320
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0;1[)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$.

Exercice 3321 - Loi de Rayleigh
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. a) Vérifier que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer la loi de $Z = \exp\left(-\dfrac{X^2}{2}\right)$.

Exercice 3322 - Loi de Laplace
Soient $\lambda > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$.
1. Vérifier que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la loi de $Y = |X|$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3323
ESCP 2004
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1, dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. Cette roue est lancée dans le sens trigonométrique, l'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire, notée U. On suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre a.
La roue porte une marque M, qui, au départ, est située au point de coordonnées (1,0) et qui, après l'arrêt de la roue, se trouve au point de coordonnées aléatoires $X = \cos(U)$, $Y = \sin(U)$.
1. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\cos(u)\mathrm{d}u$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\sin(u)\mathrm{d}u$.
   a) Montrer que les intégrales I et J sont convergentes.
   b) À l'aide d'intégrations par parties, que l'on justifiera, établir deux relations liant I et J. En déduire les valeurs de I et J.
   c) Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.
2. Un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la relation : $Y \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   a) Calculer la probabilité, notée $p(a)$, que le joueur gagne.
   b) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} p(a)$.

Exercice 3324
ESCP 1999
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
On pose $Y = \ln\left(\mathrm{e}^X - 1\right)$.
1. Déterminer la fonction de répartition de Y et une densité de Y.
2. Calculer $E(Y)$.

Exercice 3325
ESCP Question courte 2003
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire dont la densité f_X est une fonction paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la variable aléatoire $Y = X^2$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
Déterminer la densité f_X de X.

Exercice 3326
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Un appareil électrique fonctionne avec trois piles P_k, $k \in \{1,2,3\}$. La durée de vie de la pile P_k est une variable aléatoire notée X_k. Les trois variables X_k sont indépendantes et suivent toutes la même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
L'appareil s'arrête de fonctionner dès que 2 piles sont usées.
Soit T la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement de l'appareil électrique.
Déterminer la loi de T et calculer son espérance $\mathrm{E}(T)$ si elle existe.

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3327
ESCP 1999
Soit a et b deux réels positifs distincts.
On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Pareto de densités respectives f_a et f_b définies par :

$$f_a(t) = \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_b(t) = \begin{cases} bt^{-b-1} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Reconnaître les lois de $\ln(X)$ et de $\ln(Y)$.
2. En déduire la loi de $Z = XY$.

Exercice 3328
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les variables aléatoires Y_n et Z_n définies par :

$$Y_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \qquad \text{et} \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}.$$

1. Montrer par récurrence que Y_n et Z_n ont même loi.
2. En déduire $\mathrm{E}(Y_n)$ et $\mathrm{V}(Y_n)$.

2.3 Loi normale

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3329
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ et telle que

$$\mathrm{P}(X \leqslant -1) = 0{,}441 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(X \leqslant 3) = 0{,}998.$$

Déterminer une valeur approchée de m et de σ à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite.

Exercice 3330
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. On note φ sa densité et Φ sa fonction de répartition.
1. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} x \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

2. En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\mathrm{d}t$.

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Exercice 3331
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = c\mathrm{e}^{-x^2-2xy-3y^2}$.
1. Déterminer c pour que f soit la densité d'un couple de variables aléatoires (X,Y).
2. Déterminer la loi de X et celle de Y.
3. Étudier l'indépendance de X et de Y.
4. Déterminer la loi de $X + Y$.
5. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 3332
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et ε une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{-1;1\}$ avec $\mathrm{P}(\varepsilon = 1) = p \in]0;1[$.
On suppose que X et ε sont indépendantes et on considère la variable aléatoire $Y = \varepsilon X$.

1. Montrer que X et Y ont même loi.
2. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$ et on pose $S = X + Y$.
   a) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   b) Calculer $\mathrm{P}(S = 0)$.
   Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   c) Déterminer la loi de S.

Exercice 3333
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire Z définie par :

$$Y = \begin{cases} \dfrac{X}{Y} & \text{si } Y \neq 0 \\ 0 & \text{si } Y = 0 \end{cases}$$

2.4 Loi Gamma

Cas des variables aléatoires « simples »

Exercice 3334
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, X une variable aléatoire suivant la loi gamma $\gamma(n)$ et Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Montrer que $\mathrm{P}(X > \lambda) = \mathrm{P}(Y < n)$.

Exercice 3335
Soit X une variable aléatoire suivant la loi gamma $\gamma(2)$.
Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 3336
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ et $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et préciser la loi de Y.

Cas des n-uplets de variables aléatoires

Chapitre XXXIV

Convergences et estimation

1 Convergences et approximations

1.1 Convergence en probabilité

Exercice 3337
Mines-Ponts MP 2021
Montrer, en utilisant une variable aléatoire, l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n-1}{n} 2^{4n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k}.$$

Exercice 3338
Mines-Ponts PSI 2019
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Montrer que :

$$\mathrm{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}\left(X \leqslant \frac{\lambda}{3}\right) \leqslant \frac{9}{4\lambda}.$$

Exercice 3339
CCP PC 2018
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire réelle telle que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{V}(X) = a$.
1. Donner un exemple de variable aléatoire vérifiant cette condition.
2. Montrer que :
$$\mathrm{P}(X \geqslant 2a) \leqslant \mathrm{P}\left((X - a + 1)^2 \geqslant (a+1)^2\right).$$
3. Montrer que :
$$\mathrm{P}(X \geqslant 2a) \leqslant \frac{1}{a+1}.$$

Exercice 3340
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 3341
On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite.
À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver une condition sur l'entier n pour que le rapport du nombre de *piles* obtenus sur le nombre de lancers soit strictement compris entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 3342
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale telle que :

$$\mathrm{P}(X \leqslant 96240) = 0{,}8413 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(X < 95640) = 0{,}0668.$$

Estimer les paramètres de la loi de X.

Exercice 3343
Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée, l'enjeu à chaque partie étant de 1 euro.
Combien de parties doit-il décider de jouer pour avoir 95% de chances de ne pas perdre plus de 20 euros ?

Exercice 3344
Mines-Ponts PC 2019. CCP PSI 2016. CCP PC 2017
Soit $p \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
1. Déterminer la loi de Y_n. Calculer $\mathrm{E}(Y_n)$ et $\mathrm{V}(Y_n)$.
2. Calculer $\mathrm{E}(T_n)$ et $\mathrm{V}(T_n)$.
3. Montrer que la suite $\left(\dfrac{T_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $2p$.

Exercice 3345
ENS PSI 2017. ESCP 1999. TPE PC 2018
Soit $p \in]0;1[$ et $](X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.
1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $i \neq j$. Discuter, suivant les valeurs de i et j, l'indépendance de Y_i et Y_j.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p^2.

Exercice 3346
ESCP 2009
1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$ existent. On suppose, en outre, qu'il existe un réel m tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(X_n) = m \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{V}(X_n) = 0.$$

   a) Montrer que : $\mathrm{E}\left((X_n - m)^2\right) = \mathrm{V}(X_n) + (\mathrm{E}(X_n) - m)^2$.
   b) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on a :

$$\mathrm{P}(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(\mathrm{V}(X_n) + (\mathrm{E}(X_n) - m)^2).$$

   c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. On lance n fois une pièce non équilibrée avec laquelle la probabilité d'obtenir « pile » lors d'un jet est p.
   Soit S_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de « pile » obtenus. Enfin, Y_n est la variable aléatoire définie par : $Y_n = \mathrm{e}^{\frac{S_n}{n}}$.
   a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Exercice 3347
ESCP 1999, 2011
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ qui suit la loi de Poisson de paramètre réel inconnu $\lambda > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ un n-échantillon indépendant identiquement distribué de la loi de X. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
s désigne un entier naturel.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = s)$.
2. Soit T_n la variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ par $T_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{S_n}$.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\exp(-\lambda)$.

Exercice 3348 - Théorème de Césaro et convergence en probabilité
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 mais que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 en probabilité.

Exercice 3349 - Théorème des grandes déviations
X MP 2015
Soit $n \geqslant 1$, $p \in]0;1[$ et S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Montrer que :
$$\forall a > 0, \quad \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant \exp\left(-n \sup_{s\in\mathbb{R}_+} \left(sa - \ln\left(1 - p + p\mathrm{e}^s\right)\right)\right).$$
2. Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-nh(\varepsilon)},$$
   h étant indépendante de n.
3. Montrer qu'il existe $k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant p - \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-nk(\varepsilon)}.$$
4. Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-nh(\varepsilon)}.$$

Exercice 3350
CCP PSI 2016
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ avec $p_n \in]0;1[$.
On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k = p.$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 3351
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité vers X et Y respectivement. Montrer que les suites $(X_n+Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en probabilité vers $X+Y$ et XY respectivement.

Exercice 3352 - Loi faible des grands nombres
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, admettant un moment d'ordre 2 et deux à deux non corrélées.
On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(X_k)=m \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}(X_k)=0.$$

Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers m.

Exercice 3353 - Théorème d'approximation de Weierstrass par les polynômes de Bernstein
ENS MP 2021 Soit $f:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue.
En considérant $\mathrm{E}\left(f(x)-f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$ où X_n est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0;1]}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|=0.$$

1.2 Convergence en loi

Exercice 3354
ESCP Question courte 2004
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et X une variable aléatoire définie également sur cet espace.
On suppose que (X_n) converge en loi vers X.
La suite (X_n-X) converge-t-elle nécessairement en loi vers la variable certaine nulle?

Exercice 3355
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ mutuellement indépendantes.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}X_k$.
1. Déterminer la loi de S_n.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 3356
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n, on effectue deux tirages successifs avec remise. On note X_n et Y_n les variables aléatoires égales au numéro du premier et du deuxième jeton respectivement et on pose $S_n=X_n+Y_n$.
1. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n.
2. Étudier la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $T_n=\frac{S_n}{n}$.

Exercice 3357
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires.
1. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.
   Étudier la convergence en loi et en probabilité de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Étudier la convergence en loi et en probabilité de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3358
ESCP 2005
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n cartons numérotés de 1 à n. On extrait les n cartons

un à un et sans remise et on note T_k le numéro obtenu au k-ième tirage. Soit Z_n la variable égale au plus petit indice j tel que $T_j > T_{j+1}$ si cet indice existe, sinon on pose $Z_n = n$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{P}(Z_n > k)$ et en déduire la loi de probabilité de Z_n.
2. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable notée Z.
3. Exprimer $\mathrm{E}(Z_n)$ sous la forme d'une somme et donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers l'infini. Calculer $\mathrm{E}(Z)$.

Exercice 3359
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$.
On note F_n la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de σ.

1. Déterminer la loi de F_n.
2. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, soit $F_{k,n}$ la variable aléatoire égale à 1 si $\sigma(k) = k$, à 0 sinon.
   a) Calculer $\mathrm{E}(F_{k,n})$, $\mathrm{V}(F_{k,n})$ et $\mathrm{Cov}(F_{i,n},F_{j,n})$ pour $i \neq j$.
   b) En déduire l'espérance et la variance de F_n.
3. Étudier la convergence en loi de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3360
Soit X une variable aléatoire réelle de densité f et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de variables aléatoires définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $X_n = \dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.
Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Exercice 3361
ESCP 2007
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a + b < 1$.
Un interrupteur admet deux positions que l'on note 0 et 1.
Si, à l'instant n, il est en position 0, il sera encore en position 0 à l'instant $n + 1$ avec la probabilité $1 - a$ et passera en position 1 avec la probabilité a.
De même, s'il est en position 1, il y restera l'instant suivant avec la probabilité $1 - b$ et basculera en position 0 avec la probabilité b.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n la position de l'interrupteur à l'instant n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix}\mathrm{P}(X_{n+1} = 0)\\ \mathrm{P}(X_{n+1} = 1)\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}\mathrm{P}(X_n = 0)\\ \mathrm{P}(X_n = 1)\end{pmatrix}$$
avec $A = \begin{pmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{pmatrix}$.
2. Si l'on suppose que X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{a}{a+b}$, déterminer la loi de la variable X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Dans le cas général, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre p_n.
4. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la covariance entre les variables X_n et X_{n+1}.
   Quelle est la limite de la suite $(\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3362
Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative de paramètre (r,p) si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k.$$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - p_n) = \lambda$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale négative de paramètre (n,p_n).
Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3363
ESCP Question courte 2009
Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre $\dfrac{a}{n}$.
Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Exercice 3364
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires dont les lois sont définies par :

$$\begin{cases} X_n(\Omega) = [\![1,n]\!] \\ \forall k \in X_n(\Omega), \quad \mathrm{P}(X_n = k) = \lambda_n k. \end{cases}$$

1. Déterminer λ_n pour que la définition précédente soit cohérente.
2. Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$ de X_n.
3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Exercice 3365
ESCP 2003
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer a_n pour que f_n soit une densité d'une variable aléatoire réelle continue.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de densité f_n.
   Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, X_n possède un moment d'ordre k, que l'on calculera.
3. Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.
   Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
   On note cette limite $F(x)$. La fonction F est-elle une fonction de répartition d'une variable aléatoire?
   La suite (X_n) admet-elle une limite en loi? Si oui, la déterminer.

Exercice 3366
1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et $Y = \lfloor X \rfloor$.
   a) Déterminer la loi de Y et calculer $\mathrm{E}(Y)$.
   b) Déterminer la loi de $X - Y$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $Y_n = \lfloor X_n \rfloor$.
   Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n - Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3367
ESCP 2006
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, $p \in]0;1[$, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme à densité sur $[0,n]$, et N_n une variable aléatoire indépendante des X_i suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
On pose : $U_n = \max(X_0, \ldots, X_n)$, $V_n = \min(X_0, \ldots, X_n)$ et $W_n = \min(X_0, \ldots, X_{N_n})$
1. Déterminer la loi de U_n, son espérance et sa variance.
2. Montrer que la loi de V_n est celle de $n - U_n$.
   En déduire $\mathrm{E}(V_n)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{V}_n)$.
3. On note G_n la fonction de répartition de V_n.
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(t)$ suivant les valeurs de t. Que peut-on en déduire?
4. Déterminer la fonction de répartition H_n de W_n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(t)$ suivant les valeurs de t. Conclure.

Exercice 3368
ESCP 1999

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une densité de probabilité.
Soit $Y_n = nX_n$ où X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ et qui admet f_n pour densité.
Pour $x \in [0,n]$, calculer $\mathrm{P}(Y_n \leqslant x)$. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(n+2)x(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une densité de probabilité.
Soit $Y_n = nX_n$ où X_n admet pour densité f_n.
Pour $x \in [0,n]$, montrer que $\mathrm{P}(Y_n \leqslant x) = 1 - \left(\dfrac{n+1}{n}x + 1\right)\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n+1}$.
En déduire que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 3369

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
On note Y la variable aléatoire définie par $Y = -\ln(X)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et déterminer une densité de Y.
2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et Z une variable aléatoire réelle admettant F pour fonction de répartition.
On considère n variables aléatoires indépendantes $Z_1,\ldots,Z_n$ de même loi que Z. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} Z_k$.
   a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.
   b) Montrer que la suite $(M_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Exercice 3370

ESCP 2002

1. Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0;1]$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que U.
Soit, d'autre part, Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \min(U_1,\ldots,U_n)$.
Montrer que la suite de variables $(nZ_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^{-\lambda X}$.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer les limites en loi des suites de terme général :
   a) $A_n = n\min\left(\mathrm{e}^{-\lambda X_1},\ldots,\mathrm{e}^{-\lambda X_n}\right)$
   b) $D_n = \max(X_1,\ldots,X_n) - \ln(n)$, dans le cas où $\lambda = 1$.

Exercice 3371

ESCP 2002

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On note F leur fonction de répartition commune.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.
Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F et n.
2. Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \lambda M_n - \ln(n)$.
Déterminer la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et on suppose que X_1 admet pour fonction de répartition :

$$F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^a & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = n^{\frac{1}{a}}(M_n - 1)$.
Déterminer la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Que retrouve-t-on lorsque $a = 1$?

Exercice 3372
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
En considérant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où $(X_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(x)$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x).$$

La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 3373
En considérant la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3374
En considérant la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, montrer que :

$$\int_0^n x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \sim \frac{(n-1)!}{2}.$$

En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_n^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

Chapitre XXXV

Divers

Exercice 3375
On colore tous les points du plan, arbitrairement, soit en bleu soit en rouge.
Montrer qu'il existe au moins un triangle équilatéral dont les sommets sont de la même couleur.

Exercice 3376
X MP 2016
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u - 2\mathrm{Id}_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Calculer $\exp(u)$.

Exercice 3377
Mines-Ponts PC 2021
1. Soit $k \in]0;1[$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne.
   Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que le résultat tombe en défaut si on suppose simplement :

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq x' \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

Bibliographie

[1] M. Aassila : *Objectif olympiades de mathématiques. Tome 1 : algèbre.* 2020.

[2] M. Aassila : *Objectif olympiades de mathématiques. Tome 2 : analyse.* 2020.

[3] M. Aassila : *Objectif olympiades de mathématiques. Tome 3 : combinatoire 1.* 2020.

[4] M. Aassila : *Objectif olympiades de mathématiques. Tome 4 : combinatoire 2.* 2020.

[5] M. Aassila : *Objectif olympiades de mathématiques. Tome 5 : arithmétique.* 2020.

[6] T. Andreescu : *Mathematical olympiads 1996-1997. Problems and solutions from around the world.* The Mathematical Association of America, 1998.

[7] T. Andreescu : *Mathematical olympiads 1997-1998. Problems and solutions from around the world.* The Mathematical Association of America, 1999.

[8] T. Andreescu et D. Andrica : *360 Problems for mathematical contests.* GIL Publishing House, 2003.

[9] T. Andreescu et Z. Feng : *Mathematical olympiads 1998-1999. Problems and solutions from around the world.* The Mathematical Association of America, 2000.

[10] T. Andreescu et Z. Feng : *Mathematical olympiads 1999-2000. Problems and solutions from around the world.* The Mathematical Association of America, 2001.

[11] T. Andreescu, Z. Feng et G. Lee : *Mathematical olympiads 2000-2001. Problems and solutions from around the world.* The Mathematical Association of America, 2002.

[12] T. Andreescu et R. Gelca : *Putnam and beyond.* Springer, 2007.

[13] T. Andreescu, K. Kedlaya et P. Zeitz : *Mathematical olympiads 1995-1996. Problems and solutions from around the world.* The Mathematical Association of America, 1997.

[14] F. Aubonnet : *Les grands classiques de mathématiques. Algèbre et géométrie. MP PC PSI.* Bréal, 1996.

[15] P. Bornsztein : *Supermath. 250 exercices de haut vol.* Vuibert, 1999.

[16] P. Bornsztein : *Mégamath. 142 exercices de haut vol.* Vuibert, 2001.

[17] J.-D. Eiden : *Le jardin d'Eiden. Une année de colle en Maths Spé MP*.* Calvage et Mounet, 2012.

[18] S. Francinou, S. Gianella et H. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 1. Deuxième édition.* Éditions Cassini, 2007.

[19] S. Francinou, S. Gianella et H. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 1. Deuxième édition.* Éditions Cassini, 2007.

[20] S. Francinou, S. Gianella et H. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 2. Deuxième édition.* Éditions Cassini, 2009.

[21] S. Francinou, S. Gianella et H. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 2. Deuxième édition.* Éditions Cassini, 2009.

[22] S. Francinou, S. Gianella et H. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 3.* Éditions Cassini, 2010.

[23] S. Francinou, S. Gianella et H. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 3.* Éditions Cassini, 2010.

[24] S. Francinou, S. Gianella et H. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 4.* Éditions Cassini, 2012.

[25] D. Guin, B. Joppin et M. Lepez : *Les grands classiques de mathématiques. MPSI PCSI PTSI.* Bréal, 1995.

[26] D. S. GUNDERSON : *Handbook of mathematical induction. Theory and applications.* Chapman and Hall/CRC, 2014.

[27] W. J. KACZOR et M. T. NOWAK : *Problèmes d'analyse I. Nombres réels, suites et séries.* EDP Sciences, 2008.

[28] W. J. KACZOR et M. T. NOWAK : *Problèmes d'analyse II. Continuité et dérivabilité.* EDP Sciences, 2008.

[29] W. J. KACZOR et M. T. NOWAK : *Problèmes d'analyse III. Intégration.* EDP Sciences, 2008.

[30] E. KOURIS : *Une année de de colles en Maths Sup MPSI.* Calvage et Mounet, 2011.

[31] R. B. LEIGH et A. LIU : *Hungarian problem book IV.* The Mathematical Association of America, 2011.

[32] M. LEPEZ : *Les grands classiques de mathématiques. Analyse. MP PC PT.* Bréal, 1996.

[33] A. LIU : *Hungarian problem book III based on the Eötvös competitions, 1929-1943.* The Mathematical Association of America, 2001.

[34] J.M. MONIER : *Analyse - Tome 1. 800 exercices résolus et 18 sujets d'étude.* Dunod, 1990.

[35] J.M. MONIER : *Analyse - Tome 2. 600 exercices résolus et 21 sujets d'étude.* Dunod, 1990.

[36] J.M. MONIER : *Algèbre - Tome 1 (Algèbre générale). 600 exercices résolus et 24 sujets d'étude.* Dunod, 1991.

[37] J.M. MONIER : *Algèbre - Tome 2 (Algèbre linéaire). 700 exercices résolus et 16 sujets d'étude.* Dunod, 1991.

[38] B. RANDÉ : *Les nouvelles clefs pour les Mines. Oral MP - Tome I.* Calvage et Mounet, 2017.

[39] B. RANDÉ et F. FONTANEZ : *Les clefs pour les Mines.* Calvage et Mounet, 2009.

[40] B. RANDÉ et R. MANSUY : *Les clefs pour l'X 2.* Calvage et Mounet, 2009.

[41] B. RANDÉ et R. MANSUY : *Les clefs pour la PSI.* Calvage et Mounet, 2011.

[42] B. RANDÉ et F. TAÏEB : *Les clefs pour l'X.* Calvage et Mounet, 2008.

[43] E. RAPAPORT : *Hungarian problem book I based on the Eötvös competitions, 1894-1905.* The Mathematical Association of America, 1963.

[44] E. RAPAPORT : *Hungarian problem book II based on the Eötvös competitions, 1906-1928.* The Mathematical Association of America, 1963.

[45] J.-L. ROQUE : *Progresser et réussir en mathématiques. Probabilités et statistiques.* Espace Études, 2001.